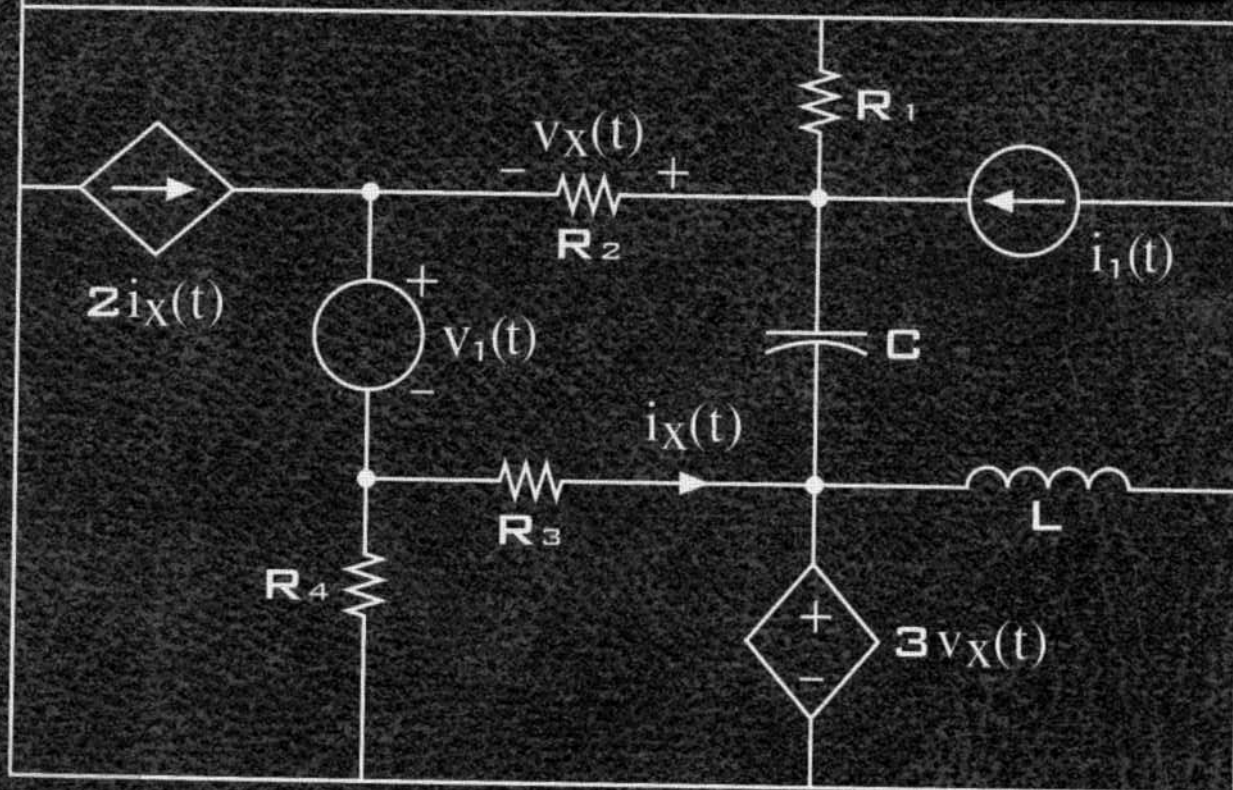


QUARTA EDIÇÃO

# ANÁLISE DE CIRCUITOS EM ENGENHARIA



J. DAVID IRWIN

PEARSON

---

## Prefixos Frequentemente Usados

|                 |            |
|-----------------|------------|
| giga (G)        | $10^9$     |
| mega (M)        | $10^6$     |
| quilo (k)       | $10^3$     |
| mili (m)        | $10^{-3}$  |
| micro ( $\mu$ ) | $10^{-6}$  |
| nano (n)        | $10^{-9}$  |
| pico (p)        | $10^{-12}$ |

---

## Relações Matemáticas Úteis

### Identidades Trigonômétricas

$$\cos \omega t = \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin \omega t = \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$-\cos \omega t = \cos (\omega t \pm 180^\circ)$$

$$-\sin \omega t = \sin (\omega t \pm 180^\circ)$$

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

$$\cos \alpha + \cos (\alpha - 120^\circ) + \cos (\alpha + 120^\circ) = 0$$

### Par de Transformada de Fourier

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

### Par de Transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\omega}^{\sigma_1 + j\omega} F(s) e^{st} ds$$

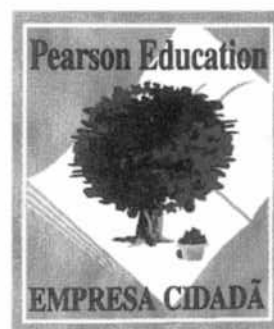
---

## Abreviaturas

|          |                    |
|----------|--------------------|
| ac       | Corrente alternada |
| A        | Ampère             |
| C        | Coulomb            |
| dB       | Decibel            |
| dc       | Corrente contínua  |
| F        | Farad              |
| H        | Henry              |
| Hz       | Hertz              |
| J        | Joule              |
| m        | Metro              |
| N        | Newton             |
| N.m      | Newton-metro       |
| $\Omega$ | Ohm                |
| fp       | Fator de potência  |
| rad      | radianos           |
| R        | Resistência        |
| L        | Indutância         |
| C        | Capacitância       |
| rms      | Valor eficaz       |
| s        | Segundo            |
| S        | Siemens            |
| V        | Volt               |
| VA       | Volt-Ampère        |
| W        | Watt               |

# **ANÁLISE DE CIRCUITOS EM ENGENHARIA**

**SOCIESC**  
Biblioteca





# ANÁLISE DE CIRCUITOS EM ENGENHARIA

***J. David Irwin***

Professor e Chefe de Departamento de Engenharia Elétrica  
da Auburn University, Alabama

**Tradução**

***Luiz Antônio Aguirre, Ph.D.***

Professor do Departamento de Engenharia Eletrônica da UFMG

***Janete Furtado Ribeiro Aguirre***

Bacharel em Ciências da Computação, UFMG

Professora da Sociedade Brasileira de Cultura Inglesa, Belo Horizonte

**Revisão Técnica**

***Antonio Pertence Júnior***

Engenheiro Eletrônico e de Telecomunicações (PUC/MG)

Professor de Eletrônica e de Telecomunicações

SOCIEDADE EDUCACIONAL DE SANTA CATARINA



CTB12104 621.319 2 I72an

Análise de circuitos em engenharia

621.319 2  
I 72 an  
doc 11723



São Paulo



© 2000 by Pearson Education do Brasil  
Título original: Basic Engineering Circuit Analysis – 4 th. edition  
© 1992 Macmillan Publishing. Original em inglês publicado pela Macmillan Publishing

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Gerente de Produção: Silas Camargo

#### Dados de Catalogação na Publicação

Irwin, J. David  
Análise de Circuitos em Engenharia / J. David Irwin  
tradução: Luis Antônio Aguirre, Janete Furtado Ribeiro Aguirre;  
revisão técnica: Antonio Pertence Júnior

São Paulo : Pearson Makron Books, 2000

ISBN: 978-85-346-0693-6

SOCIESC  
CETT Curitiba  
BIBLIOTECA  
REG Nº 012/04  
DEPTO. P07  
ORIGEM NF8223  
DATA 12/05/2011  
LIVRARIA Curitiba  
PREÇO R\$ 149,00

Setembro 2010  
Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à  
Pearson Education do Brasil,  
uma empresa do grupo Pearson Education  
Rua Nelson Francisco, 26, Limão  
Cep: 02712-100 – São Paulo – SP  
Tel: (11) 2178-8686 Fax: (11) 2178-8688  
e-mail: vendas@pearson.com

*Para Edie*

*Geri Marie*

*John David, Jr.*

*Laura Lynne*

# Sumário

|                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Prefácio</b>                                                        | <b>XV</b> |
| <b>Capítulo 1 Conceitos Básicos</b>                                    | <b>1</b>  |
| 1.1 Sistemas de Unidades                                               | 1         |
| 1.2 Quantidades Básicas                                                | 2         |
| 1.3 Componentes de Circuitos                                           | 8         |
| Fontes Independentes                                                   | 8         |
| Fontes Dependentes                                                     | 10        |
| 1.4 Resumo                                                             | 12        |
| <b>Capítulo 2 Circuitos Resistivos</b>                                 | <b>18</b> |
| 2.1 A Lei de Ohm                                                       | 18        |
| 2.2 As Leis de Kirchhoff                                               | 22        |
| 2.3 Circuitos de Laço Único                                            | 30        |
| 2.4 Circuitos com Único Par de Nós                                     | 37        |
| 2.5 Combinações de Resistores em Série e em Paralelo                   | 45        |
| 2.6 Circuitos com Combinações e Resistores em Série e em Paralelo      | 47        |
| 2.7 Transformações Y (Estrela) $\leftrightarrow$ $\Delta$ (Delta)      | 53        |
| 2.8 Circuitos com Fontes Dependentes                                   | 56        |
| 2.9 Resumo                                                             | 60        |
| <b>Capítulo 3 Técnicas de Análises Nodal e de Laço</b>                 | <b>78</b> |
| 3.1 Análise Nodal                                                      | 78        |
| Equações Nodais para Circuitos Contendo Fontes Independentes de Tensão | 88        |
| Equações Nodais para Circuitos Contendo Fontes Dependentes de Tensão   | 94        |

|                   |                                                                                      |            |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.2               | Análise de Laço . . . . .                                                            | 97         |
|                   | Equações de Malha para Circuitos Contendo Fontes Independentes de Corrente . . . . . | 102        |
|                   | Equações de Malha para Circuitos Contendo Fontes Dependentes. . . . .                | 107        |
| 3.3               | Equações de Circuito via Topologia de Rede . . . . .                                 | 109        |
|                   | Definições Básicas . . . . .                                                         | 109        |
|                   | Equações Gerais de Análise Nodal . . . . .                                           | 112        |
|                   | Equações Gerais de Análise de Laço . . . . .                                         | 115        |
| 3.4               | Circuitos com Amplificadores Operacionais . . . . .                                  | 117        |
| 3.5               | Resumo. . . . .                                                                      | 126        |
| <b>Capítulo 4</b> | <b>Análise DC com PSPICE . . . . .</b>                                               | <b>147</b> |
| 4.1               | Introdução. . . . .                                                                  | 147        |
| 4.2               | Elementos do Programa . . . . .                                                      | 148        |
|                   | Comandos de Título e Comentários. . . . .                                            | 148        |
|                   | Comandos de Dados . . . . .                                                          | 148        |
|                   | Comandos de Controle de Solução . . . . .                                            | 152        |
|                   | Comandos de Especificação de Saída . . . . .                                         | 153        |
|                   | Comando de Fim. . . . .                                                              | 154        |
| 4.3               | Aplicações . . . . .                                                                 | 154        |
|                   | Circuitos Contendo Somente Fontes Independentes . . . . .                            | 154        |
|                   | Circuitos Contendo Fontes Dependentes. . . . .                                       | 157        |
|                   | Circuitos Contendo Amplificadores Operacionais . . . . .                             | 161        |
| 4.4               | Resumo. . . . .                                                                      | 163        |
| <b>Capítulo 5</b> | <b>Técnicas Adicionais de Análise . . . . .</b>                                      | <b>175</b> |
| 5.1               | Teoremas de Rede . . . . .                                                           | 175        |
|                   | Linearidade . . . . .                                                                | 175        |
|                   | Superposição . . . . .                                                               | 179        |
|                   | Transformação de Fonte. . . . .                                                      | 185        |
|                   | Teoremas de Thévenin e Norton . . . . .                                              | 188        |
| 5.2               | Transferência Máxima de Potência . . . . .                                           | 202        |
| 5.3               | Análise de Sensibilidade . . . . .                                                   | 206        |
| 5.4               | Resumo. . . . .                                                                      | 208        |
| <b>Capítulo 6</b> | <b>Capacitância e Indutância . . . . .</b>                                           | <b>225</b> |
| 6.1               | Capacitores . . . . .                                                                | 225        |
| 6.2               | Indutores . . . . .                                                                  | 230        |
| 6.3               | Combinações de Capacitores e Indutores . . . . .                                     | 233        |
|                   | Capacitores em Série . . . . .                                                       | 233        |
|                   | Capacitores em Paralelo. . . . .                                                     | 234        |
|                   | Indutores em Série . . . . .                                                         | 236        |
|                   | Indutores em Paralelo. . . . .                                                       | 237        |
| 6.4               | Resumo. . . . .                                                                      | 239        |
| <b>Capítulo 7</b> | <b>Circuitos RC e RL . . . . .</b>                                                   | <b>249</b> |
| 7.1               | Desenvolvimento dos Procedimentos Fundamentais . . . . .                             | 249        |
| 7.2               | Circuitos sem Fontes . . . . .                                                       | 254        |

|                    |                                                                        |            |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.3                | Circuitos com Funções de Entrada Constantes e Não-Constantes . . . . . | 260        |
| 7.4                | Resposta ao Pulso . . . . .                                            | 269        |
| 7.5                | Circuitos <i>RC</i> Com Amplificadores Operacionais . . . . .          | 273        |
| 7.6                | Análise Transiente de Circuitos Utilizando PSPICE . . . . .            | 276        |
|                    | Comandos de Ramo para Indutores e Capacitores . . . . .                | 276        |
|                    | Comandos de Ramo para Fontes Variáveis no Tempo . . . . .              | 276        |
|                    | Comandos de Controle de Solução . . . . .                              | 279        |
|                    | Comandos de Especificação de Saída . . . . .                           | 280        |
| 7.7                | Resumo . . . . .                                                       | 292        |
| <b>Capítulo 8</b>  | <b>Circuitos RLC . . . . .</b>                                         | <b>309</b> |
| 8.1                | A Equação Básica do Circuito . . . . .                                 | 309        |
| 8.2                | Desenvolvimento Matemático das Equações de Resposta . . . . .          | 310        |
| 8.3                | A Resposta da Rede . . . . .                                           | 314        |
| 8.4                | Análise PSPICE de Circuitos <i>RLC</i> . . . . .                       | 325        |
| 8.5                | Resumo . . . . .                                                       | 332        |
| <b>Capítulo 9</b>  | <b>Senóides e Fasores . . . . .</b>                                    | <b>339</b> |
| 9.1                | Senóides . . . . .                                                     | 339        |
| 9.2                | Funções de Excitação Senoidal e Complexas . . . . .                    | 343        |
| 9.3                | Fasores . . . . .                                                      | 347        |
| 9.4                | Relações de Fasores para Elementos de Circuito . . . . .               | 349        |
| 9.5                | Admitância e Impedância . . . . .                                      | 354        |
| 9.6                | Análise Básica Utilizando as Leis de Kirchhoff . . . . .               | 370        |
| 9.7                | Uso de Fasores em Circuitos com Amplificadores Operacionais . . . . .  | 373        |
| 9.8                | Resumo . . . . .                                                       | 374        |
| <b>Capítulo 10</b> | <b>Análise Senoidal em Regime Permanente . . . . .</b>                 | <b>388</b> |
| 10.1               | Linearidade . . . . .                                                  | 388        |
| 10.2               | Análise Nodal . . . . .                                                | 390        |
| 10.3               | Análise de Malha . . . . .                                             | 395        |
| 10.4               | Superposição . . . . .                                                 | 398        |
| 10.5               | Transformação de Fonte . . . . .                                       | 400        |
| 10.6               | Teoremas de Thévenin e Norton . . . . .                                | 402        |
| 10.7               | Técnicas de Análise PSPICE . . . . .                                   | 408        |
| 10.8               | Resumo . . . . .                                                       | 412        |
| <b>Capítulo 11</b> | <b>Análise de Potência em Regime Permanente . . . . .</b>              | <b>429</b> |
| 11.1               | Potência Instantânea . . . . .                                         | 429        |
| 11.2               | Potência Média . . . . .                                               | 431        |
| 11.3               | Transferência Máxima de Potência Média . . . . .                       | 436        |
| 11.4               | Valores Eficazes ou rms . . . . .                                      | 441        |
| 11.5               | O Fator de Potência . . . . .                                          | 444        |
| 11.6               | Potência Complexa . . . . .                                            | 446        |
| 11.7               | Medindo Potência . . . . .                                             | 452        |
| 11.8               | Considerações sobre Segurança . . . . .                                | 454        |
| 11.9               | Resumo . . . . .                                                       | 462        |

|                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Capítulo 12 Circuitos Polifásicos . . . . .</b>                           | <b>475</b> |
| 12.1 Circuitos Trifásicos . . . . .                                          | 475        |
| 12.2 Conexões Trifásicas . . . . .                                           | 477        |
| Conexão Y-Y Em Equilíbrio . . . . .                                          | 478        |
| Conexão Estrela-Delta em Equilíbrio . . . . .                                | 482        |
| Fonte Conectada em Delta . . . . .                                           | 484        |
| Transformações Delta $\leftrightarrow$ Y . . . . .                           | 487        |
| Relações de Potência . . . . .                                               | 491        |
| 12.3 Análise PSPICE para Circuitos Trifásicos . . . . .                      | 495        |
| 12.4 Medições Trifásicas . . . . .                                           | 500        |
| Medição de Potência . . . . .                                                | 500        |
| Medição do Fator de Potência . . . . .                                       | 503        |
| 12.5 Correção do Fator de Potência . . . . .                                 | 505        |
| 12.6 Resumo . . . . .                                                        | 506        |
| <b>Capítulo 13 Redes Magneticamente Acopladas . . . . .</b>                  | <b>513</b> |
| 13.1 Indutância Mútua . . . . .                                              | 513        |
| 13.2 Análise de Energia . . . . .                                            | 520        |
| 13.3 O Transformador Linear . . . . .                                        | 523        |
| 13.4 Análise PSPICE de Circuitos Magneticamente Acoplados . . . . .          | 527        |
| 13.5 O Transformador Ideal . . . . .                                         | 529        |
| 13.6 Análise de Circuitos com Transformadores Ideais Usando PSPICE . . . . . | 540        |
| 13.7 Autotransformadores Ideais . . . . .                                    | 542        |
| 13.8 Transformadores Trifásicos . . . . .                                    | 545        |
| 13.9 Considerações sobre Segurança . . . . .                                 | 548        |
| 13.10 Resumo . . . . .                                                       | 549        |
| <b>Capítulo 14 Resposta em Frequência . . . . .</b>                          | <b>564</b> |
| 14.1 Características Gerais de Rede . . . . .                                | 564        |
| Pólos e Zeros . . . . .                                                      | 566        |
| 14.2 Análise Senoidal de Frequência . . . . .                                | 567        |
| Diagramas de Resposta em Frequência . . . . .                                | 567        |
| Resposta em Frequência Usando o Diagrama de Bode . . . . .                   | 569        |
| 14.3 Circuitos Ressonantes . . . . .                                         | 582        |
| 14.4 Mudança de Escala . . . . .                                             | 599        |
| 14.5 Resposta em Frequência Usando PSPICE . . . . .                          | 601        |
| 14.6 Filtros . . . . .                                                       | 604        |
| Filtros Passivos . . . . .                                                   | 604        |
| Filtros Ativos . . . . .                                                     | 611        |
| 14.7 Resumo . . . . .                                                        | 627        |
| <b>Capítulo 15 Quadripolos . . . . .</b>                                     | <b>642</b> |
| 15.1 Parâmetros de Admitância . . . . .                                      | 642        |
| 15.2 Parâmetros de Impedância . . . . .                                      | 648        |
| 15.3 Parâmetros Híbridos . . . . .                                           | 651        |
| 15.4 Parâmetros de Transmissão . . . . .                                     | 656        |
| 15.5 Circuitos Equivalentes . . . . .                                        | 660        |
| 15.6 Conversão de Parâmetros . . . . .                                       | 662        |

|                    |                                                                              |            |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 15.7               | Interconexão de Quadripolos . . . . .                                        | 664        |
|                    | Conexão em Paralelo . . . . .                                                | 664        |
|                    | Conexão em Série . . . . .                                                   | 668        |
|                    | Conexão em Cascata . . . . .                                                 | 670        |
| 15.8               | Redes Equivalentes T-II . . . . .                                            | 671        |
| 15.9               | Quadripolos Contidos em uma Rede . . . . .                                   | 674        |
| 15.10              | Resumo . . . . .                                                             | 675        |
| <b>Capítulo 16</b> | <b>Transformada de Laplace . . . . .</b>                                     | <b>684</b> |
| 16.1               | Definição . . . . .                                                          | 684        |
| 16.2               | Alguns Pares de Transformadas Importantes . . . . .                          | 685        |
| 16.3               | Algumas Propriedades Úteis da Transformada . . . . .                         | 688        |
| 16.4               | A Função Porta . . . . .                                                     | 694        |
| 16.5               | Funções Periódicas . . . . .                                                 | 697        |
| 16.6               | A Transformada Inversa . . . . .                                             | 698        |
|                    | Pólos Simples . . . . .                                                      | 699        |
|                    | Pólos Conjugados Complexos . . . . .                                         | 700        |
|                    | Pólos Múltiplos . . . . .                                                    | 702        |
| 16.7               | A Integral de Convolução . . . . .                                           | 703        |
| 16.8               | Teoremas de Valor Inicial e Valor Final . . . . .                            | 706        |
| 16.9               | Aplicações com Equações Diferenciais . . . . .                               | 708        |
| 16.10              | Resumo . . . . .                                                             | 710        |
| <b>Capítulo 17</b> | <b>Aplicação da Transformada de Laplace à Análise de Circuitos . . . . .</b> | <b>718</b> |
| 17.1               | Modelos de Elementos de Circuito . . . . .                                   | 718        |
| 17.2               | Técnicas de Análise . . . . .                                                | 720        |
| 17.3               | Função de Transferência . . . . .                                            | 737        |
| 17.4               | Resposta em Estado Estacionário . . . . .                                    | 745        |
| 17.5               | Resumo . . . . .                                                             | 747        |
| <b>Capítulo 18</b> | <b>Técnicas de Análise de Fourier . . . . .</b>                              | <b>758</b> |
| 18.1               | A Série de Fourier . . . . .                                                 | 758        |
|                    | Série Exponencial de Fourier . . . . .                                       | 761        |
|                    | Série Trigonométrica de Fourier . . . . .                                    | 768        |
|                    | Simetria e Séries Trigonômicas de Fourier . . . . .                          | 769        |
|                    | Análise PSPICE . . . . .                                                     | 775        |
|                    | Deslocamento no Tempo . . . . .                                              | 777        |
|                    | Geração de Formas de Onda . . . . .                                          | 779        |
|                    | Espectro de Frequência . . . . .                                             | 782        |
|                    | Resposta da Rede em Estado Estacionário . . . . .                            | 783        |
|                    | Potência Média . . . . .                                                     | 785        |
| 18.2               | A Transformada de Fourier . . . . .                                          | 787        |
|                    | Alguns Pares Importantes de Transformadas . . . . .                          | 788        |
|                    | Algumas Propriedades da Transformada de Fourier . . . . .                    | 791        |
|                    | Teorema de Parseval . . . . .                                                | 795        |
|                    | Aplicações . . . . .                                                         | 795        |



|                                                                                                       |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 18.3 Resumo . . . . .                                                                                 | 799        |
| Pontos-Chave . . . . .                                                                                | 800        |
| <b>Apêndice A Técnicas para Resolução de Equações Simultâneas Linearmente Independentes . . . . .</b> | <b>809</b> |
| A.1 Eliminação de Gauss . . . . .                                                                     | 810        |
| A.2 Matrizes . . . . .                                                                                | 810        |
| <b>Apêndice B Procedimento para Instalação do Programa PSPICE . . . . .</b>                           | <b>818</b> |
| B.1 Preparando seu PC (ou Compatível) para Executar o Programa PSPICE . . . . .                       | 818        |
| B.2 Configurando Impressora e Vídeo para o Programa PSPICE . . . . .                                  | 818        |
| <b>Apêndice C Números Complexos. . . . .</b>                                                          | <b>820</b> |
| C.1 Representação de Números Complexos . . . . .                                                      | 820        |
| C.2 Operações Matemáticas . . . . .                                                                   | 822        |
| Adição . . . . .                                                                                      | 823        |
| Subtração . . . . .                                                                                   | 824        |
| Multiplicação . . . . .                                                                               | 825        |
| Divisão . . . . .                                                                                     | 825        |
| <b>Referências . . . . .</b>                                                                          | <b>827</b> |
| <b>Respostas de Alguns Problemas . . . . .</b>                                                        | <b>829</b> |
| <b>Índice Analítico. . . . .</b>                                                                      | <b>841</b> |
| <b>Lista das Tabelas do livro</b>                                                                     |            |
| <b>Tabela 9.1 Representação de fasores . . . . .</b>                                                  | <b>348</b> |
| <b>Tabela 9.2 Impedâncias de elementos passivos. . . . .</b>                                          | <b>355</b> |
| <b>Tabela 15.1 Fórmulas de conversão para parâmetros de quadripolos . . . . .</b>                     | <b>662</b> |
| <b>Tabela 16.1 Tabela resumida de pares de transformadas de Laplace. . . . .</b>                      | <b>687</b> |
| <b>Tabela 16.2 Algumas propriedades úteis da transformada de Laplace . . . . .</b>                    | <b>692</b> |
| <b>Tabela 18.1 Séries de Fourier para algumas formas de onda comuns . . . . .</b>                     | <b>779</b> |
| <b>Tabela 18.2 Pares de transformadas de Fourier . . . . .</b>                                        | <b>790</b> |
| <b>Tabela 18.3 Propriedades da transformada de Fourier . . . . .</b>                                  | <b>792</b> |

# Prefácio

## Perspectiva

Este livro foi especificamente elaborado para cursos introdutórios sobre análise de circuitos lineares. O livro pode servir como texto principal tanto para estudantes de engenharia elétrica como em cursos introdutórios para não-eletricistas.

Durante a preparação deste livro, muito esforço foi despendido para apresentar o material da forma mais simples possível. O método de exposição foi concebido com o objetivo de (1) auxiliar o professor a apresentar o assunto de forma bem clara e (2) ajudar o aluno a entender os conceitos e técnicas de maneira a dominá-las e usá-las. De fato, houve grande empenho em apresentar o material de tal maneira que os alunos pudessem, com o auxílio de suplementos, aprender sem necessitar da constante presença do professor. Com esse objetivo em vista, aplicações práticas foram incluídas para demonstrar o uso da teoria.

## Pré-requisitos

O livro presume que o leitor tem conhecimentos gerais de cálculo diferencial e integral, especialmente das técnicas envolvidas na resolução de equações diferenciais com coeficientes constantes. É também desejável que o leitor tenha algum conhecimento sobre matrizes e programação de computadores.

## Filosofia

**Pedagogia.** A base filosófica empregada no desenvolvimento desta obra pode ser apresentada da seguinte maneira: “Para se *aprender* análise de circuitos, deve-se *fazer* análise de circuitos”. Portanto, o livro contém 382 exemplos que ilustram todos os aspectos de cada técnica e um total de 1.366 problemas que permitem ao leitor verificar a sua compreensão dos conceitos e princípios. Houve o cuidado de manter a “matemática” o mais simples possível de modo a não esconder os conceitos e princípios no fundo de um labirinto de cálculos e números. Além disso, quando apropriado, os mesmos problemas foram resolvidos de várias maneiras para facilitar o entendimento e a comparação das diversas técnicas e de como elas se relacionam. Acredita-se que dessa forma o presente livro será de grande ajuda tanto para o professor quanto para o aluno.

**Ilustrações.** Uma breve folheada no livro revelará que foi feito intenso uso de ilustrações. O objetivo disso é esclarecer todos os detalhes do procedimento utilizado na análise de circuitos.

**PSPICE.** O programa PSPICE, desenvolvido para a análise de circuitos assistida por computador, é empregado no decorrer do livro. Ele é usado nos capítulos 4, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14 e 18 para determinar correntes e tensões em vários circuitos, traçar respostas no tempo e em frequência e calcular séries de Fourier. Esta é uma característica extremamente importante deste livro, uma vez que SPICE é extensivamente usado na indústria para analisar projetos de circuitos antes de serem enviados à produção.

Esta edição emprega PSPICE em vez de SPICE 2G.5 pelas seguintes razões: PSPICE está disponível para IBM PC e compatíveis, Macintoshes e vários minicomputadores e estações de trabalho; inclui uma interface *user-friendly* para o uso do *mouse*; fornece uma saída gráfica excelente da tela para a impressora; aceita uma variedade de impressoras *laser* e de linha e tem características adicionais que permitem uma análise mais flexível e abrangente.

Os critérios empregados pela Accreditation Board for Engineering and Technology – ABET (Comissão de Credenciamento em Tecnologia e Engenharia) afirmou categoricamente que “estudantes devem demonstrar conhecimento da aplicação e uso de técnicas de computação digital para especificar problemas de engenharia”. O uso de PSPICE nesse contexto, além de ajudar a satisfazer tal padrão, fornece a base para o seu uso em eletrônica.

**Flexibilidade.** O assunto é apresentado de maneira a permitir o uso do texto de forma flexível. Por exemplo, pode-se saltar determinadas seções, ou até mesmo capítulos inteiros, e mesmo assim conseguir uma exposição coesa do assunto estudado.

**Resumo.** Ao final de cada capítulo, os conceitos mais importantes são resumidos de maneira concisa. Tais resumos servem como lembretes ao leitor de todos os princípios significativos e técnicas contidas no capítulo.

**Conjunto de problemas.** O livro possui dois conjuntos de problemas. Primeiro, existem 289 exercícios de fixação. Tais problemas e suas respostas objetivam reforçar a compreensão do leitor da seção precedente. Segundo, existem 1.077 problemas ao final dos capítulos. Esse último conjunto de problemas foi organizado de forma a acompanhar a apresentação do assunto. De forma geral, tais problemas se encontram organizados em grau crescente de dificuldade e foram cuidadosamente selecionados para verificar o entendimento do leitor sobre todo o assunto.

## Agradecimentos

Estou em débito com um grande número de colegas e amigos que ajudaram na preparação das edições anteriores deste livro. Eles ofereceram muito apoio e quero enfatizar meu apreço pela sua ajuda. São eles: os professores E. R. Graf, L. L. Grigsby, C. A. Gross, M. A. Honnell, R. C. Jaeger, J. L. Lowry, M. S. Morse, e C. L. Rogers; os alunos Dr. Travis Blalock, Kevin Driscoll, Keith Jones, George Lindsey, David Mack, John Parr, Monty Rickles, James Trivitayakhun, Susan Williamson e Jacinda Woodward; e minha assistente administrativa Betty Kelley.

Gostaria também de expressar meu apreço aos seguintes professores que fizeram inúmeras sugestões para melhorar o livro: David Anderson, da University of Iowa; Richard L. Baker, da University of California, Los Angeles; James L. Dodd, professor emérito da Mississippi State University; Earl D. Eyman, da University of Iowa; Arvin Grabel, da Northeastern University; Paul Gray, da University of Wisconsin, Platteville; John Hadjilogiou, do Florida Institute of Technology; Ralph Kinney, da Louisiana State University; K. S. P. Kumar, da University of Minnesota; James Luster, do Snow College; Ian McCausland, da University of Toronto; Arthur C. Moeller, da Marquette University; M. Paul Murray, da Mississippi State University; Burks Oakley, II, da University of Illinois at Champaign-Urbana; John O'Malley, da University of Florida; William R. Parkhurst, da The Wichita State University; James Rowland, da University of Kansas; Robert N. Sackett, do Normandale Community College; Richard Sanford, da Clarkson University; Ronald Schultz, da Cleveland State University; Janusz Starzyk, da Ohio University e Saad Tabet, da Florida State University.

Sou muito grato a Paula Revels e Les Simonton pela ajuda e apoio que me deram no preparo desta edição.

Finalmente, desejo expressar minha mais profunda gratidão à minha mulher, Edie, sem cuja ajuda e apoio a conclusão deste livro não teria sido possível.

J. D. I.

# Conceitos Básicos

É importante notar que o título deste livro não implica que ele será útil somente a engenheiros eletricitistas. Melhor, temos descoberto que todos os tipos de engenheiros necessitam se conscientizar das implicações da análise de circuitos porque eles virão a ter contato com circuitos de várias formas: como parte integral de sistemas, na instrumentação e assim por diante. E mais, muitos dos atuais problemas são tão complexos que são manipulados por equipes de especialistas com embasamento em engenharia, matemática, física e química. Em muitas situações, os componentes elétricos literalmente permeiam todo um sistema através de implicações de potência, controle, instrumentação, monitoramento e similares. Portanto, é importante que o maior número possível de pessoal técnico esteja pelo menos familiarizado com a análise de circuitos.

## 1.1 Sistemas de Unidades

O sistema de unidades que utilizamos é o sistema internacional de unidades, o *Système International des Unités*, normalmente referido como sistema padrão SI. Esse sistema, composto das unidades básicas metro (m), quilograma (kg), segundo (s), ampère (A), grau Kelvin (K) e candela (cd), está definido em todo texto de física moderna e portanto não será redefinido aqui. Entretanto, discutiremos as unidades em detalhes à medida que as encontrarmos em nossas análises subsequentes.

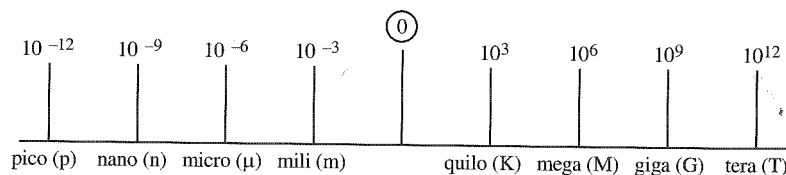
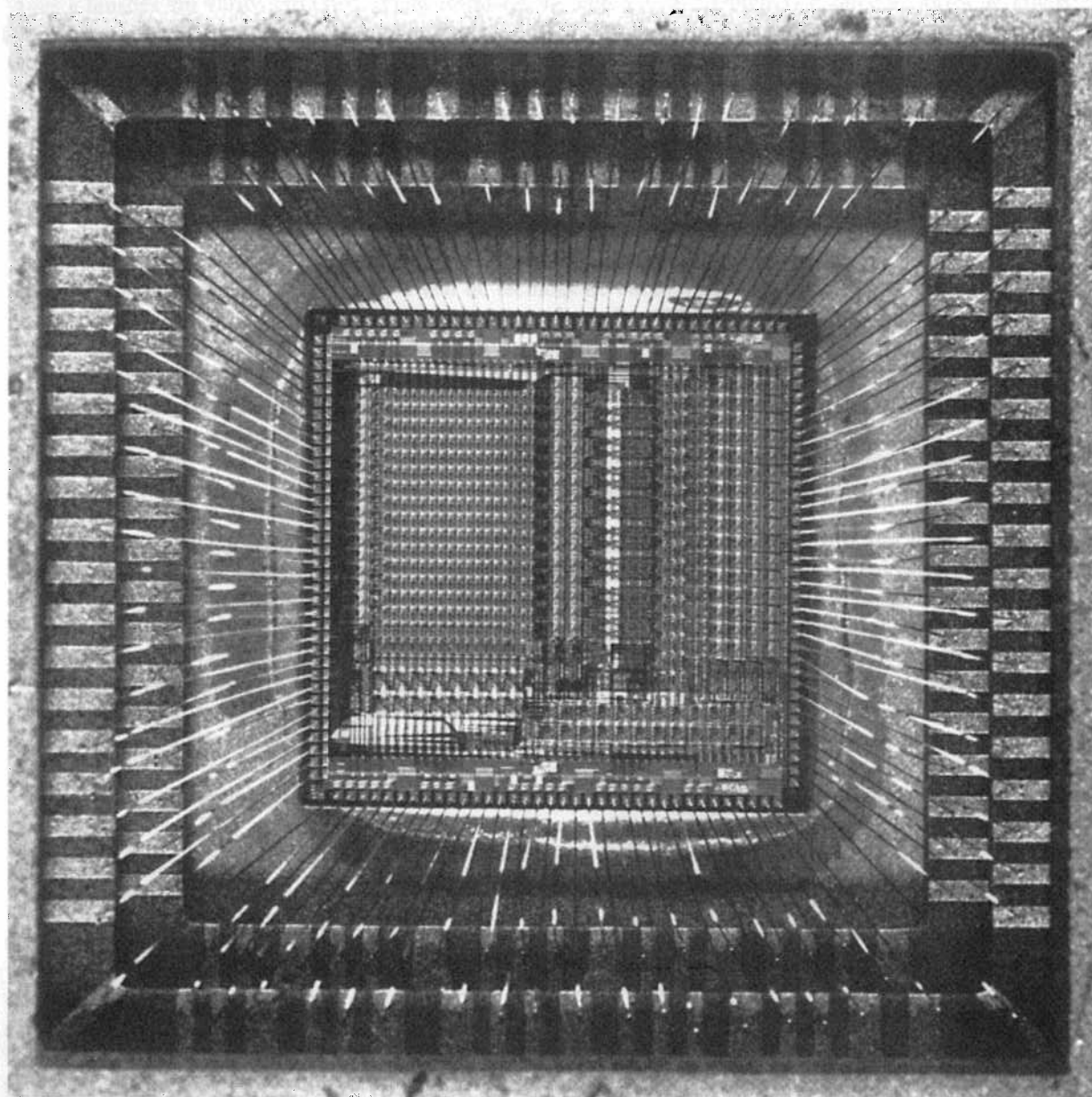


Figura 1.1 Prefixos padrão SI.

Os prefixos padronizados que são empregados no SI são mostrados na Figura 1.1. Repare no relacionamento decimal entre eles. Esses prefixos são empregados no decorrer do nosso estudo de circuitos elétricos.

Há poucos anos, um milissegundo,  $10^{-3}$  s, era considerado um período pequeno na análise de circuitos elétricos. Avanços de tecnologia, no entanto, têm nos conduzido a um estado em que já consideramos

coisas como executar cálculos em nanossegundos ou mesmo em picossegundos. Ao mesmo tempo, os circuitos têm experimentado uma fenomenal diminuição de tamanho. Por exemplo, considere o chip de circuito integrado mostrado na Figura 1.2. Tais circuitos miniaturizados são comuns em calculadoras, computadores e equipamentos eletrônicos.



**Figura 1.2** Exemplo de um chip de circuito integrado VLSI bipolar avançado com 30.000 transistores. Este chip de alta velocidade tem aproximadamente 0,25 polegadas de comprimento e usa um pacote de 144-pinos-matriz (cortesia da Honeywell, Inc.).

## 1.2 Quantidades Básicas

Antes de começarmos a análise de circuitos elétricos, devemos definir os termos básicos que empregaremos. Neste capítulo e no decorrer do livro, nossas definições e explicações serão o mais simples possível a fim de fomentar o entendimento do uso do material. Nenhuma tentativa é feita no sentido de se dar definições com-

pletas de muitas das variáveis porque tais definições não só são desnecessárias nesse nível como também confusas. Apesar de a maioria de nós ter um conceito intuitivo do que significa um circuito, iremos nos referir a um *circuito elétrico* simplesmente como uma interconexão de componentes elétricos.

É muito importante que desde o início o leitor entenda a estratégia básica que será empregada em nossa análise de circuitos elétricos. Essa estratégia está traçada na Figura 1.3, e vamos nos concentrar somente na porção do diagrama à direita da linha tracejada. Em estudos subsequentes ou estudos complementares, o leitor aprenderá como modelar recursos físicos tais como componentes eletrônicos. Nosso procedimento aqui será empregar modelos lineares para os componentes de um circuito, definir as variáveis que aparecem nas equações do circuito visando resolvê-las e, finalmente, interpretar a solução a fim de determinar o que está ocorrendo com o circuito físico. As variáveis podem ser variáveis no tempo ou constantes, dependendo da natureza dos parâmetros físicos que elas representam.

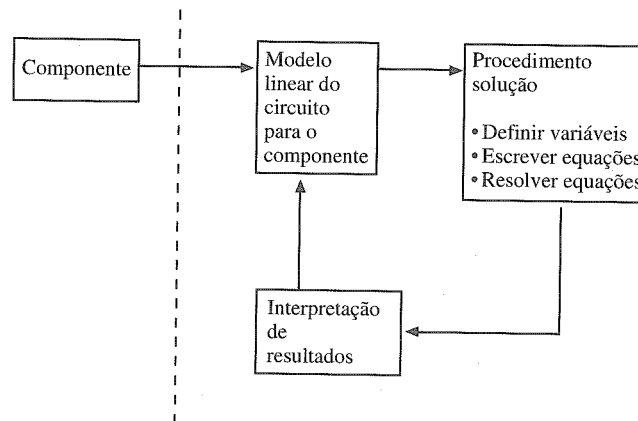


Figura 1.3 Estratégia básica empregada na análise de circuitos.

A quantidade mais elementar na análise de circuitos elétricos é a *carga* elétrica. Sabemos da física básica que a natureza da carga é baseada em conceitos de teoria atômica. Vemos o átomo como um bloco de construção fundamental de matéria que é composto de um núcleo carregado positivamente cercado por elétrons carregados negativamente. No sistema métrico, a carga é medida em coulombs (C). A carga em um elétron é negativa e igual em magnitude a  $1,602 \times 10^{-19}$  C. No entanto, nosso interesse em um elétron está centrado em seu movimento, desde que carga em movimento resulta em transferência de energia. Tais situações em que o movimento está confinado a um caminho fechado são de particular interesse para nós.

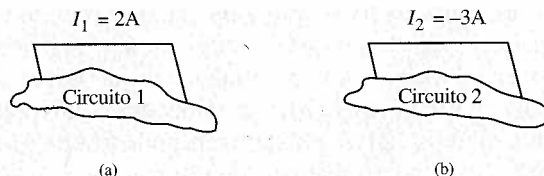
Um circuito elétrico é essencialmente um ducto que facilita a transferência da carga de um ponto a outro. A taxa de tempo de mudança da carga constitui uma *corrente* elétrica. Matematicamente falando, o relacionamento é expresso como

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \text{ou} \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(x) dx \quad (1.1)$$

onde  $i$  e  $q$  representam corrente e carga, respectivamente (as letras minúsculas representam dependência no tempo e as maiúsculas são reservadas para quantidades constantes). A unidade básica de corrente é ampère (A) e 1 ampère corresponde a 1 coulomb por segundo.

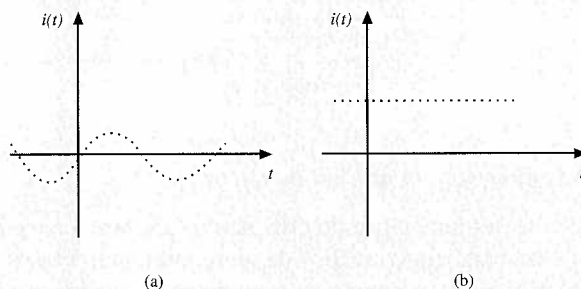
Apesar de sabermos que o fluxo de corrente em condutores metálicos é resultante da movimentação de elétrons, o fluxo convencional de corrente, que é universalmente adotado, representa a movimentação de cargas positivas. É importante que o leitor pense em fluxo de corrente como o movimento de cargas positivas independentemente do fenômeno físico que realmente acontece. A nomenclatura que será utilizada para representar fluxo de corrente é mostrada na Figura 1.4. A variável representando a corrente no fio (condutor) da Figura 1.4a foi definida como  $I_1$ , fluindo no condutor da esquerda para a direita na figura. Um conjunto de equações foi escrito para o circuito e o valor solução de 2 A foi obtido; isto é,  $I_1 = 2$  A. Isto significa que a corrente física no condutor está fluindo da esquerda para a direita, na direção de nossa variável, e é de 2 A.  $I_1 = 2$  A na Figura 1.4a indica que, em qualquer ponto do condutor mostrado, 2 C de carga passa da esquerda para a direita a cada segundo. O mesmo procedimento foi seguido para o condutor mostrado na Figura 1.4b, e a variável  $I_2$  foi definida da mesma maneira. Um conjunto de equações foi escrito, e o valor solução de -3 A foi obtido. Uma interpretação desse resultado é que a corrente física no condutor está

da direita para a esquerda, oposta à nossa direção de referência para  $I_1$ ; seu valor é de 3 A.  $I_2 = -3$  A na Figura 1.4b indica que, em qualquer ponto no condutor mostrado, 3 C de carga passa da direita para a esquerda a cada segundo. Portanto, é importante especificar não somente a magnitude da variável representando corrente, mas também sua direção. Depois que uma solução é encontrada para a variável corrente, a corrente física real é conhecida.



**Figura 1.4** Fluxo de corrente convencional: (a) fluxo positivo de corrente; (b) fluxo negativo de corrente.

Existem dois tipos de corrente que freqüentemente encontramos na nossa vida diária, corrente alternada (ac – *alternating current*) e corrente contínua (dc – *direct current*), as quais são mostradas em função do tempo na Figura 1.5. *Corrente alternada* é a corrente comumente encontrada em toda casa, utilizada para fazer funcionar uma geladeira, um fogão, uma máquina de lavar e outros aparelhos. Baterias usadas em automóveis e *flashes* fotográficos são uma fonte de *corrente contínua*. A esses dois tipos de corrente, que têm ampla variedade de uso, somam-se muitos outros tipos que podemos gerar. Examinaremos alguns desses outros tipos mais adiante.



**Figura 1.5** Dois tipos comuns de corrente: (a) corrente alternada (ac); (b) corrente contínua (dc).

Mencionamos que cargas em movimento produzem uma transferência de energia. Definimos agora a *tensão* (também chamada de *força eletromotriz* ou *potencial*) entre dois pontos em um circuito como a diferença do nível de energia de uma unidade de carga positiva localizada em tais pontos. Trabalho ou energia,  $w(t)$  ou  $W$ , é medido em joules (J); 1 joule corresponde a 1 newton metro ( $N \cdot m$ ). Portanto a tensão [ $v(t)$  ou  $V$ ] é medida em volts (V) e 1 volt corresponde a 1 joule por coulomb; isto é, 1 volt = 1 joule por coulomb = 1 newton metro por coulomb.

Se uma unidade de carga positiva é movimentada entre dois pontos, a energia necessária para movê-la é a tensão, que é a diferença entre o nível de energia entre dois pontos. É extremamente importante que as variáveis que são utilizadas para representar tensão entre dois pontos estejam definidas de maneira tal que a solução nos permita interpretar qual é o ponto de maior potencial em relação ao outro.

Na Figura 1.6a, a variável que representa a tensão entre os pontos A e B foi definida como  $V_1$ , e assumiu-se que o ponto A está em um potencial mais alto que o ponto B, como indicado pelos sinais + e – associados com a variável e definidos na figura. Os sinais + e – definem a direção de referência para  $V_1$ . As equações para o circuito foram escritas e o valor solução de 2 V foi obtido; isto é,  $V_1 = 2$  V, como mostrado na figura. A interpretação física disso é que a diferença em potencial dos pontos A e B é 2 V e o ponto A está em um potencial mais alto. Se a unidade de carga positiva é movimentada do ponto A através do circuito para o ponto B, ela vai liberar energia para o circuito e terá 2 J a menos de energia quando atingir o ponto B. Se a unidade de carga positiva é movimentada do ponto B para o ponto A, energia extra deverá ser acrescentada à carga pelo circuito, e daí a carga acabará com 2 J a mais de energia no ponto A do que quando ela saiu do ponto B.

O mesmo procedimento foi seguido para o circuito da Figura 1.6b, e a variável  $V_2$  foi definida da mesma maneira. O conjunto de equações foi escrito, e o valor solução de –5 V foi encontrado; isto é,  $V_2 = -5$  V. A interpretação física de  $V_2 = -5$  V é que o potencial entre os pontos A e B é 5 V e o ponto B está em um



potencial mais alto. Se o circuito na Figura 1.6b fosse recalculado com a variável para a tensão definida como mostrada na Figura 1.6c, a solução teria sido  $V_2 = 5\text{ V}$ . A interpretação física disso é que a diferença de potencial dos pontos A e B é 5 V, com o ponto B em um potencial mais alto.

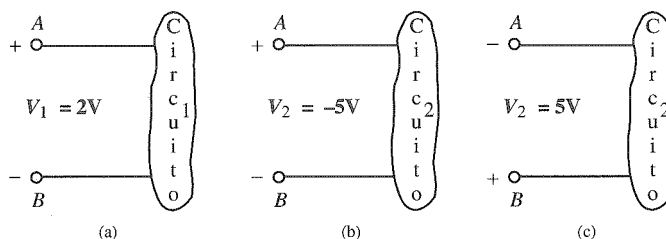


Figura 1.6 Representações de tensão.

Repare que é importante definir a variável com a direção de referência para que a resposta possa ser interpretada para revelar a condição física do circuito. Descobriremos que em muitos casos não é possível definir a variável para uma resposta positiva e também acharemos que não é necessário fazê-lo. O valor negativo para determinada variável dá exatamente a mesma informação que um valor positivo para uma nova variável que é a mesma que a anterior, exceto que ela tem uma direção de referência oposta. Daí, quando definimos corrente ou tensão, é absolutamente necessário que especifiquemos tanto a magnitude quanto a direção. Portanto, não é suficiente dizer que a tensão entre dois pontos é 10 V ou a corrente em um condutor é 2 A, pois nesses casos somente a magnitude, e não a direção para as variáveis, foi indicada.

Apresentamos até este momento as convenções que utilizamos em nossas discussões de corrente e tensão. Energia é ainda um outro importante termo de significação básica. A Figura 1.7 ilustra a relação tensão-corrente para a transferência de energia. Nessa figura, o bloco representando um componente do circuito foi extraído de um circuito maior para averiguação. Na Figura 1.7a, a energia está sendo suprida *para* o componente pelo que quer que seja que está ligado aos terminais. Note que 2 A, isto é, 2 C, de carga está se movendo do ponto A para o ponto B através do componente a cada segundo. Cada coulomb perde 3 J de energia quando ele passa através do componente do ponto A para o ponto B. Portanto, o componente está absorvendo 6 J de energia por segundo. Note que quando o componente está *absorvendo* energia, uma corrente positiva entra no terminal positivo. Na Figura 1.7b, a energia está sendo fornecida *pelo* componente para o que quer que esteja conectado aos terminais A-B. Nesse caso, repare que quando o componente está *fornecendo* energia, uma corrente positiva entra no terminal negativo e o deixa via terminal positivo. Nessa convenção, uma corrente negativa em uma direção é equivalente a uma corrente positiva na direção oposta, e vice-versa. De forma semelhante, a tensão negativa em uma direção é equivalente a uma tensão positiva na direção oposta.

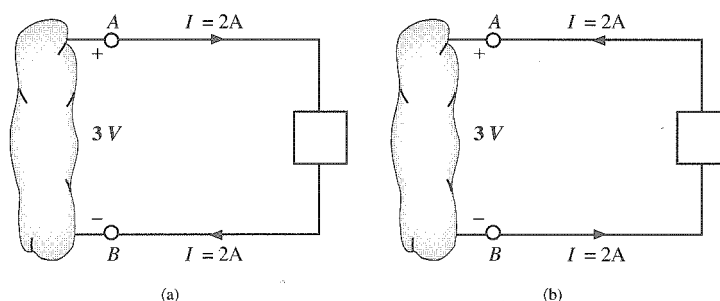


Figura 1.7 Relação tensão-corrente para a energia consumida (a) e energia fornecida (b).

### Exemplo 1.1

Suponhamos que o seu carro não pega. Para determinar se o problema é com a bateria, você acende os faróis e descobre que as luzes estão fracas, indicando uma bateria quase descarregada. Você toma emprestado o carro de um amigo e um conjunto de cabos. Porém, como você vai conectar a bateria do carro dele à sua? O que você quer que a bateria faça?

Essencialmente, a bateria do carro dele deve fornecer energia à do seu carro e, portanto, ela deveria estar conectada da maneira mostrada na Figura 1.8. Note que a corrente positiva deixa o terminal positivo da bateria carregada (fornecendo energia) e entra no terminal positivo da bateria descarregada (absorvendo energia). Note que as mesmas conexões são usadas quando se carrega uma bateria.



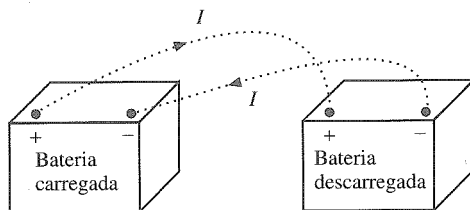


Figura 1.8 Diagrama para o Exemplo 1.1.

Em aplicações práticas, existem mais considerações além de simplesmente as relações elétricas (por exemplo, segurança). Tal é o caso de pegar o carro de segunda marcha. Baterias de automóveis produzem gases que podem inflamar-se acidentalmente, causando danos corporais. Seja prudente — siga as instruções do manual do carro. ■

Já definimos tensão em joules por coulomb como a energia necessária para mover uma carga positiva de 1 C através de um componente. Se assumirmos que estamos lidando com uma quantidade diferencial de carga e energia, então

$$v = \frac{dw}{dq} \quad (1.2)$$

Multiplicando-se esse valor pela corrente no componente, tem-se

$$vi = \frac{dw}{dq} \left( \frac{dq}{dt} \right) = \frac{dw}{dt} = p \quad (1.3)$$

que é a taxa de variação de energia no tempo ou a potência medida em joules por segundo, ou ainda, watts (W). Então, em geral,  $v$  e  $i$  são função do tempo,  $p$  é também uma quantidade variante no tempo. Portanto, a mudança em energia do tempo  $t_1$  para o tempo  $t_2$  pode ser encontrada integrando-se a Equação 1.3; isto é,

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = \int_{t_1}^{t_2} vi \, dt \quad (1.4)$$

Vamos agora resumir nossa convenção de sinal para potência. Para determinar o sinal de qualquer uma das quantidades envolvidas, as variáveis para a corrente e tensão devem ser arrumadas como mostrado na Figura 1.9. A variável  $v(t)$  é definida como a tensão sobre o elemento, sendo que a referência positiva de tal tensão corresponde ao terminal do elemento pelo qual a corrente  $i(t)$  entra. Essa convenção é chamada de *convenção passiva de sinal* e será referida dessa maneira no restante deste livro. O produto de  $v$  e  $i$ , com seus respectivos sinais, determinarão a magnitude e sinal da potência. Se o sinal da potência é positivo, potência está sendo absorvida pelo componente; se o sinal é negativo, potência está sendo fornecida pelo componente.

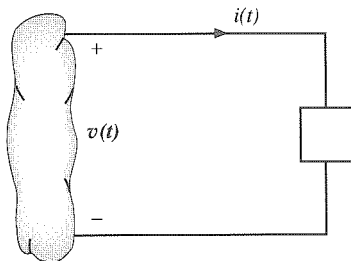


Figura 1.9 Convenção de sinal para potência.

### Exemplo 1.2

Desejamos determinar a potência absorvida, ou fornecida, pelos componentes na Figura 1.7.

Na Figura 1.7a,  $P = VI = (3 \text{ V})(2 \text{ A}) = 6 \text{ W}$  é absorvido pelo componente. Na Figura 1.7b,  $P = VI = -(3 \text{ V})(2 \text{ A}) = -6 \text{ W}$  é absorvido pelo componente, ou  $+6 \text{ W}$  é fornecido pelo componente. ■

**Exemplo 1.3**

Dados os dois diagramas mostrados na Figura 1.10, determine se o componente está absorvendo ou fornecendo potência e quanto.

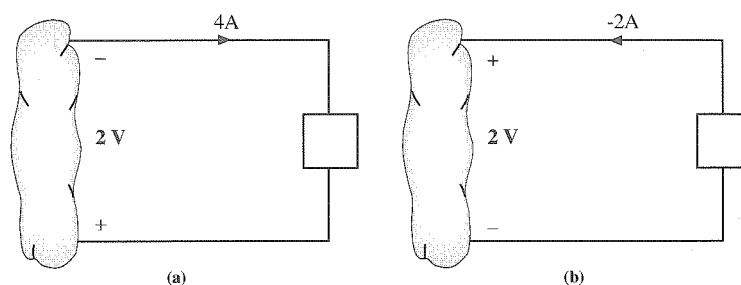


Figura 1.10 Componentes para o Exemplo 1.3.

Na Figura 1.10a, a potência é  $P = (2 \text{ V})(-4 \text{ A}) = -8 \text{ W}$ . Portanto, o componente está fornecendo potência. Na Figura 1.10b, a potência é  $P = (2 \text{ V})(2 \text{ A}) = 4 \text{ W}$ . Portanto, o componente está absorvendo potência.

**Exercício**

E1.1 Determine a quantidade de potência absorvida ou fornecida pelos componentes da Figura E1.1.

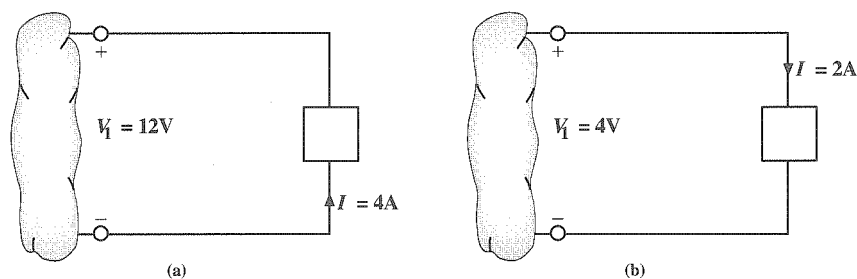


Figura E1.1

Resp.: (a)  $P = -48 \text{ W}$ ; (b)  $P = 8 \text{ W}$ .

**Exemplo 1.4**

Desejamos determinar a tensão desconhecida ou corrente na Figura 1.11.

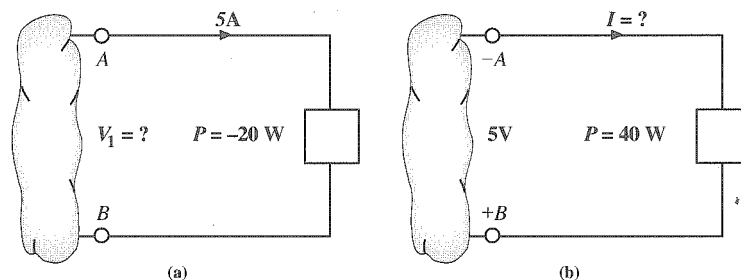


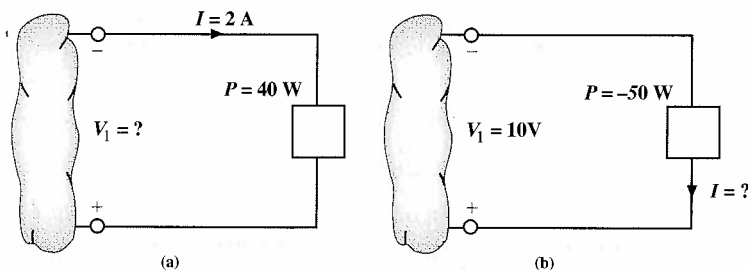
Figura 1.11 Componentes para o Exemplo 1.4.

Na Figura 1.11a, a potência de  $-20 \text{ W}$  indica que o componente está fornecendo potência. Portanto, a corrente entra no terminal negativo (terminal A), e a partir da Equação (1.3), temos que a tensão é  $4 \text{ V}$ .

Na Figura 1.11b, uma potência de  $+40 \text{ W}$  indica que o componente está absorvendo potência e, portanto, a corrente deveria entrar no terminal positivo B. A corrente tem um valor de  $-8 \text{ A}$ , como mostrado na figura.

**Exercício**

**E1.2** Determine as variáveis desconhecidas da Figura E1.2.



**Figura E1.2**

**Resp.:** (a)  $V_1 = -20$  V; (b)  $I = -5$  A.

Finalmente, é importante notar que essas redes elétricas satisfazem o princípio de conservação de energia. Para nossos presentes propósitos, isto significa que a potência que a rede está suprindo é exatamente igual à potência absorvida.

### 1.3 Componentes de Circuitos

É importante perceber que em nossas discussões estaremos preocupados com o comportamento de um componente do circuito e que descrevemos tal comportamento como um modelo matemático. Quando nos referirmos a um componente específico do circuito, tem-se em mente o *modelo matemático* que descreve o comportamento de tal componente.

Até aqui temos definido tensão, corrente e potência. No restante deste capítulo, definiremos corrente dependente e independente e fontes de tensão. Apesar de assumirmos componentes ideais, tentaremos indicar as dificuldades de tais suposições à medida que prosseguirmos com a discussão.

Em geral, os componentes que definiremos são completamente caracterizados pela corrente que passa pelos seus terminais e/ou pela tensão sobre o componente. Esses componentes, que empregaremos em circuitos elétricos, serão amplamente classificados como sendo ativos ou passivos. A distinção entre essas duas classes depende essencialmente de uma coisa — se eles fornecem ou absorvem energia. Como os próprios nomes dizem, um componente *ativo* é capaz de gerar energia e um *passivo* não pode gerar energia.

Entretanto, mostraremos mais tarde que alguns componentes passivos são capazes de armazenar energia. Componentes ativos típicos são baterias, geradores e modelos de transistores. Os três componentes passivos comuns são resistores, capacitores e indutores.

No Capítulo 2 investigaremos componentes passivos ao discutir o resistor em detalhe. Entretanto, antes de prosseguirmos com tal elemento, primeiramente apresentaremos alguns componentes ativos importantes:

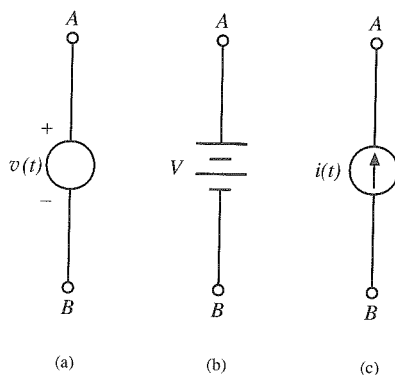
1. Fonte de tensão independente.
2. Fonte de corrente independente.
3. Duas fontes de tensão dependentes.
4. Duas fontes de corrente dependentes.

#### Fontes Independentes

Uma *fonte de tensão independente* é um componente de dois terminais que mantém uma tensão específica entre seus terminais independentemente da corrente através dele. O símbolo geral para uma fonte independente, um círculo, é mostrado na Figura 1.12a. Como indicado na figura, o terminal A é  $v(t)$  volts positivo em relação ao terminal B. A palavra “positivo” pode ser um tanto quanto dúbia. Nesse caso, seu significado é que  $v(t)$  é positiva com referência ao terminal A, e a tensão física sobre o componente deve ser entendida a partir do valor numérico de  $v(t)$ . Isto é, se  $v(t)$  em  $t = 2$  s é  $-10$  V, o ponto B está em um potencial mais alto que o ponto A quando  $t = 2$  s. O símbolo  $v(t)$  é normalmente empregado em tensões variantes por tempo. No entanto, se a tensão é não-variável no tempo (isto é, constante), o símbolo mostrado na Figura 1.12b é

algumas vezes utilizado. Esse símbolo, usado para representar uma bateria, ilustra que o terminal  $A$  é  $V$  volts positivo em relação ao terminal  $B$ , onde a linha comprida no topo e a curta embaixo indicam os terminais positivo e negativo, respectivamente, e ainda a polaridade do componente.

A *fonte de corrente independente*, ao contrário da fonte de tensão independente, é um componente de dois terminais que mantém uma corrente específica independentemente da tensão sobre seus terminais. O símbolo geral para uma fonte de corrente independente é mostrado na Figura 1.12c, onde  $i(t)$  é a corrente específica e a seta indica a direção positiva do fluxo de corrente.



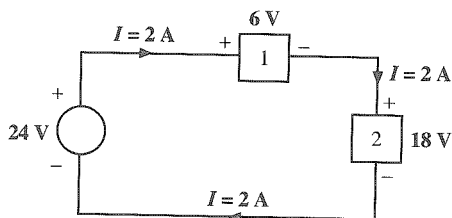
**Figura 1.12** Símbolos para (a) fonte de tensão independente; (b) fonte de tensão constante; (c) fonte de corrente independente.

É importante que façamos uma pausa aqui para inserirmos um comentário a respeito de uma dificuldade dos modelos. Em geral, modelos matemáticos se aproximam dos sistemas físicos reais somente sob um conjunto específico de condições. Para ilustrar tal ponto, consideremos o modelo para a fonte de tensão da Figura 1.12a. Assumimos que a fonte de tensão fornece  $v$  volts independentemente do que está conectado aos seus terminais. Teoricamente, poderíamos ajustar o circuito externo para que uma quantidade infinita de corrente fluísse e, portanto, a fonte de tensão fornecesse uma infinita quantidade de potência. Isto é, de maneira óbvia, fisicamente impossível. Um argumento similar poderia ser feito para a fonte de corrente independente. Daí o leitor deve se precaver, lembrando que modelos possuem limitações e são representações válidas de sistemas físicos somente sob certas circunstâncias.

### Exemplo 1.5

Determine a potência absorvida ou fornecida pelos componentes na rede da Figura 1.13.

A corrente flui do terminal positivo de uma fonte de 24 V e, portanto, esse componente está fornecendo  $(2)(24) = 48$  W de potência. A corrente está dentro dos terminais positivos dos componentes 1 e 2 e, portanto, os componentes 1 e 2 estão absorvendo  $(2)(6) = 12$  W e  $(2)(18) = 36$  W, respectivamente. Note que a potência fornecida é igual à potência absorvida.



**Figura 1.13** Rede para o Exemplo 1.5.

### Exercício

**E1.3** Calcule a potência que é consumida ou fornecida pelos três componentes da Figura E1.3.

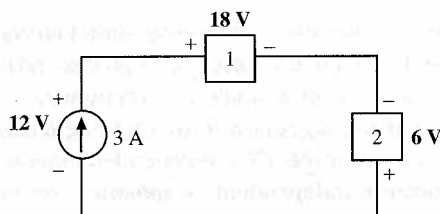
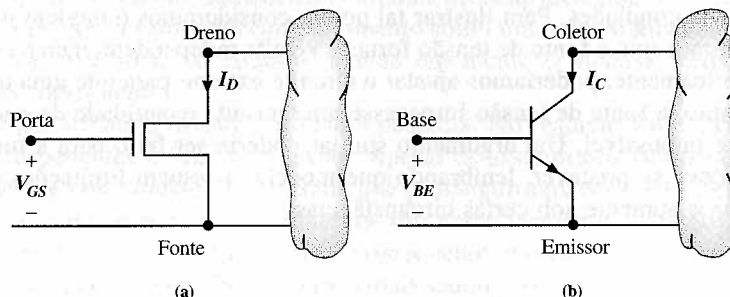


Figura E1.3

**Resp.:** A fonte de corrente fornece 36 W, o componente 1 consome 54 W e o componente 2 fornece 18 W.

## Fontes Dependentes

Diferindo das fontes independentes, que produzem uma tensão ou corrente em particular completamente independente do que está acontecendo no resto do circuito, as fontes dependentes geram uma tensão ou corrente que é determinada pela tensão ou corrente em uma localidade específica do circuito. Essas fontes são importantes porque são uma parte integral dos modelos matemáticos usados para descrever o comportamento de muitos componentes do circuito eletrônico. Consideremos, por exemplo, os dois dispositivos eletrônicos freqüentemente usados, mostrados na Figura 1.14. O componente da Figura 1.14a é um transistor de efeito de canal-N feito de semicondutor metal-óxido (MOSFET – *N-channel enhancement-mode metal-oxide-semiconductor field-effect transistor*). O dispositivo na Figura 1.14b é um transistor bipolar *npn*. A corrente de escoamento  $I_D$  no MOSFET é dependente da tensão fonte-porta  $V_{GS}$ . Similarmente, o coletor de corrente  $I_C$  no dispositivo bipolar é controlado pela tensão base-emissor  $V_{BE}$ .



**Figura 1.14** Dois dispositivos eletrônicos freqüentemente usados.

Contrastando com o círculo utilizado para representar fontes independentes, um losango é usado para representar uma fonte dependente ou controlada. A Figura 1.15 ilustra os quatro tipos de fontes dependentes. Os terminais de entrada à esquerda representam a tensão ou corrente que controla a fonte dependente, e os terminais de saída à direita representam a corrente ou tensão de saída da fonte controlada. Note que na Figura 1.15a e d, as quantidades  $\mu$  e  $\beta$  são constantes adimensionais porque estamos transformando tensão para tensão e corrente para corrente. Este não é o caso da Figura 1.15b e c, e, portanto, quando empregarmos tais componentes logo adiante, devemos descrever as unidades dos fatores  $r$  e  $g$ .

## Exemplo 1.6

Dadas as duas redes mostradas na Figura 1.16, queremos determinar as saídas.

Na Figura 1.16a, a tensão de saída é  $V_o = \mu V_S$  ou  $V_o = 20V_S = (20)(2\text{ V}) = 40\text{ V}$ . Note que a tensão de saída foi amplificada de 2 V nos terminais de entrada para 40 V nos terminais de saída; isto é, o circuito é um amplificador com um fator de amplificação de 20.

Na Figura 1.16b, a corrente de saída é  $I_o = \beta I_S = (50)(1\text{ mA}) = 50\text{ mA}$ ; isto é, o circuito tem um ganho de corrente de 50, significando que a corrente de saída é 50 vezes maior que a corrente de entrada.

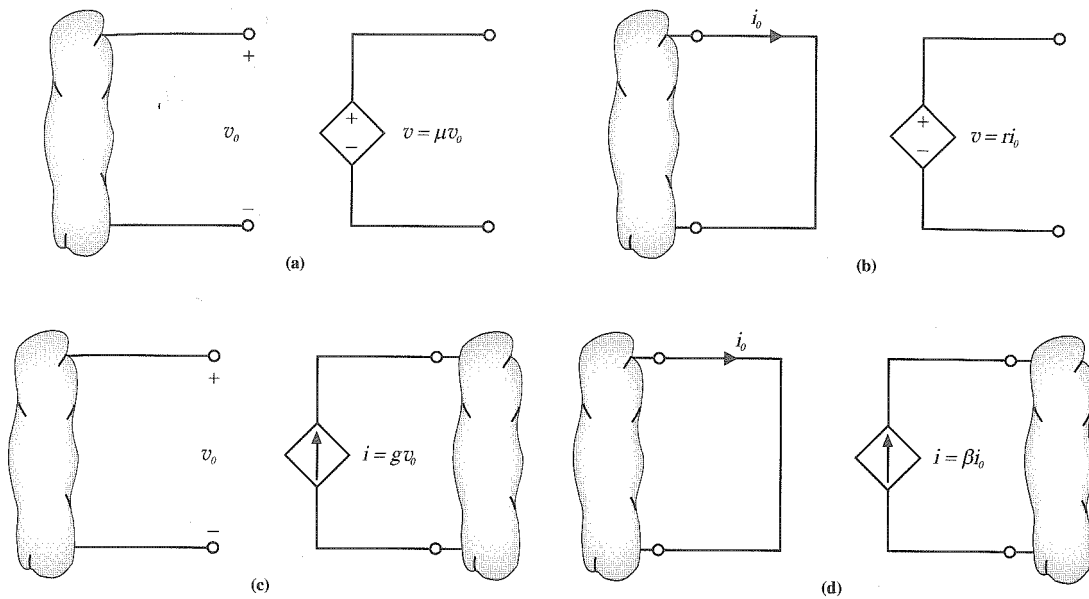


Figura 1.15 Quatro tipos diferentes de fontes dependentes.

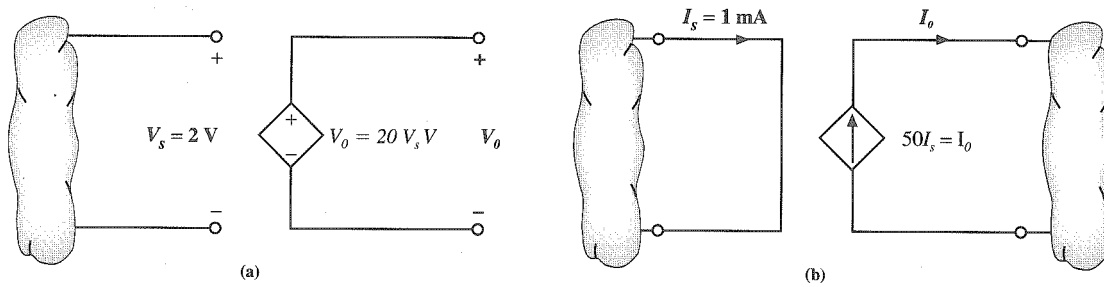


Figura 1.16 Circuitos para o Exemplo 1.6.

### Exercício

**E1.4** Determine a potência fornecida pelas fontes dependentes da Figura E1.14.

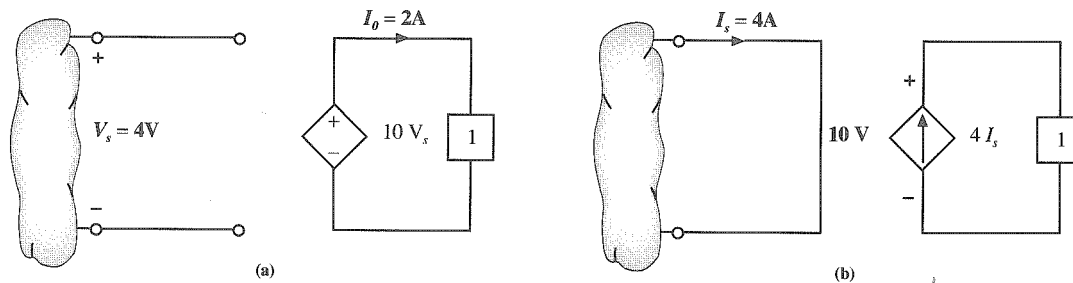


Figura E1.4

**Resp.:** (a) Potência fornecida = 80 W; (b) potência fornecida = 160 W.

### Exemplo 1.7

Calculemos a potência que é absorvida ou fornecida pelos componentes na rede da Figura 1.17.

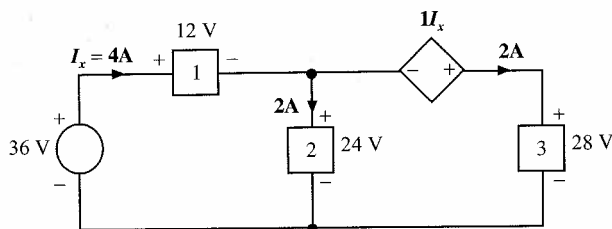


Figura 1.17 Circuito para o Exemplo 1.7.

Usando-se a convenção de sinal para potência ilustrada na Figura 1.9, encontramos o seguinte:

$$P_{36V} = (36)(-4) = -144 \text{ W}$$

$$P_1 = (12)(4) = 48 \text{ W}$$

$$P_2 = (24)(2) = 48 \text{ W}$$

$$P_{DS} = (1I_x)(-2) = (4)(-2) = -8 \text{ W}$$

$$P_3 = (28)(2) = 56 \text{ W}$$

Repare que a fonte de 36 V e a fonte dependente estão fornecendo potência para o circuito e os componentes restantes estão consumindo potência. Além do mais, a energia está sendo conservada, uma vez que a potência fornecida ao circuito é idêntica à potência consumida pelo circuito. ■

### Exercício

E1.5 Calcule a potência que é consumida ou fornecida pelos componentes do circuito na rede da Figura E1.5.

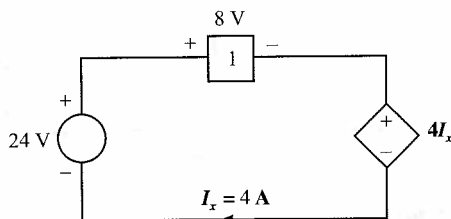


Figura E1.5

Resp.:  $P_{24V} = 96 \text{ W}$  fornecidos,  $P_1 = 32 \text{ W}$  consumidos,  $P_{4I_x} = 64 \text{ W}$  consumidos.

Concluindo este capítulo, um certo número de comentários se faz necessário. O leitor deve entender profundamente a nossa visão como mostrada na Figura 1.3 porque nos capítulos que se seguem estaremos simplesmente definindo e nos referindo a tensão e corrente em partes específicas dentro de um circuito. Antes de escrever qualquer equação, os leitores devem analisar cuidadosamente que tipo de resposta eles esperam obter. Por exemplo, se todas as fontes são constantes, todas as tensões e correntes no circuito serão constantes e conseqüentemente, letras maiúsculas deverão ser usadas para todas as variáveis representando as tensões e correntes. É também de ajuda para os leitores pensar de antemão a respeito de como as variáveis estão relacionadas entre si e defini-las de modo a se ter um número de sinais em uso. Apesar de não ser importante para a solução final, como indicado anteriormente, isso força os leitores a pensar sobre o problema do começo ao fim antes de iniciar a sua resolução, de tal modo que a solução não seja uma surpresa.

## 1.4 Resumo

A estratégia básica para uma análise de circuitos elétricos foi introduzida. Essa estratégia envolve o uso de modelos lineares para representar os vários componentes de um circuito, a definição de variáveis usadas nas equações de um circuito e a interpretação de valores solução das variáveis para determinar os valores reais das quantidades representadas na rede física.

O sistema de unidades que foi adotado é o sistema padrão SI. Carga, corrente, tensão, potência e energia foram definidos e os inter-relacionamentos entre tais quantidades foram examinados. Fontes de corrente e tensão, dependentes e independentes, foram apresentadas e a convenção passiva de sinal que será usada no decorrer do texto foi estabelecida.

Deve ser óbvio, a esta altura, que existe certa ambigüidade em nossa notação para variáveis e unidades. “V” é usado duplamente como símbolo para tensão e como abreviatura da unidade “volt”. Similarmente, “W” é usado como símbolo para energia e como abreviatura para “watt”, a unidade de potência. Podemos ainda encontrar expressões como  $V = 12 \text{ V}$  ou  $P = 4 \text{ W}$  que, fora de um contexto, podem ser dúvidas; entretanto, se acompanharmos as discussões associadas, seu significado ficará claro.

### Pontos-Chave

- $p = 10^{-12}$        $k = 10^3$
- $n = 10^{-9}$        $M = 10^6$
- $\mu = 10^{-6}$        $G = 10^9$
- $m = 10^{-3}$        $T = 10^{12}$
- Convenção passiva de sinal é definida na Figura 1.9.
- Potência está sendo consumida por um componente quando o sinal de potência é positivo usando-se a convenção passiva de sinal.
- Potência está sendo fornecida por um componente quando o sinal de potência é negativo usando-se a convenção passiva de sinal.
- As redes elétricas aqui consideradas satisfazem o princípio de conservação de energia.
- Uma fonte de tensão (corrente) independente ideal é um componente de dois terminais que mantém uma tensão (corrente) específica entre seus dois terminais independentemente da corrente (tensão) através do componente.
- Fontes dependentes ou controladas geram a tensão ou corrente que é determinada pela tensão ou corrente em uma localidade específica do circuito.

### Problemas

- 1.1 A corrente em um condutor é conhecida como sendo 12 A. Quantos coulombs de carga passam em qualquer ponto dado por um intervalo de 1,5 min?
- 1.2 Em um dado condutor, uma carga de 600 C passa em qualquer um dos pontos em intervalos de 12 segundos. Determine a corrente no condutor.
- 1.3 Uma bateria para carro de 12 V fornece 6 J de energia em um intervalo de tempo específico. Quanta carga foi movimentada durante esse período?
- 1.4 A carga entrando no terminal positivo de um componente é  $q(t) = -30e^{-4t}$  mC. Se a tensão através do componente é de  $120e^{-2t}$  V, determine a energia fornecida ao componente no intervalo de tempo de  $0 < t < 50$  ms.
- 1.5 A carga entrando no terminal positivo de um componente é dada pela expressão  $q(t) = -12e^{-2t}$  mC. A potência fornecida ao componente é  $p(t) = 2,4e^{-3t}$  W. Calcule a corrente no componente, a tensão através dele e a energia fornecida a ele no intervalo de tempo de  $0 < t < 100$  ms.
- 1.6 A corrente que entra em um componente é mostrada na Figura P1.6. Calcule a carga que entra no componente no intervalo de tempo  $0 < t < 4$  s.

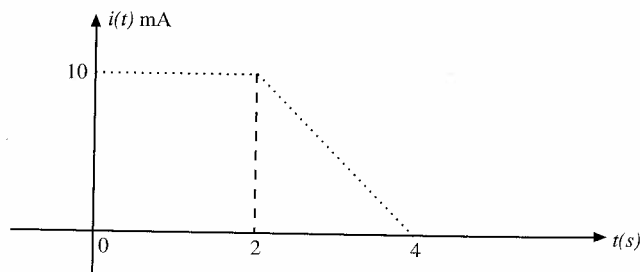


Figura P1.6

- 1.7 A tensão sobre um componente é de  $12e^{-2t}$  V. A corrente que entra no terminal positivo do componente é de  $2e^{-2t}$  A. Calcule a energia consumida pelo componente em 1,5 s.



1.8 Determine quanta potência é consumida pelo circuito da Figura P1.8 se

(A)  $V_1 = 10 \text{ V}$  e  $I = 3 \text{ A}$ .

(B)  $V_1 = 4 \text{ V}$  e  $I = -4 \text{ A}$ .

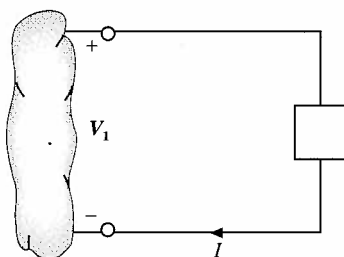


Figura P1.8

1.9 Determine a magnitude e direção da corrente nos componentes da Figura P1.9.

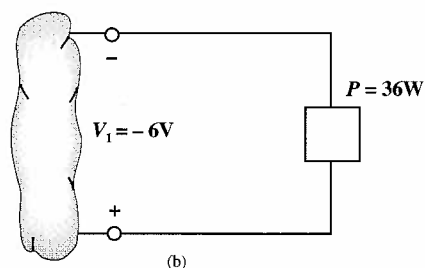
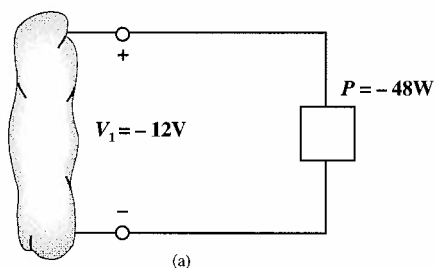


Figura P1.9

1.10 Determine a magnitude e direção da tensão através dos componentes da Figura P1.10.

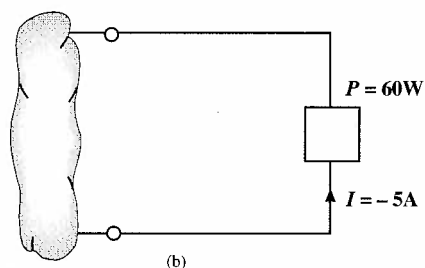
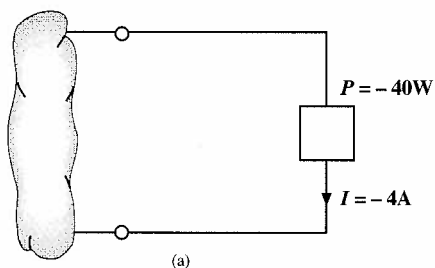


Figura P1.10

1.11 Dois componentes estão conectados em série como mostrado na Figura P1.11. O componente 1 fornece 24 W de potência. O componente 2 está fornecendo ou consumindo potência? Quanto?

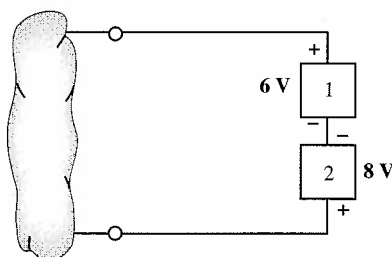


Figura P1.11

- 1.12 Dois componentes estão conectados em série como mostrado na Figura P1.12. O componente 1 fornece 36 W de potência. O componente 2 está consumindo ou fornecendo potência? Quanto?

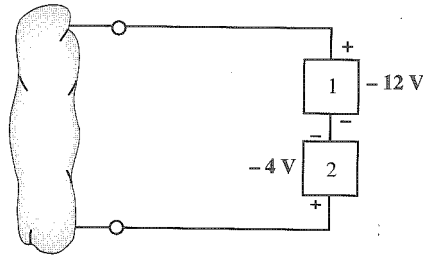


Figura P1.12

- 1.13 A fonte  $V_s$  na rede da Figura P1.13 está consumindo ou fornecendo potência? Quanto?

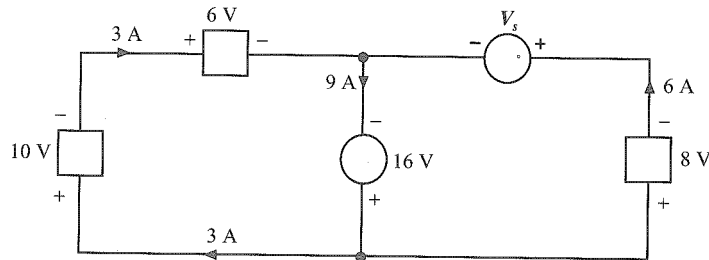


Figura P1.13

- 1.14 Determine a potência que é consumida ou fornecida pelos componentes da Figura P1.14.

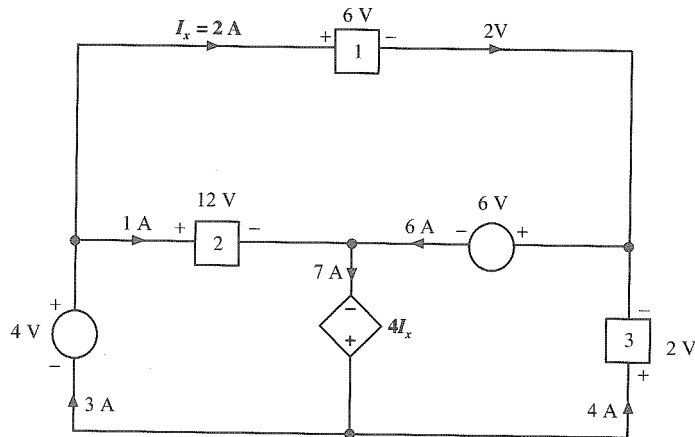


Figura P1.14

- 1.15 Calcule  $V_x$  na rede da Figura P1.15.

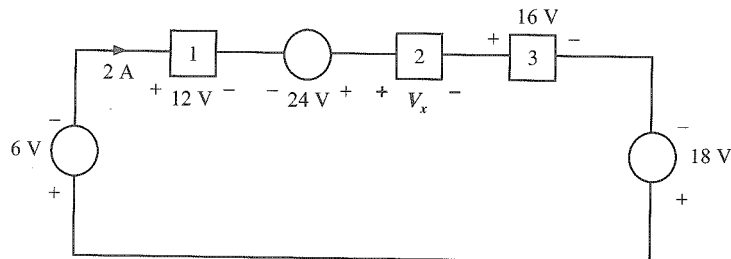


Figura P1.15

1.16 Calcule  $I_x$  na rede da Figura P1.16.

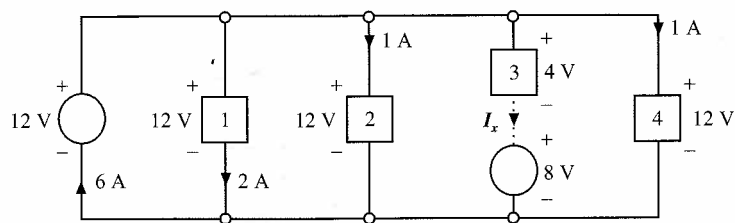


Figura P1.16

1.17 Calcule  $V_x$  na rede da Figura P1.17.

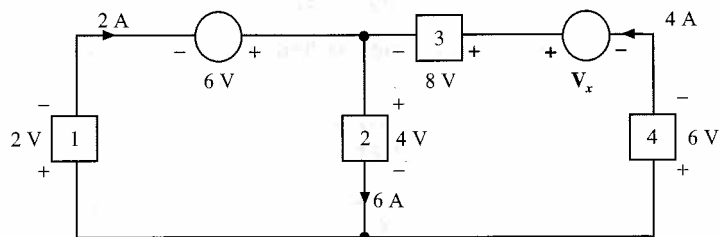


Figura P1.17

1.18 Calcule  $V_x$  na rede da Figura P1.18.

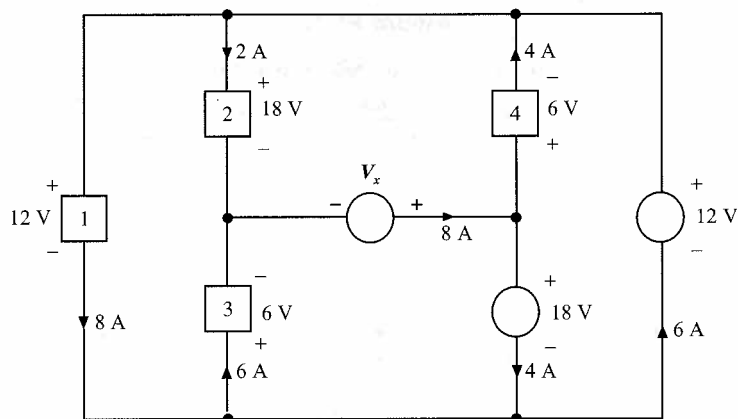


Figura P1.18

1.19 Calcule  $I_o$  na rede da Figura P1.19.

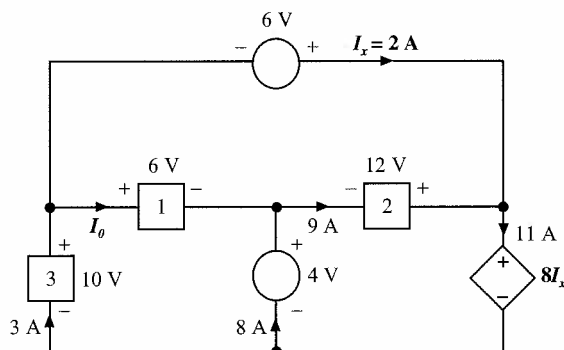


Figura P1.19

1.20 Calcule  $I_o$  na rede da Figura P1.20.

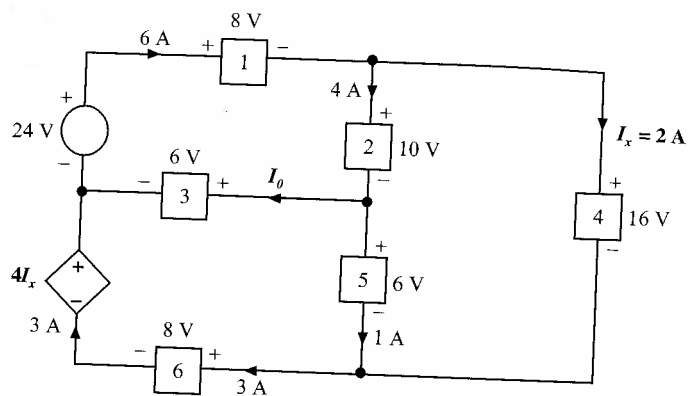


Figura P1.20

# Circuitos Resistivos

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos básicos e leis que são fundamentais à análise de circuitos. Em geral, restringiremos nossas atividades à *análise*, isto é, à determinação de uma tensão específica, corrente ou potência em alguma parte do circuito. As técnicas que serão introduzidas têm uma aplicação ampla na análise de circuitos, ainda que as discutamos no contexto de circuitos simples.

## 2.1 A Lei de Ohm

É assim chamada em homenagem ao físico alemão Georg Simon Ohm, a quem coube estabelecer a relação tensão-corrente em resistores. Como resultado de seu trabalho pioneiro, a unidade de resistência leva seu nome.

A *lei de Ohm* estabelece que a tensão em um resistor é diretamente proporcional à corrente que flui através dele. A resistência, medida em ohms, é a constante de proporcionalidade entre a tensão e a corrente.

Um componente de circuito cuja característica elétrica é primeiramente resistiva é chamado de resistor e é representado pelo símbolo mostrado na Figura 2.1. Um resistor é um componente físico que pode ser adquirido em valores padronizados em qualquer loja de componentes eletrônicos. Amplamente utilizados em uma variedade de aplicações elétricas, tais resistores são normalmente compostos de carbono ou bobinados. Além disso, resistores podem ser fabricados usando-se óxido bruto ou filmes de metal fino para uso em circuitos híbridos ou ainda podem ser difusos em circuitos semicondutores integrados.

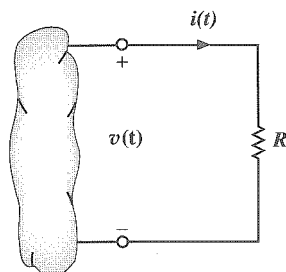


Figura 2.1 Símbolo para resistor.

A relação matemática da lei de Ohm é ilustrada pela equação

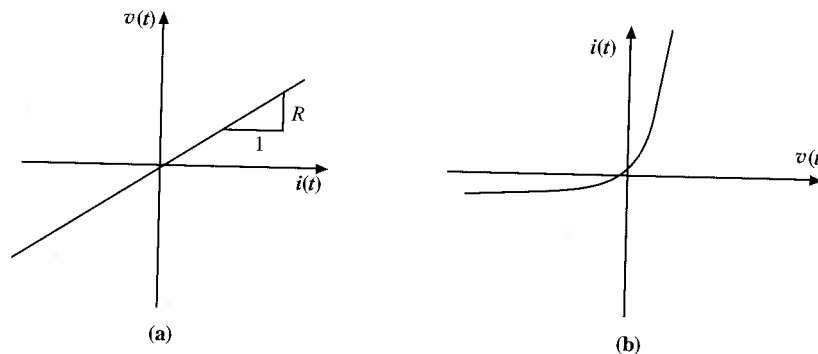
$$v(t) = Ri(t) \quad \text{onde } R \geq 0 \quad (2.1)$$

ou, equivalentemente, pela característica tensão-corrente mostrada na Figura 2.2a. Note cuidadosamente a relação entre a polaridade da tensão e a direção da corrente. Note também que assumimos tacitamente que um resistor tem um valor constante e, portanto, a característica tensão-corrente é linear.

O símbolo  $\Omega$  é usado para representar ohms, e portanto

$$1 \Omega = 1 \text{ V/A}$$

Apesar de sempre assumirmos em nossa análise que resistores são *lineares* e são, portanto, descritos por uma curva característica reta que passa através da origem, é importante que o leitor perceba que existem alguns elementos práticos e úteis que exibem uma característica *não-linear*; isto é, a relação tensão-corrente não é uma linha reta. Diodos, que são extensivamente usados em circuitos elétricos, são exemplos de resistores não-lineares. Uma característica típica de diodos é mostrada pelo gráfico da Figura 2.2b.



**Figura 2.2** Representação gráfica da relação tensão-corrente para (a) um resistor linear e (b) um diodo.

Desde que um resistor é um elemento passivo, a relação correta tensão-corrente é ilustrada na Figura 2.1. A potência fornecida aos terminais é consumida pelo resistor. Note que a carga se move do potencial mais alto para o potencial mais baixo quando ela passa pelo resistor e a energia absorvida é dissipada pelo resistor em forma de calor. Como indicado no Capítulo 1, a taxa de dissipação de energia é a potência instantânea, e portanto

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (2.2)$$

a qual, usando-se Equação 2.1, pode ser escrita como

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad (2.3)$$

Essa equação ilustra que a potência é uma função não-linear ou da corrente ou da tensão e que tem sempre um valor positivo.

Condutância, representada pelo símbolo  $G$ , é uma outra quantidade com ampla aplicação em análise de circuitos. Por definição, condutância é o inverso da resistência, isto é,

$$G = \frac{1}{R} \quad (2.4)$$

A unidade de condutância é o siemens, e a relação entre unidades é

$$1 \text{ S} = 1 \text{ A/V}$$

Usando-se a Equação 2.4, podemos escrever duas expressões adicionais,

$$i(t) = Gv(t) \quad (2.5)$$

e

$$p(t) = \frac{i^2(t)}{G} = Gv^2(t) \quad (2.6)$$

A Equação 2.5 é uma outra expressão da lei de Ohm.

Dois valores específicos de resistência e, portanto, de condutância, são consideravelmente importantes:  $R = 0$  e  $R = \infty$ . Se a resistência  $R = 0$ , temos o que é chamado de *curto-circuito*. Da lei de Ohm,

$$\begin{aligned} v(t) &= Ri(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,  $v(t) = 0$ , apesar de a corrente poder, teoricamente, assumir qualquer valor. Se a resistência  $R = \infty$ , temos o que é chamado de um *circuito aberto*, e da lei de Ohm,

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{v(t)}{R} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a corrente é zero independentemente do valor da tensão através dos terminais abertos.

### Exemplo 2.1

No circuito mostrado na Figura 2.3a, determine a corrente e a potência consumida pelo resistor.

Utilizando-se a Equação 2.1, achamos que a corrente é

$$I = \frac{V}{R} = \frac{10}{2} = 5 \text{ A}$$

e da Equação 2.2 ou 2.3, a potência consumida pelo resistor é

$$\begin{aligned} P &= VI = (10)(5) = 50 \text{ W} \\ &= RI^2 = (2)(5)^2 = 50 \text{ W} \\ &= \frac{V^2}{R} = \frac{(10)^2}{2} = 50 \text{ W} \end{aligned}$$

### Exemplo 2.2

A potência consumida pelo resistor de  $4 \Omega$  da Figura 2.3b é de  $64 \text{ W}$ . Determine a tensão e a corrente.

Utilizando-se a Equação 2.3, podemos determinar de imediato qualquer uma das variáveis.

$$\begin{aligned} 64 \text{ W} &= (4)I^2 \\ I &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 64 &= \frac{V_s^2}{4} \\ V_s &= 16 \text{ V} \end{aligned}$$

Repare, porém, que uma vez que  $I$  é conhecida,  $V_s$  pode ser obtida utilizando-se a lei de Ohm. Note que  $I = -4 \text{ A}$  e  $V_s = -16 \text{ V}$  também satisfazem as equações matemáticas acima. ■

### Exemplo 2.3

Dado o circuito da Figura 2.3c, desejamos determinar a tensão sobre os terminais e a potência consumida pelo resistor.

Da Equação 2.5, a tensão é

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{I}{G} \\ &= \frac{2,5}{0,25} = 10 \text{ V} \end{aligned}$$

A potência é determinada pela Equação 2.6 como

$$P = \frac{I^2}{G} = \frac{(2,5)^2}{0,25} = 25 \text{ W}$$

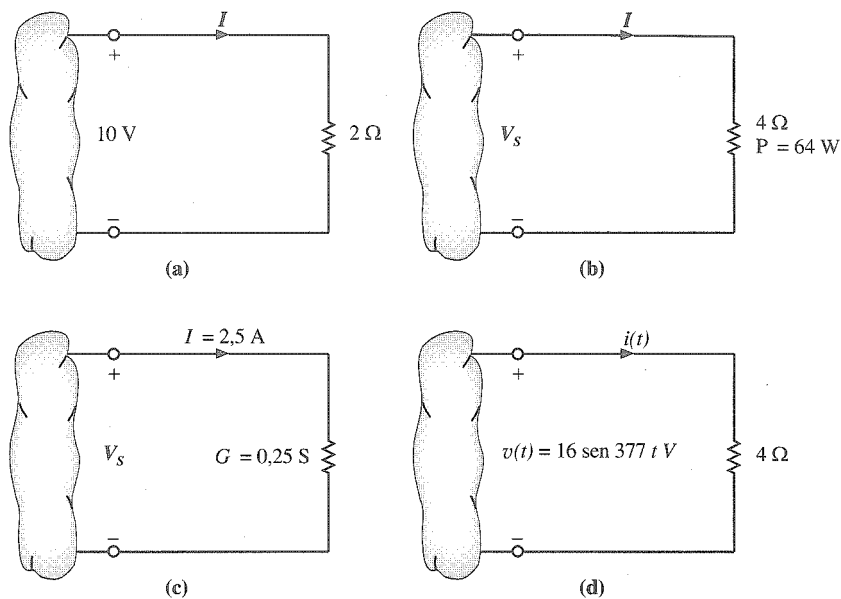


Figura 2.3 Circuitos para os Exemplos 2.1 a 2.4.

#### Exemplo 2.4

Dado o circuito da Figura 2.3d com uma entrada senoidal, determine a corrente resultante e a potência consumida pelo resistor.

Da lei de Ohm,

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{v(t)}{R} \\ &= \frac{16 \text{ sen } 377t}{4} \\ &= 4 \text{ sen } 377t \text{ A} \end{aligned}$$

Portanto, tanto a tensão como a corrente são senoidais. A potência é

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= (16 \text{ sen } 377t)(4 \text{ sen } 377t) \text{ A} \\ &= 64 \text{ sen}^2 377t \text{ W} \end{aligned}$$

Note que apesar de a tensão e a corrente serem negativas durante os intervalos quando a função seno é negativa, a potência tem sempre um valor positivo. ■

#### Exercícios

E2.1 Dado o circuito da Figura E2.1, determine a tensão  $V_S$  sobre o resistor e a potência consumida por ele.

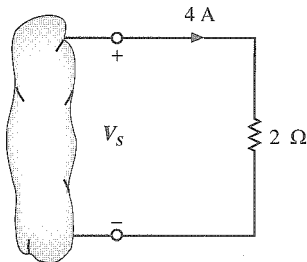
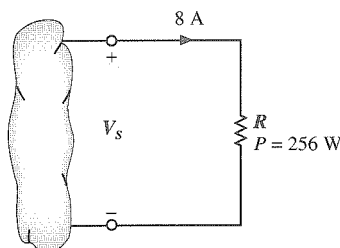


Figura E2.1

Resp.:  $V_S = 8 \text{ V}$ ,  $P = 32 \text{ W}$ .



**E2.2** Dado o circuito da Figura E2.2, determine a resistência  $R$  e a tensão  $V_S$ .



**Figura E2.2**

**Resp.:**  $R = 4 \, \Omega$ ,  $V_S = 32 \, \text{V}$ .

## 2.2 As Leis de Kirchhoff

Os circuitos que consideramos até agora continham somente um resistor cada e foram analisados utilizando-se a lei de Ohm. Começamos, neste momento, a expandir nossa capacidade de manuseio de redes mais complicadas, que resultam de uma interconexão de dois ou mais desses componentes. Assumiremos que tal interconexão é feita por condutores elétricos (fios) que têm resistência zero, isto é, condutores perfeitos. Porque os condutores têm resistência zero, a energia no circuito é armazenada em cada componente e empregamos o termo *circuito de parâmetros concentrado* para descrever a rede.

Para auxiliar nossa argumentação, definiremos alguns termos que serão empregados no decorrer da análise. Como será a nossa proposição neste texto, faremos uso de exemplos para ilustrar os conceitos e definir os termos apropriados. Por exemplo, o circuito mostrado na Figura 2.4a será usado para descrever os termos *nó*, *laço* e *ramo*. Um *nó* é simplesmente um ponto de conexão de dois ou mais componentes do circuito. Os nós no circuito da Figura 2.4a estão ressaltados na Figura 2.4b para maior clareza. O leitor deve ter o cuidado de comparar as duas figuras cuidadosamente e notar que apesar de um nó poder ser ‘espalhado’ com condutores perfeitos, ele ainda é somente um nó. Por exemplo, o nó 5 consiste da parte inferior do circuito inteiro. Em outras palavras, se começarmos em algum ponto do circuito e movermos ao longo de condutores perfeitos em qualquer direção até encontrarmos um componente elétrico, o caminho total que cobrirmos representa um nó. Portanto, assumimos que um nó é o final de um elemento do circuito junto com todos os condutores perfeitos que estão ligados a ele. Um *laço* é simplesmente qualquer caminho fechado através do circuito no qual nenhum nó é encontrado mais de uma vez. Por exemplo, começando do nó 1, um laço conterá os elementos  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $v(t)$ ; outro laço conteria  $R_2$ ,  $i(t)$ ,  $R_5$  e  $R_6$ ; e assim por diante. Finalmente, um *ramo* é a porção de um circuito contendo somente um elemento e os nós conectados aos terminais do elemento. O circuito na Figura 2.4 contém oito ramos.

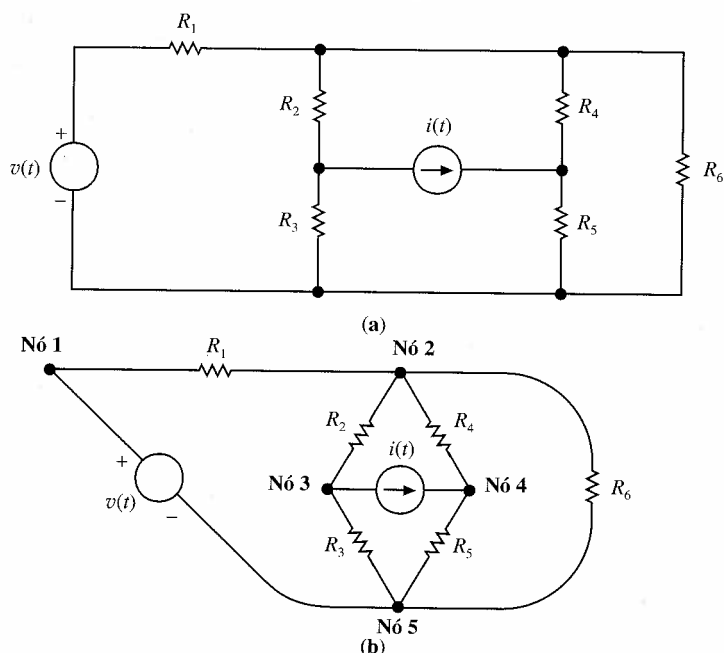
Dadas as definições anteriores, estamos agora em condições de considerar as leis de Kirchhoff, assim chamadas em homenagem ao cientista alemão Gustav Robert Kirchhoff. Essas duas leis são consideravelmente simples, mas extremamente importantes. Não tentaremos prová-las porque as provas vão além do nosso nível de entendimento atual. Entretanto, mostraremos a sua utilidade e tentaremos tornar o leitor perito em seu uso. A primeira lei é a *lei de Kirchhoff para corrente*, a qual estabelece que a soma algébrica das correntes entrando em qualquer nó é zero. Matematicamente, a lei aparece como

$$\sum_{j=1}^N i_j(t) = 0 \quad (2.7)$$

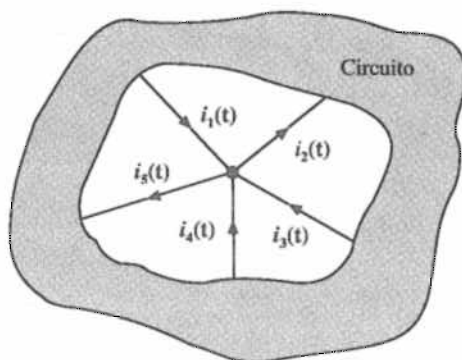
onde  $i_j(t)$  é a  $j$ -ésima corrente entrando no nó através do ramo  $j$  e  $N$  é o número de ramos conectados ao nó. Para entender o uso dessa lei, consideremos o nó mostrado na Figura 2.5. Aplicando-se a lei de Kirchhoff para corrente a esse nó, tem-se

$$i_1(t) + [-i_2(t)] + i_3(t) + i_4(t) + [-i_5(t)] = 0$$

Assumimos que os sinais algébricos das correntes entrando no nó são positivos e, portanto, os sinais das correntes deixando o nó são negativos.



**Figura 2.4** Circuitos usados para ilustrar os seguintes termos: (a) circuito exemplo; (b) circuito de (a) com os nós ilustrados.



**Figura 2.5** Correntes em um nó.

Se multiplicarmos a última equação por  $-1$ , obtemos a expressão

$$-i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) - i_4(t) + i_5(t) = 0$$

que simplesmente afirma que a soma algébrica das correntes deixando um nó é zero. Alternativamente, podemos escrever a equação como

$$i_1(t) + i_3(t) + i_4(t) = i_2(t) + i_5(t)$$

que afirma que a soma das correntes entrando em um nó é igual à soma das correntes deixando o nó. Ambas as expressões em itálico são formas alternativas da lei de Kirchhoff para corrente.

Mais uma vez, deve ser lembrado que a última afirmação significa que a soma das *variáveis* que estão definidas como entrando no nó é igual à soma das *variáveis* que estão definidas como deixando o nó, não as correntes reais. Por exemplo,  $i_j(t)$  pode ser definido como entrando no nó, mas se seu valor verdadeiro é negativo, haverá uma carga positiva deixando o nó.

Note com cuidado que a lei de Kirchhoff para corrente afirma que a soma *algébrica* das correntes ou entrando ou deixando um nó deve ser zero. Começamos agora a ver o porquê de afirmarmos no Capítulo 1 que é fundamental especificar tanto a magnitude como a direção de uma corrente.

### Exemplo 2.5

Utilizando a lei de Kirchhoff para corrente, queremos determinar o valor de  $I_1$  na Figura 2.6a.

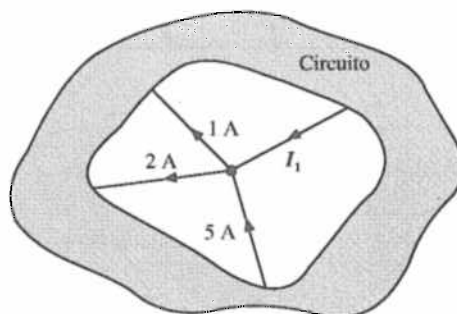
A soma algébrica das correntes entrando no nó é

$$I_1 + 5 - 2 - 1 = 0$$

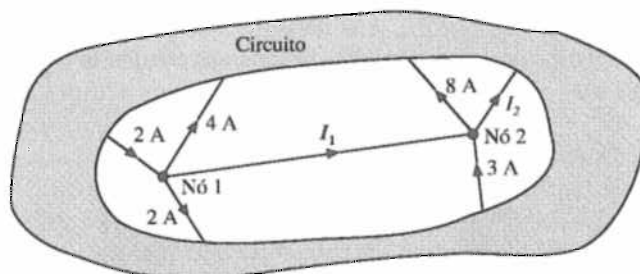
ou

$$I_1 = -2 \text{ A}$$

Essa equação indica que a magnitude de  $I_1$  é de 2 A, mas a direção é oposta à que foi definida e, portanto, uma corrente de 2 A está deixando o nó.



(a) Exemplo de nó único.



(b) Exemplo de nó múltiplo.

**Figura 2.6** Nós ilustrados para a lei de Kirchhoff para corrente: (a) exemplo de nó único; (b) exemplo de nó múltiplo.

### Exemplo 2.6

Na Figura 2.6b, desejamos determinar as correntes  $I_1$  e  $I_2$ .

As equações da lei de Kirchhoff para corrente para os nós 1 e 2, são, respectivamente,

$$2 - 4 - 2 - I_1 = 0$$

$$I_1 - 8 + 3 - I_2 = 0$$

Da primeira equação,  $I_1 = -4 \text{ A}$ . Desde que foi assumido que  $I_1$  estava deixando o nó 1, o sinal negativo ilustra que uma corrente positiva está realmente entrando no nó 1. Usando esse valor de  $I_1$  na segunda equação, sabemos que  $I_2 = -9 \text{ A}$ . ■

Finalmente, é possível generalizar a lei de Kirchhoff para corrente para incluir uma superfície fechada. Por uma superfície fechada podemos entender um conjunto de elementos interconectados que estão completamente contidos dentro dessa superfície. Desde que a corrente entrando em cada elemento da superfície seja igual à corrente deixando o elemento (ou seja, o elemento não armazena carga), conseqüentemente a corrente entrando em uma interconexão de elementos é igual àquela que deixa qualquer superfície que contenha tal interconexão. Portanto, a lei de Kirchhoff para corrente pode ser enunciada da seguinte forma: *A soma algébrica das correntes entrando em qualquer superfície fechada é zero.*

### Exemplo 2.7

Para ilustrar essa generalização da lei de Kirchhoff para corrente enunciada acima, precisamos considerar somente o arranjo de nós múltiplos discutidos no Exemplo 2.6 e ilustrado na Figura 2.6b.



negativo, ou vice-versa. Baseados nesses argumentos, neste caso temos quatro opções para aplicar a lei de Kirchhoff para tensão. Eles são ressaltados na tabela a seguir.

| Convenção | Aumento no Nível de Energia | Diminuição no Nível de Energia | Sentido de Percurso no Circuito |
|-----------|-----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1         | +                           | -                              | CW                              |
| 2         | +                           | -                              | CCW                             |
| 3         | -                           | +                              | CW                              |
| 4         | -                           | +                              | CCW                             |

Começando no ponto *a*, os resultados obtidos pelo uso dessas quatro convenções são os seguintes:

**Convenção 1**

$$-V_{R_1} + 5 - V_{R_2} + 15 - V_{R_3} + 30 = 0$$

**Convenção 2**

$$-30 + V_{R_3} - 15 + V_{R_2} - 5 + V_{R_1} = 0$$

**Convenção 3**

$$+V_{R_1} - 5 + V_{R_2} - 15 + V_{R_3} - 30 = 0$$

**Convenção 4**

$$+30 - V_{R_3} + 15 - V_{R_2} + 5 - V_{R_1} = 0$$

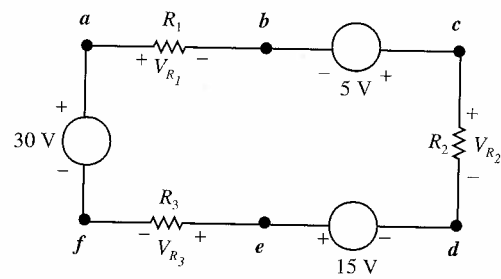
Desde que uma equação não seja modificada pela multiplicação de cada termo por  $-1$ , um exame das quatro equações acima ilustra que todas elas são idênticas. Sob tais condições, qual convenção deveríamos usar? Já que todas elas são válidas, use a que mais lhe agrada. Por enquanto, faremos uso da convenção 1. Porém, desde que o primeiro passo para se resolver uma equação algébrica é colocar os valores conhecidos de um lado e os desconhecidos de outro, começaremos a escrever as equações da seguinte forma:

$$\begin{aligned} +V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} &= 5 + 15 + 30 \\ &= 50 \end{aligned}$$

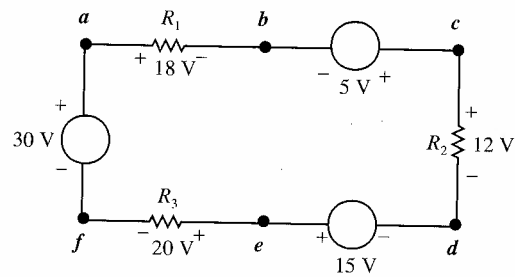
Suponhamos agora que  $V_{R_1}$  e  $V_{R_2}$  são 18 V e 12 V, respectivamente. Então, qualquer uma das equações pode ser usada para encontrarmos  $V_{R_3} = 20$  V. O circuito com todas as tensões representadas é mostrado na Figura 2.7b.

Finalmente, empregaremos a convenção  $V_{ab}$  para indicar a tensão no ponto *a* com respeito ao ponto *b*: isto é, a variável de tensão entre os pontos *a* e *b*, com o ponto *a* considerado positivo em relação ao ponto *b*. Uma vez que o potencial é medido entre dois pontos, é conveniente usar uma seta entre os dois pontos, com a ponta da seta indicando o nó positivo. Note que a notação de subíndices duplos, a notação  $+$  e  $-$ , e a notação que usa a seta são todas elas equivalentes se a seta estiver apontando na direção do terminal positivo e do primeiro índice na notação de subíndices duplos. Todas essas formas equivalentes para representação de tensão são mostradas na Figura 2.8. Se empregarmos os resultados da Figura 2.8 na rede da Figura 2.7, acharemos, por exemplo, que  $V_{af} = 30$  V,  $V_{fa} = -30$  V,  $V_{ab} = 18$  V,  $V_{dc} = -12$  V,  $V_{ed} = 15$  V e  $V_{ef} = 20$  V. Além disso, podemos aplicar a lei de Kirchhoff para tensão ao circuito para determinar a tensão entre quaisquer dois pontos. Por exemplo, suponhamos que queremos determinar a tensão  $V_{be}$  como mostrado na Figura 2.7c. Apesar de podermos empregar qualquer uma das quatro convenções mostradas anteriormente, usaremos a convenção 1 e começaremos no ponto *b*. Note que temos uma escolha de dois caminhos; um é *bcdeb* e o outro é *befab*. Para o primeiro caminho, temos

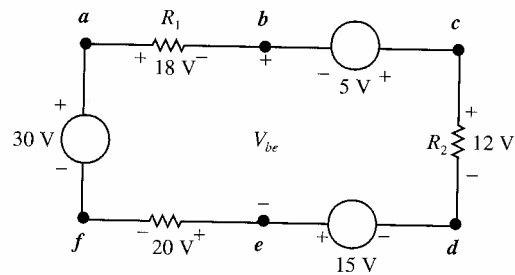
$$\begin{aligned} +5 - 12 + 15 + V_{be} &= 0 \\ V_{be} &= -8 \text{ V} \end{aligned}$$



(a)

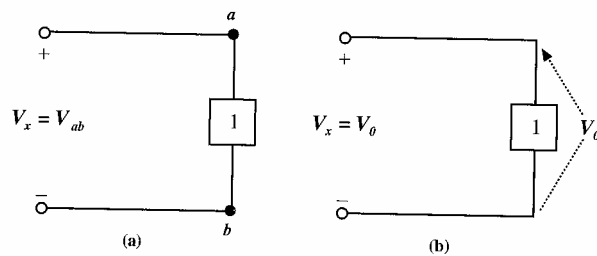


(b)



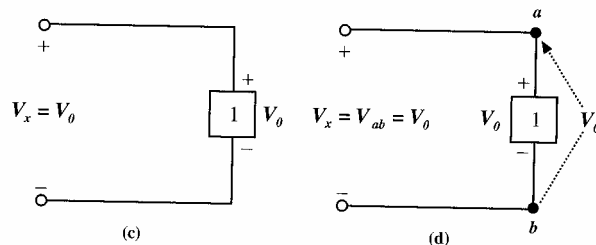
(c)

Figura 2.7 Circuitos usados para ilustrar a lei de Kirchhoff para tensão.



(a)

(b)



(c)

(d)

Figura 2.8 Formas equivalentes para se identificar tensão.

Para o segundo caminho, a equação é

$$-V_{be} - 20 + 30 - 18 = 0$$

$$V_{be} = -8 \text{ V}$$

De uma maneira semelhante, mostramos que  $V_{ad} = 25 \text{ V}$  e  $V_{fc} = -17 \text{ V}$ . ■

### Exemplo 2.9

Consideremos agora a rede da Figura 2.9a. Além da fonte de tensão, as seguintes tensões são conhecidas:  $V_{R_1} = 2 \text{ V}$ ,  $V_{R_2} = 4 \text{ V}$ ,  $V_{R_4} = 9 \text{ V}$  e  $V_{R_5} = -3 \text{ V}$ . Dada tal informação, vamos determinar  $V_{R_3}$ ,  $V_{ae}$  e  $V_{ec}$ .

Poderíamos, é claro, começar de qualquer ponto da rede e empregar qualquer uma das convenções mostradas anteriormente. Mais uma vez faremos uso da convenção 1 e aplicaremos a lei de Kirchhoff para tensão ao laço *abcdefa*.

$$-24 + V_{R_2} - V_{R_3} + V_{R_4} - V_{R_5} + V_{R_1} = 0$$

Substituindo-se os valores conhecidos nessa equação temos

$$-24 + 4 - V_{R_3} + 9 - (-3) + 2 = 0$$

ou

$$V_{R_3} = -6 \text{ V}$$

Usando-se o mesmo método, podemos determinar  $V_{ae}$ . Todas as tensões conhecidas até este ponto são mostradas na Figura 2.9b. Lembre-se que poderíamos mudar as tensões sobre  $R_3$  e  $R_5$  para valores positivos se também revertêssemos a polaridade de ambos  $V_{R_3}$  e  $V_{R_5}$  (ou seja, trocar os sinais + e - nos terminais dos resistores). Usando o caminho *abcdea*, obtemos

$$-24 + 4 - (-6) + 9 + V_{ae} = 0$$

$$V_{ae} = 5 \text{ V}$$

Usando o caminho *aefda* temos

$$-V_{ae} - (-3) + 2 = 0$$

$$V_{ae} = 5 \text{ V}$$

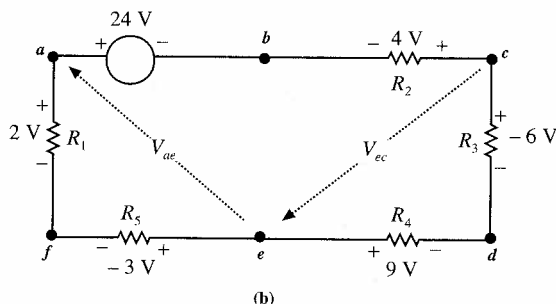
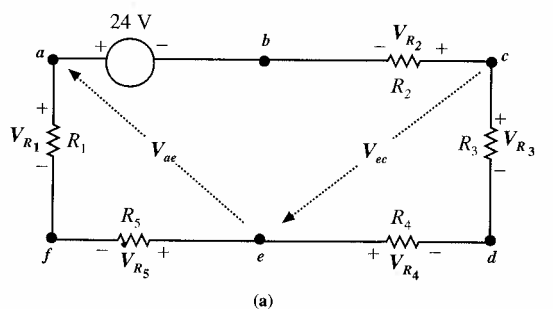


Figura 2.9 Outro circuito usado para ilustrar a lei de Kirchhoff para tensão.

Finalmente, com a informação obtida,  $V_{ec}$  pode ser calculada de várias formas. Usando-se o caminho  $cdec$ , temos

$$\begin{aligned} -(-6) + 9 - V_{ec} &= 0 \\ V_{ec} &= 15 \text{ V} \end{aligned}$$

O uso do caminho  $cefab$  nos dá

$$\begin{aligned} V_{ec} - (-3) + 2 - 24 + 4 &= 0 \\ V_{ec} &= 15 \text{ V} \end{aligned}$$

Utilizando-se o caminho  $ceabc$ , temos

$$\begin{aligned} V_{ec} + V_{ae} - 24 + 4 &= 0 \\ V_{ec} + 5 - 24 + 4 &= 0 \\ V_{ec} &= 15 \text{ V} \end{aligned}$$

Em geral, a representação matemática da lei de Kirchhoff para tensão é

$$\sum_{j=1}^N v_j(t) = 0 \quad (2.8)$$

onde  $v_j(t)$  é a tensão sobre o  $j$ -ésimo ramo (com a devida referência ao sentido) em um laço contendo  $N$  tensões. Essa expressão é análoga à Equação 2.7 para a lei de Kirchhoff para corrente.

### Exercícios

**E2.5** Na rede da Figura E2.5,  $V_{R_1}$  é conhecido como 4 V. Calcule  $V_{R_2}$  e  $V_{bd}$ .

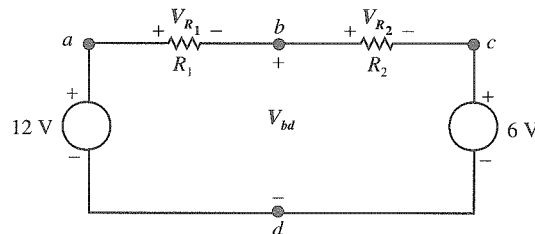


Figura E2.5

**Resp.:**  $V_{R_2} = 14 \text{ V}$ ,  $V_{bd} = 8 \text{ V}$ .

**E2.6** Na rede da Figura E2.6, calcule  $V_{R_4}$ ,  $V_{bf}$  e  $V_{ec}$ .

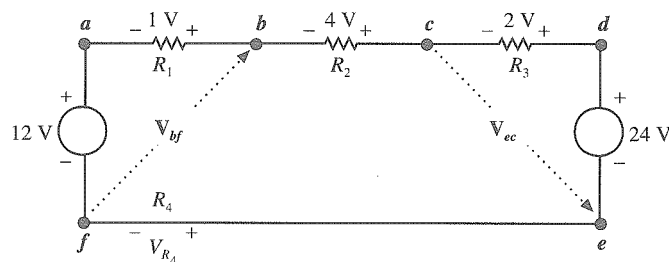


Figura E2.6

**Resp.:**  $V_{R_4} = -5 \text{ V}$ ,  $V_{bf} = 13 \text{ V}$ ,  $V_{ec} = -22 \text{ V}$ .

Antes de avançarmos com a análise de circuitos simples, é de suma importância enfatizar um ponto crítico, mas sutil. A lei de Ohm, como definida pela equação  $V = IR$ , refere-se à relação entre a tensão e corrente como definida na Figura 2.10a.



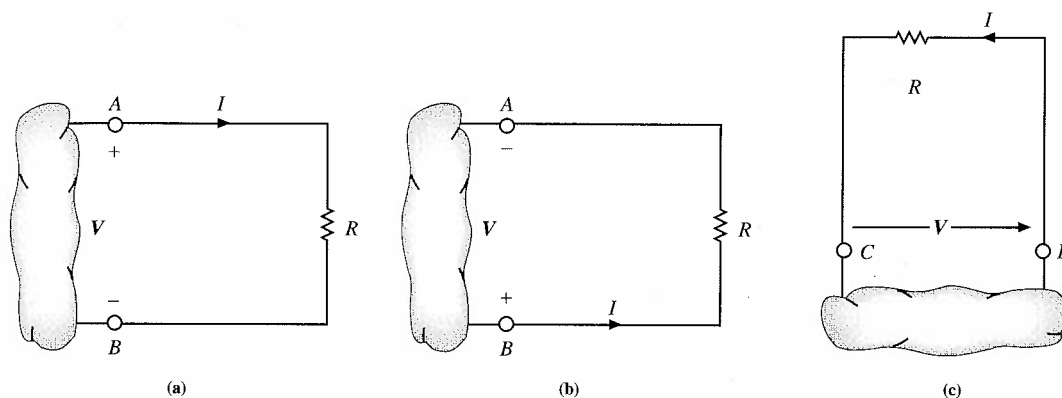


Figura 2.10 Circuitos usados para explicar a lei de Ohm.

Se o sentido da corrente ou da tensão, mas não ambos simultaneamente, é invertido, o relacionamento entre a corrente e a tensão seria  $V = -IR$ . De forma semelhante, dado o circuito da Figura 2.10b,  $V = IR$  implica que a corrente  $I$  flui do ponto B através do resistor para o ponto A. Do mesmo modo, para o circuito da Figura 2.10c,  $V = IR$  implica que o ponto D está em um potencial mais alto que o ponto C, e portanto a seta representando a tensão  $V$  está do ponto C para o ponto D.

## 2.3 Circuitos de Laço Único

Podemos agora aplicar as leis apresentadas anteriormente na análise de circuitos simples. Para começar, examinaremos o que talvez seja o mais simples dos circuitos — um único caminho fechado, ou laço, de componentes. Os elementos de um laço único transportam a mesma corrente e, portanto, diz-se que estão em *série*. No entanto, aplicaremos a lei de Kirchhoff para tensão e a lei de Ohm no circuito para determinar os muitos valores encontrados no circuito.

Nosso método consistirá em começar com um circuito simples e então generalizar a análise para os mais complicados. O circuito mostrado na Figura 2.11 nos servirá como base para tal discussão. Esse circuito consiste de uma fonte de tensão independente que está em série com dois resistores. Assumimos que a corrente flui no sentido horário. Se tal afirmação está correta, a solução das equações que determina a corrente terá um valor positivo. Se a corrente está na realidade fluindo na direção oposta, o valor da variável de corrente será simplesmente negativo, indicando que a corrente está fluindo no sentido oposto ao originalmente assumido. Fizemos também afirmações a respeito da polaridade das tensões para  $V_{R_1}$  e  $V_{R_2}$ . Tais afirmações foram feitas usando-se a convenção empregada em nossa discussão da lei de Ohm e o sentido escolhido para  $i(t)$ , isto é, a convenção mostrada na Figura 2.10a.

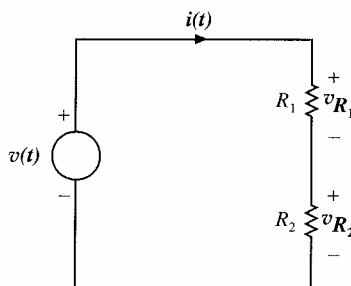


Figura 2.11 Circuito de laço único.

Aplicando-se a lei de Kirchhoff para tensão a esse circuito, tem-se

$$+v(t) - v_{R_1} - v_{R_2} = 0$$

ou

$$v(t) = v_{R_1} + v_{R_2}$$

Entretanto, da lei de Ohm sabemos que

$$v_{R_1} = R_1 i(t)$$

$$v_{R_2} = R_2 i(t)$$

Portanto,

$$v(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t)$$

Resolvendo-se a equação para  $i(t)$ , temos

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_1 + R_2} \quad (2.9)$$

Conhecendo a corrente, podemos agora aplicar a lei de Ohm para determinar a tensão em cada resistor:

$$\begin{aligned} v_{R_1} &= R_1 i(t) \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} v(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Similarmente,

$$v_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t) \quad (2.11)$$

Note que as equações satisfazem a lei de Kirchhoff para tensão, já que

$$+v(t) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} v(t) - \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t) = 0$$

Apesar de simples, as equações 2.10 e 2.11 são muito importantes porque descrevem a operação chamada de *divisor de tensão*. Em outras palavras, a fonte  $v(t)$  está dividida entre os resistores  $R_1$  e  $R_2$  em proporção direta às respectivas resistências.

### Exemplo 2.10

Considere o circuito mostrado na Figura 2.12. O circuito é idêntico ao da Figura 2.11, com a diferença que  $R_1$  é um resistor variável tal como os de controle de volume para rádio e televisão. Suponhamos que  $V_S = 24$  V,  $R_1 = 10 \Omega$  e  $R_2 = 2 \Omega$ .

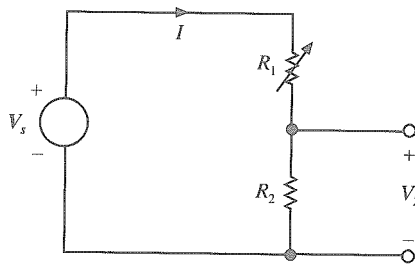


Figura 2.12 Circuito divisor de tensão.

Usando-se a Equação (2.11), obtemos a tensão  $V_2$  que é

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S \\ &= \frac{2}{10 + 2} 24 \\ &= 4 \text{ V} \end{aligned}$$

Suponhamos agora que o resistor variável  $R_1$  é mudado de  $10 \, \Omega$  para  $0,4 \, \Omega$ . Então

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{2}{0,4 + 2} 24 \\ &= 20 \, \text{V} \end{aligned}$$

Repare que o uso da Equação 2.11 é equivalente a determinar a corrente  $I$  e, então, usar a lei de Ohm para calcular  $V_2$ . Note que a maior das tensões está sobre o maior valor de resistência. Esse conceito de divisor de tensão e o circuito simples que empregamos para descrevê-lo são consideravelmente úteis, porque, como será mostrado mais adiante, circuitos mais complicados podem ser reduzidos a essa mesma forma.

Consideremos agora o relacionamento de potência que existe no circuito da Figura 2.11. A potência instantânea dissipada pela fonte de tensão é

$$p(t) = v(t)i(t)$$

e a potência instantânea absorvida pelos resistores  $R_1$  e  $R_2$  é

$$p_1(t) = \frac{v_{R_1}^2(t)}{R_1} = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} v^2(t)$$

e

$$p_2(t) = \frac{v_{R_2}^2(t)}{R_2} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} v^2(t)$$

respectivamente. Agora repare que

$$\begin{aligned} p_1(t) + p_2(t) &= \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} v^2(t) + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} v^2(t) \\ &= \frac{v^2(t)}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{v(t)}{R_1 + R_2} v(t) \\ &= v(t)i(t) \\ &= p(t) \end{aligned}$$

Essa análise ilustra a conservação de potência no circuito, já que a potência fornecida pela fonte de tensão é completamente absorvida pelos dois resistores.

### Exemplo 2.11

Determine a potência instantânea absorvida no resistor  $R_2$  do Exemplo 2.10 quando  $R_1 = 10 \, \Omega$  e quando  $R_1 = 0,4 \, \Omega$ .

$$P_2 = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} V^2$$

Para  $R_1 = 10 \, \Omega$ ,

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{2}{(10 + 2)^2} (24)^2 \\ &= 8 \, \text{W} \end{aligned}$$

e para  $R_1 = 0,4 \, \Omega$ ,

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{2}{(0,4 + 2)^2} (24)^2 \\ &= 200 \, \text{W} \end{aligned}$$

A esta altura desejamos estender nossa análise para incluir múltiplas fontes de tensão e resistores. Por exemplo, consideremos o circuito da Figura 2.13a. Assumimos aqui que a corrente flui no sentido horário, e definimos a variável  $i(t)$  de acordo. Isto pode ou não ser o caso, dependendo do valor das fontes de tensão. A lei de Kirchhoff para tensão para esse circuito é

$$-v_{R_1} - v_2(t) + v_3(t) - v_{R_2} - v_4(t) - v_5(t) + v_1(t) = 0$$

ou, usando a lei de Ohm,

$$(R_1 + R_2)i(t) = v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) - v_4(t) - v_5(t)$$

que pode ser escrita como

$$(R_1 + R_2)i(t) = v(t)$$

onde

$$v(t) = v_1(t) + v_3(t) - [v_2(t) + v_4(t) + v_5(t)]$$

de modo tal que sob as definições acima, a Figura 2.13a é equivalente à Figura 2.13b. Em outras palavras, a soma de diversas fontes de tensão em série pode ser substituída por uma fonte cujo valor é a soma algébrica das fontes individuais. Essa análise pode, com certeza, ser generalizada para um circuito com  $N$  fontes em série.

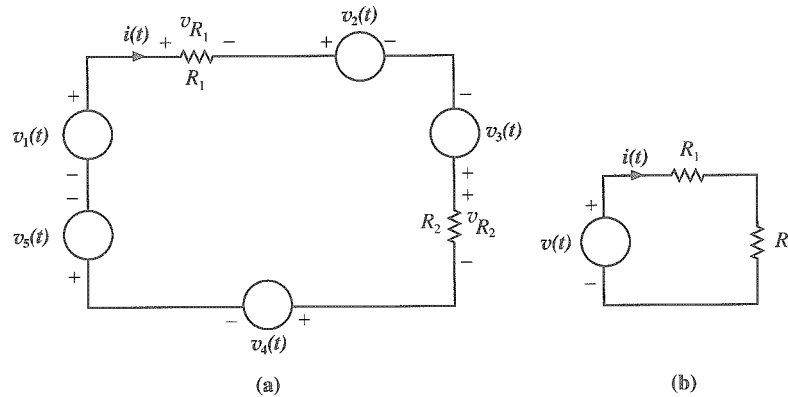


Figura 2.13 Circuitos equivalentes com fontes múltiplas.

Consideremos agora o circuito com  $N$  resistores em série como mostrado na Figura 2.14a. Aplicando a lei de Kirchhoff para tensão a esse circuito, obtemos

$$\begin{aligned} v(t) &= v_{R_1} + v_{R_2} + \cdots + v_{R_N} \\ &= R_1 i(t) + R_2 i(t) + \cdots + R_N i(t) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$v(t) = R_S i(t) \quad (2.12)$$

onde

$$R_S = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \quad (2.13)$$

e então

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_S} \quad (2.14)$$

Repare também que para qualquer resistor  $R_i$  no circuito, a tensão sobre  $R_i$  é dada pela expressão

$$v_{R_i} = \frac{R_i}{R_S} v(t) \quad (2.15)$$

que é a propriedade de divisão de tensão para múltiplos resistores em série.

A Equação 2.13 indica que a resistência equivalente de  $N$  resistores em série é simplesmente a soma das resistências individuais. Portanto, usando-se as equações 2.13 e 2.14, podemos desenhar o circuito da Figura 2.14b, que é equivalente ao mostrado na Figura 2.14a.

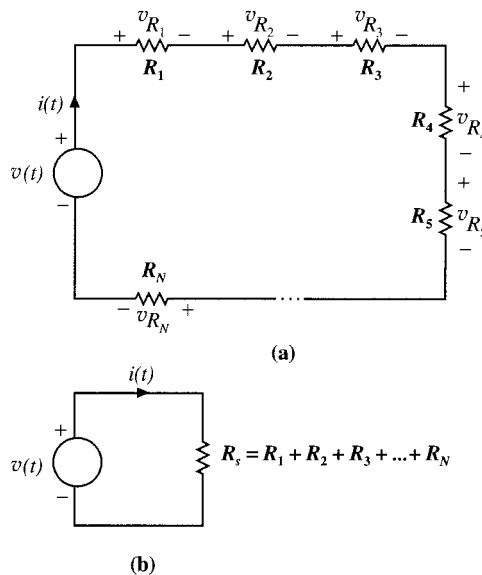


Figura 2.14 Circuitos equivalentes.

A potência instantânea dissipada pela combinação de  $N$  resistores em série é

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \left[ \frac{v(t)}{R_s} \right]^2 R_1 + \left[ \frac{v(t)}{R_s} \right]^2 R_2 + \cdots + \left[ \frac{v(t)}{R_s} \right]^2 R_N \\
 &= \frac{R_1}{R_s^2} v^2(t) + \frac{R_2}{R_s^2} v^2(t) + \cdots + \frac{R_N}{R_s^2} v^2(t) \\
 &= \frac{v^2(t)}{R_s} \\
 &= v(t)i(t)
 \end{aligned}$$

que é a potência fornecida pela fonte de tensão.

### Exemplo 2.12

Dado o circuito da Figura 2.15, queremos determinar a corrente  $I$ , a potência dissipada pelo resistor  $R_2$  e um circuito equivalente.

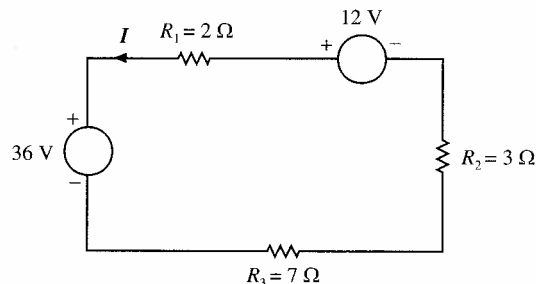


Figura 2.15 Exemplo de circuito com múltiplas fontes e resistores.

Se assumirmos que a corrente flui no sentido anti-horário e definirmos a variável de corrente de acordo, a lei de Kirchhoff para tensão produz a equação

$$-36 - 7I - 3I + 12 - 2I = 0$$

ou

$$(7 + 3 + 2)I = 12 - 36$$

$$I = -2 \text{ A}$$

Portanto, a magnitude da corrente é de 2 A, porém ela flui no sentido horário. A potência dissipada pelo resistor  $R_2$  é

$$\begin{aligned} P &= I^2 R_2 \\ &= (2)^2 (3) \\ &= 12 \text{ W} \end{aligned}$$

O circuito equivalente é mostrado na Figura 2.14b, onde

$$v(t) = 24 \text{ V}, R_s = 12 \Omega \text{ e } i(t) = 2 \text{ A}$$

### Exemplo 2.13

Dada a rede da Figura 2.16, determine a corrente  $I$  e as tensões  $V_{fb}$  e  $V_{be}$ .

De início assumimos que a corrente flui no sentido horário. Se começarmos no ponto  $f$  e percorrermos o circuito no sentido horário, a lei de Kirchhoff para tensão determina que

$$24 - 1I - 2I - 64 - 3I - 4I = 0^*$$

ou

$$1I + 2I + 3I + 4I = -64 + 24$$

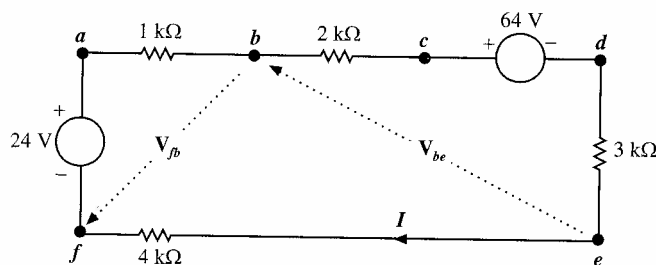


Figura 2.16 Circuito em série com múltiplos componentes.

Poderíamos ter escrito essa equação por inspeção. O procedimento é simplesmente colocar as fontes de tensão no lado direito da equação e darmos um sinal positivo a elas, caso contribuam com o sentido do fluxo da corrente, e um sinal negativo, caso se oponham ao sentido assumido para a corrente. O lado esquerdo da equação é simplesmente a tensão sobre os resistores. Resolvendo a equação acima para  $I$ , obtemos

$$I = -4 \text{ mA}$$

Fazendo uso desse valor de  $I$ , a tensão  $V_{fb}$  pode ser obtida usando-se o caminho  $fabf$  ou  $bcdefb$ . No primeiro caso,

$$\begin{aligned} V_{fb} + 24 - 1I &= 0 \\ V_{fb} &= -28 \text{ V} \end{aligned}$$

\* As equações  $v = iR$  e  $p = vi$  são válidas quando  $v$ ,  $R$  e  $p$  estão nas unidades volts (V), ampères (A), ohms ( $\Omega$ ) e watts (W), respectivamente. Entretanto, as unidades V, mA, k $\Omega$  e mW também constituem um conjunto mutuamente compatível. Consideremos  $i = 4 \text{ mA}$  fluindo através de um resistor de 6-k $\Omega$ :

$$v = iR = (4 \times 10^{-3})(6 \times 10^3) = 24 \text{ V} \quad (\text{V, A, } \Omega, \text{ W})$$

$$v = iR = (4)(6) = 24 \text{ V} \quad (\text{V, mA, k}\Omega, \text{ mW})$$

$$p = vi = (24)(4 \times 10^{-3}) = 96 \times 10^{-3} \text{ W} \quad (\text{V, A, } \Omega, \text{ W})$$

$$p = vi = (24)(4) = 96 \text{ mW} \quad (\text{V, mA, k}\Omega, \text{ mW})$$

Em algumas situações, o conjunto (V, mA, k $\Omega$ , mW) resulta em cálculos mais simples por causa de sua compatibilidade com valores reais de componentes.

No segundo caso,

$$\begin{aligned} -2I - 64 - 3I - 4I - V_{fb} &= 0 \\ V_{fb} &= -28 \text{ V} \end{aligned}$$

De forma semelhante,  $V_{be}$  pode ser obtido usando-se o caminho  $bcdeb$  ou  $befab$  ou o caminho através da tensão  $V_{fb}$ , agora conhecida. No primeiro caso,

$$\begin{aligned} -2I - 64 - 3I + V_{be} &= 0 \\ V_{be} &= 44 \text{ V} \end{aligned}$$

Os outros caminhos produzirão o mesmo resultado.

### Exemplo 2.14

A tensão  $V_A$  sobre o resistor de  $2 \Omega$  da Figura 2.17 é 8 V. Vamos determinar as tensões  $V_1$  e  $V_o$ . Usando-se a lei de Ohm, a corrente no resistor de  $2 \Omega$  será

$$\begin{aligned} V_A &= I(2) \\ 8 &= I(2) \\ I &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

Desde que  $V_A$  é positiva do lado esquerdo do resistor de  $2 \Omega$ , a corrente flui da esquerda para a direita nesse resistor. A corrente  $I$  flui através do resistor de  $3 \Omega$  e então

$$\begin{aligned} V_o &= I(3) \\ &= 12 \text{ V} \end{aligned}$$

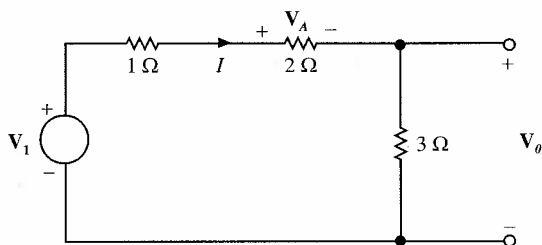


Figura 2.17 Circuito simples em série.

Aplicando-se a lei de Kirchhoff para tensão por todo o laço, tem-se

$$\begin{aligned} +V_1 - I(1) - I(2) - I(3) &= 0 \\ V_1 &= (6)I \\ &= 24 \text{ V} \end{aligned}$$

ou, de maneira equivalente,  $V_1 = I(1) + V_A + V_o$ .

### Exercícios

E2.7 Determine  $V_o$  na rede da Figura E2.7.

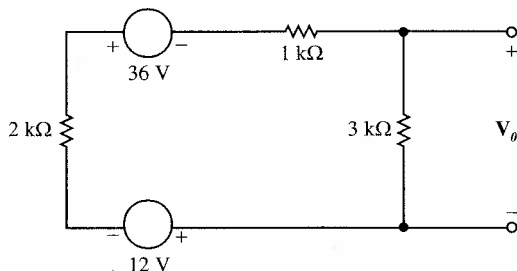


Figura E2.7

Resp.:  $V_o = -24 \text{ V}$ .

E2.8 Dada a rede da Figura E2.8, determine a corrente  $I$ , a potência dissipada pelo resistor de  $5\text{-}\Omega$ ,  $V_{bd}$  e  $V_{be}$ .

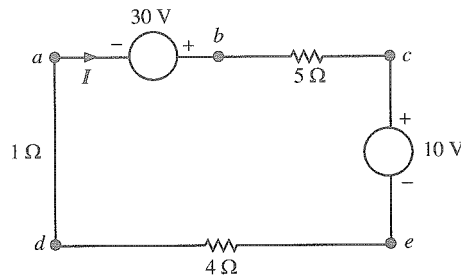


Figura E2.8

Resp.:  $I = 2\text{ A}$ ,  $P_{5\Omega} = 20\text{ W}$ ,  $V_{bd} = 28\text{ V}$ ,  $V_{be} = 20\text{ V}$ .

E2.9 Determine  $V_o$  na rede da Figura E2.9.

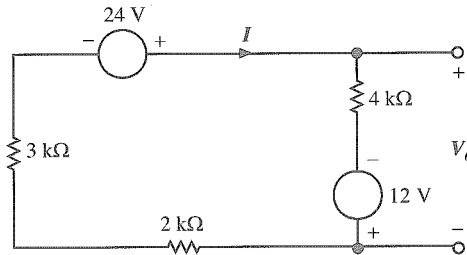


Figura E2.9

Resp.:  $V_o = 4\text{ V}$ .

E2.10  $V_o$  é  $4\text{ V}$  na rede da Figura E2.10. Determine  $V_2$ .

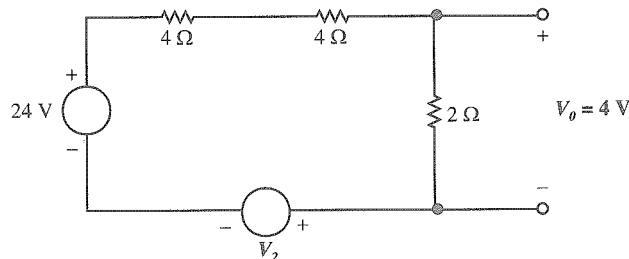


Figura E2.10

Resp.:  $V_2 = 4\text{ V}$ .

## 2.4 Circuitos com Único Par de Nós

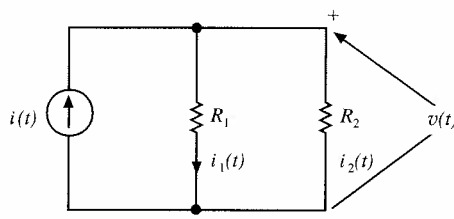
Um importante circuito é o de um único par de nós. Nesse caso, os elementos têm sobre si a mesma tensão e, portanto, estão em *paralelo*. Aplicaremos, no entanto, a lei de Kirchhoff para corrente e a lei de Ohm para determinar os valores desconhecidos no circuito.

Seguindo o mesmo procedimento usado no circuito de laço único, começaremos com a situação mais simples possível e então generalizaremos nossa análise. Consideremos o circuito mostrado na Figura 2.18. Aqui temos uma fonte independente de corrente em paralelo com dois resistores.

Já que todos os componentes do circuito estão em paralelo, a tensão  $v(t)$  aparece sobre cada um deles. As correntes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  são arbitrariamente designadas como mostrado na figura. Agora, aplicando-se a lei de Kirchhoff para corrente no nó do alto, obtemos

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$





**Figura 2.18** Circuito simples em paralelo.

E, empregando-se a lei de Ohm, temos

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} \\ &= \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v(t) \\ &= \frac{v(t)}{R_p} \end{aligned}$$

onde

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.16)$$

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.17)$$

Portanto, a resistência equivalente de dois resistores conectados em paralelo é igual ao produto das respectivas resistências dividido pela soma. Note também que essa resistência equivalente  $R_p$  é sempre menor que ou  $R_1$  ou  $R_2$ . Vemos daí que se conectarmos resistores em paralelo, reduziremos a resistência total. No caso especial de  $R_1 = R_2$ , a resistência equivalente é igual à metade do valor dos resistores individuais.

A maneira como a corrente  $i(t)$  da fonte se divide entre os dois ramos é chamada *divisão de corrente* e pode ser calculada a partir das expressões a seguir. Por exemplo,

$$\begin{aligned} v(t) &= R_p i(t) \\ &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

e

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{v(t)}{R_1} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} i(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

e

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{v(t)}{R_2} \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} i(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

As equações 2.19 e 2.20 descrevem matematicamente a regra de divisão de corrente.

Portanto, a corrente se divide na proporção inversa das resistências. Em outras palavras, para se determinar a corrente no ramo contendo  $R_1$ , multiplicamos a corrente de entrada  $i(t)$  pela resistência oposta  $R_2$  e dividimos tal produto pela soma dos dois resistores. Repare que essa regra se aplica ao caso especial de dois resistores em paralelo.

Se empregarmos a condutância  $G_i = 1/R_i$  em vez da resistência na análise, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} i(t) &= (G_1 + G_2)v(t) \\ G_p &= G_1 + G_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

e, dessa forma, que

$$i_1(t) = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i(t) \quad (2.22)$$

$$i_2(t) = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i(t) \quad (2.23)$$

A corrente se divide na proporção definida pela razão entre a condutância do ramo e a condutância total. Essa formulação é mais genérica e mais adiante a estenderemos para manipular qualquer número de resistores em paralelo.

### Exemplo 2.15

Consideremos o circuito mostrado na Figura 2.19a. O circuito equivalente é mostrado na Figura 2.19b. Dada a informação do circuito, desejamos determinar as correntes e a resistência equivalente.

A resistência equivalente para o circuito é

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{(3)(6)}{3 + 6} \\ &= 2 \Omega \end{aligned}$$

Agora  $V_o$  pode ser calculado como

$$\begin{aligned} V_o &= R_p I \\ &= (2)(12) \\ &= 24 \text{ V} \end{aligned}$$

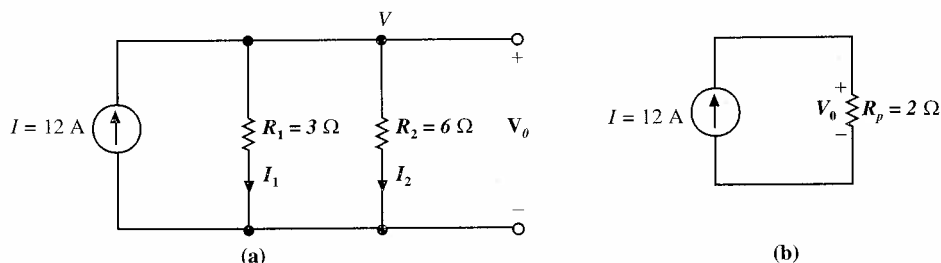


Figura 2.19 Exemplo de circuito em paralelo.

Uma vez que a tensão  $V_o$  é conhecida, a lei de Ohm pode ser usada para calcular as correntes  $I_1$  e  $I_2$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_o}{R_1} \\ &= \frac{24}{3} \\ &= 8 \text{ A} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{V_o}{R_2} \\ &= \frac{24}{6} \\ &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

Observe como essas correntes satisfazem a lei de Kirchhoff para corrente tanto no nó inferior como no superior.

$$I = I_1 + I_2$$

$$12 \text{ A} = 8 \text{ A} + 4 \text{ A}$$

Também podemos aplicar a divisão de corrente para determinar  $I_1$  e  $I_2$ . Por exemplo,

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{6}{3 + 6} (12)$$

$$= 8 \text{ A}$$

e

$$I_2 = \frac{6}{3 + 6} (12) = 4 \text{ A}$$

Repare que a maior corrente flui através do menor resistor, e vice-versa. Além disso, deve ser notado que se  $R_1$  e  $R_2$  são idênticos, a corrente se dividirá igualmente entre eles.

A potência fornecida pela fonte de corrente na Figura 2.18 é

$$p(t) = v(t)i(t)$$

A potência dissipada pelos dois resistores é

$$p_1(t) + p_2(t) = i_1^2(t)R_1 + i_2^2(t)R_2$$

$$= \left[ \frac{R_2 i(t)}{R_1 + R_2} \right]^2 R_1 + \left[ \frac{R_1 i(t)}{R_1 + R_2} \right]^2 R_2$$

$$= \frac{R_2^2 R_1 + R_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} i^2(t)$$

$$= \left[ \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i(t) \right] i(t)$$

que é, sem dúvida, a potência fornecida pela fonte de corrente.

### Exemplo 2.16

Determine a potência instantânea fornecida pela fonte e absorvida por cada resistor no circuito analisado no Exemplo 2.15.

A potência fornecida é

$$P = V_o I$$

$$= (24) (12)$$

$$= 288 \text{ W}$$

A potência dissipada em,  $R_1$  e  $R_2$  é, respectivamente,

$$P_1 = I_1^2 R_1$$

$$= (8)^2 (3)$$

$$= 192 \text{ W}$$

e

$$P_2 = I_2^2 R_2$$

$$= (4)^2 (6)$$

$$= 96 \text{ W}$$

e

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 \\
 &= 192 + 96 \\
 &= 288 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Vamos estender agora nossa análise para incluir várias fontes de corrente e vários resistores em paralelo. Por exemplo, consideremos o circuito mostrado na Figura 2.20a. Assumimos que o nó superior é  $v(t)$  volts positivo em relação ao nó inferior. Aplicando-se a lei de Kirchhoff para corrente ao nó superior temos

$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_5(t) - i_6(t) = 0$$

ou

$$i_1(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_6(t) = i_2(t) + i_5(t)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}
 i_0(t) &= \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v(t) \\
 &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} v(t)
 \end{aligned}$$

onde

$$i_0(t) = i_1(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_6(t)$$

de tal forma que, de acordo com as definições acima, o circuito na Figura 2.20b é equivalente àquele na Figura 2.20a. Obviamente, podemos estender essa análise a um circuito com  $N$  fontes de corrente.

Consideremos agora o circuito com  $N$  resistores em paralelo como mostrado na Figura 2.21a. Aplicando-se a lei de Kirchhoff para corrente aos nós superiores tem-se

$$\begin{aligned}
 i_0(t) &= i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_N(t) \\
 &= \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right) v(t)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

ou

$$i_0(t) = (G_1 + G_2 + \dots + G_N) v(t) \tag{2.25}$$

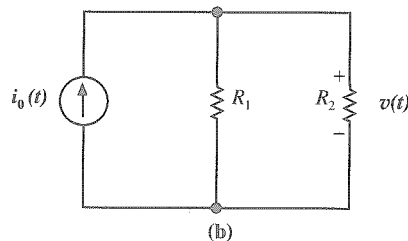
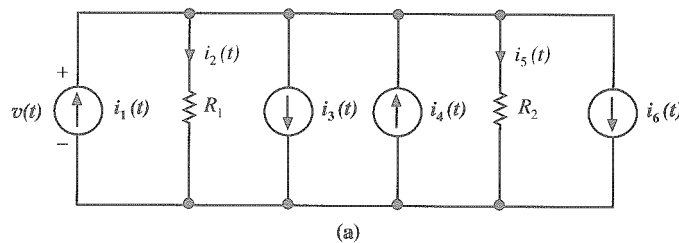
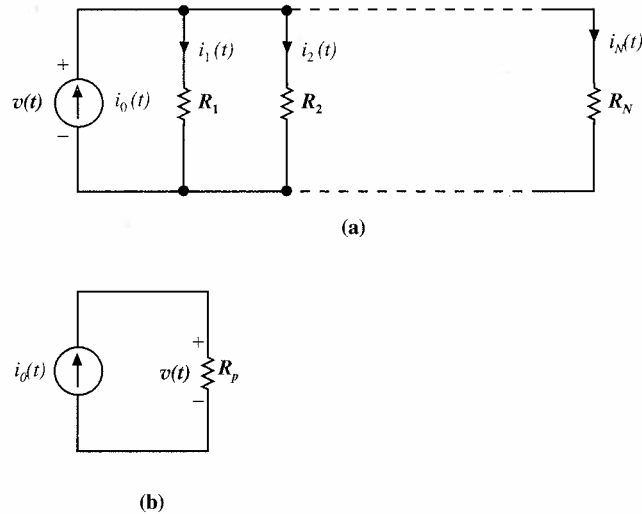


Figura 2.20 Circuitos equivalentes.



**Figura 2.21** Circuitos equivalentes.

Essas duas equações poderiam ser escritas como

$$i_0(t) = \frac{v(t)}{R_p} \quad (2.26)$$

$$= G_p v(t) \quad (2.27)$$

onde

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (2.28)$$

e

$$G_p = \sum_{i=1}^N G_i \quad (2.29)$$

de forma que do ponto de vista da fonte, o circuito da Figura 2.21a pode ser reduzido ao circuito equivalente mostrado na Figura 2.21b.

A divisão de corrente para qualquer ramo pode ser calculada usando-se a lei de Ohm e as equações acima. Por exemplo, para o  $j$ -ésimo ramo no circuito da Figura 2.21a,

$$i_j(t) = \frac{v(t)}{R_j}$$

Usando-se a Equação 2.26, obtém-se

$$i_j(t) = \frac{R_p}{R_j} i_0(t) \quad (2.30)$$

De forma semelhante, achamos que

$$i_j(t) = \frac{G_j}{G_p} i_0(t) \quad (2.31)$$

As equações 2.30 e 2.31 definem a regra de divisão de corrente para casos gerais.

### Exemplo 2.17

Dado o circuito da Figura 2.22, desejamos determinar a tensão  $V_o$ , as correntes em cada resistor e um circuito equivalente.

Empregando-se a lei de Kirchhoff para corrente, obtém-se

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{3}\right)V_0 = 12 - 6 + 18$$

$$\frac{1}{2}V_0 = 24$$

$$V_0 = 48 \text{ V}$$

Então

$$I_1 = \frac{48}{8}$$

$$= 6 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{48}{24}$$

$$= 2 \text{ A}$$

e

$$I_3 = \frac{48}{3}$$

$$= 16 \text{ A}$$

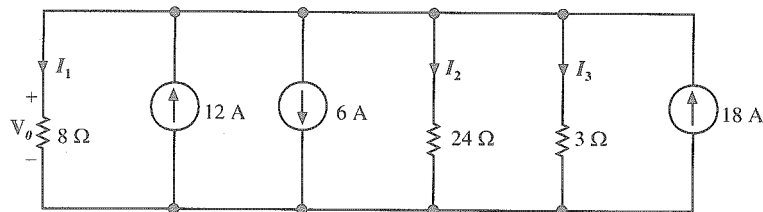


Figura 2.22 Exemplo de circuito de nó único com múltiplas fontes e resistores.

Aplicando agora a lei de Kirchhoff para corrente ao nó superior, tem-se

$$-6 + 12 - 6 - 2 - 16 + 18 = 0$$

Desde que a corrente total é de 24 A entrando no nó superior e a resistência equivalente é  $R_p = 2 \Omega$ , o circuito equivalente consiste de uma fonte de corrente de 24 A em paralelo com um resistor de  $2 \Omega$ . ■

### Exemplo 2.18

No circuito da Figura 2.23, a potência absorvida pelo resistor de  $6 \Omega$  é de 24 W. Desejamos determinar o valor da fonte de corrente  $I_o$ .

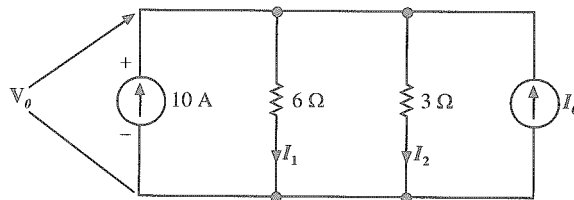


Figura 2.23 Outro circuito de nó único com múltiplas fontes e resistores.

Já que

$$P = I^2 R$$

então

$$24 = I_1^2 (6)$$

logo

$$I_1 = \pm 2 \text{ A}$$

Portanto, a tensão  $V_o$  é

$$V_o = I_1 (6) = \pm 12 \text{ V}$$

A corrente  $I_2$  pode agora ser calculada usando-se a lei de Ohm como se segue

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{V_0}{3} \\ &= \pm \frac{12}{3} \\ &= \pm 4 \text{ A} \end{aligned}$$

Aplicando agora a lei de Kirchhoff para corrente no nó superior, tem-se

$$\begin{aligned} 10 - 2 - 4 + I_0 &= 0 \\ I_0 &= -4 \text{ A} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 10 + 2 + 4 + I_0 &= 0 \\ I_0 &= -16 \text{ A} \end{aligned}$$

### Exercícios

E2.11 Dada a rede da Figura E2.11, determine a potência dissipada pelo resistor de  $6 \Omega$ .

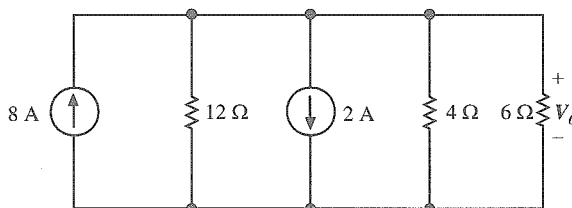


Figura E2.11

Resp.:  $P_{6\Omega} = 24 \text{ W}$ .

E2.12 Na rede da Figura E2.12,  $V_o = 12 \text{ V}$ . Determine  $I_o$ .

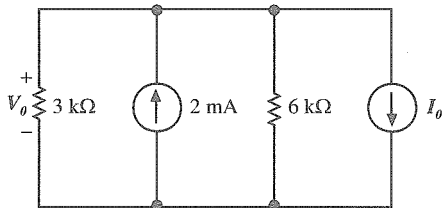


Figura E2.12

Resp.:  $I_o = -4 \text{ mA}$ .

E2.13 Na rede da Figura E2.13,  $I_2 = 4 \text{ mA}$ . Determine  $I_o$ .

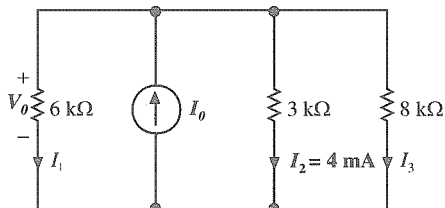


Figura E2.13

Resp.:  $I_o = 7,5 \text{ mA}$ .

## 2.5 Combinações de Resistores em Série e em Paralelo

Nos desenvolvimentos anteriores mostrou-se que a resistência equivalente de  $N$  resistores em série é

$$R_s = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$$

e que a resistência equivalente de  $N$  resistores em paralelo é determinada por

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$

Vamos agora examinar algumas combinações desses dois casos.

### Exemplo 2.19

Vamos determinar a resistência nos terminais  $A$ - $B$  da rede mostrada na Figura 2.24a.

Para determinar a resistência equivalente em  $A$ - $B$ , começamos no lado oposto do circuito e combinamos resistores à medida que progredimos em direção aos terminais  $A$ - $B$ . Os resistores de  $1\ \Omega$ ,  $2\ \Omega$  e  $3\ \Omega$  conectados em série entre os terminais  $E$  e  $F$  são equivalentes a um resistor de  $6\ \Omega$ , que por sua vez está em paralelo com o resistor de  $12\ \Omega$ . Essa combinação paralela é equivalente a um resistor de  $4\ \Omega$  conectado entre  $E$  e  $F$  como mostrado na Figura 2.24b. Os dois resistores de  $1\ \Omega$  e o resistor de  $4\ \Omega$  estão em série, e essa combinação está em paralelo com o resistor de  $3\ \Omega$ . Combinando-se esses resistores, a rede reduz-se ao que é mostrado na Figura 2.24c. Portanto, a resistência nos terminais  $A$ - $B$  é de  $14\ \Omega$ , como mostrado na Figura 2.24d.

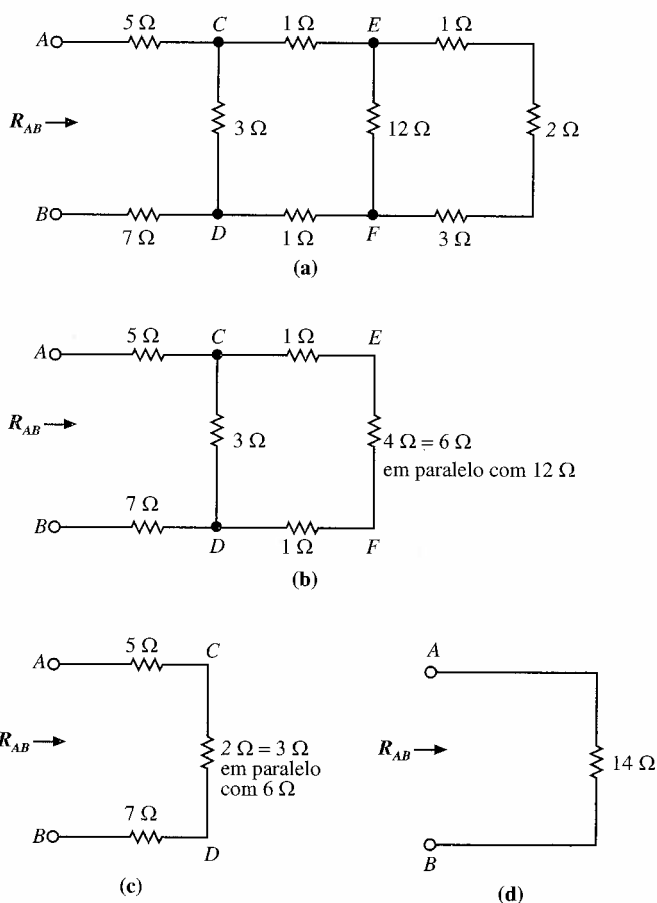
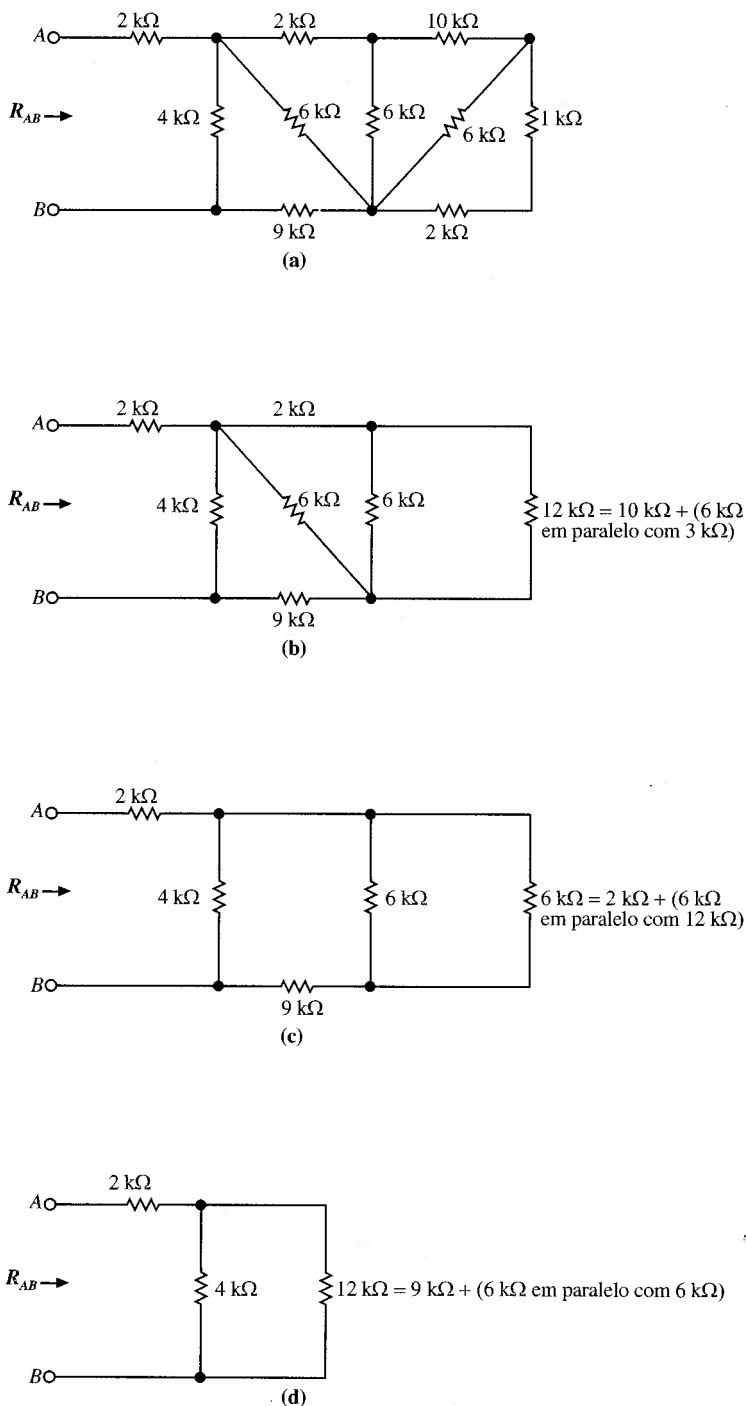


Figura 2.24 Simplificação de uma rede resistiva.



**Exemplo 2.20**

Queremos determinar a resistência nos terminais  $A$ - $B$  na rede da Figura 2.25a. Novamente começando do lado oposto aos terminais da rede e combinando os resistores como mostrado na sequência de circuitos da Figura 2.25, achamos que a resistência equivalente nos terminais é de  $5\text{ k}\Omega$ .



**Figura 2.25** Simplificação de uma rede resistiva.

**Exercícios**

**E2.14** Determine a resistência equivalente nos terminais da rede da Figura E2.14.

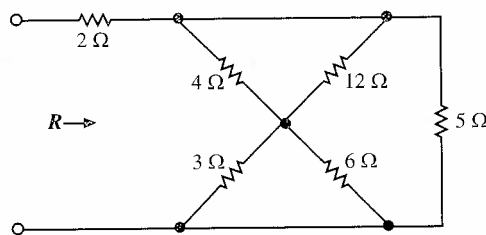


Figura E2.14

Resp.:  $R = 4,5 \, \Omega$ .

E2.15 Calcule a resistência nos terminais da rede da Figura E2.15.

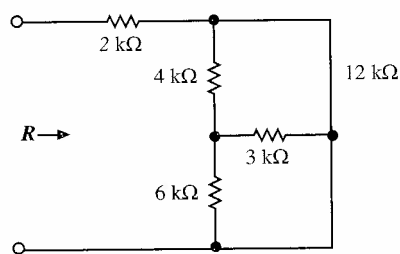


Figura E2.15

Resp.:  $R = 6 \, \text{k}\Omega$ .

## 2.6 Circuitos com Combinações e Resistores em Série e em Paralelo

Até aqui já foram descritas várias técnicas fundamentais à análise de circuitos. Desejamos agora aplicá-las e mostrar como elas podem ser usadas em concordância com a análise de circuitos. Ilustraremos sua aplicação por meio de vários exemplos que serão tratados com algum detalhe.

### Exemplo 2.21

Queremos determinar todas as correntes e tensões no circuito em cascata mostrado na Figura 2.26a.

Para proceder a análise do circuito, começamos pelo lado direito e combinamos os resistores para determinar a resistência total vista pela fonte de 64 V. Isto permitirá calcular a corrente  $I_1$ . Empregando então as leis de Kirchhoff para corrente e tensão, a lei de Ohm e/ou divisão de corrente, pode-se calcular todas as correntes e tensões no circuito.

Do lado direito do circuito, os resistores de  $3 \, \Omega$  e  $9 \, \Omega$  estão em série e assim podem ser substituídos por um resistor equivalente de  $12 \, \Omega$ . Esse resistor está em paralelo com o resistor de  $4 \, \Omega$ , e a combinação dos dois produz um resistor equivalente de  $3 \, \Omega$ , mostrado do lado direito do circuito na Figura 2.26b. Na Figura 2.26b, os dois resistores de  $3 \, \Omega$  estão em série e sua combinação está em paralelo com o resistor de  $6 \, \Omega$ . Combinando-se todas as três resistências tem-se o circuito mostrado na Figura 2.26c.

Fazendo uso da lei de Kirchhoff para tensão no circuito da Figura 2.26c, temos

$$I_1(5 + 3) = 64$$

$$I_1 = 8 \, \text{A}$$

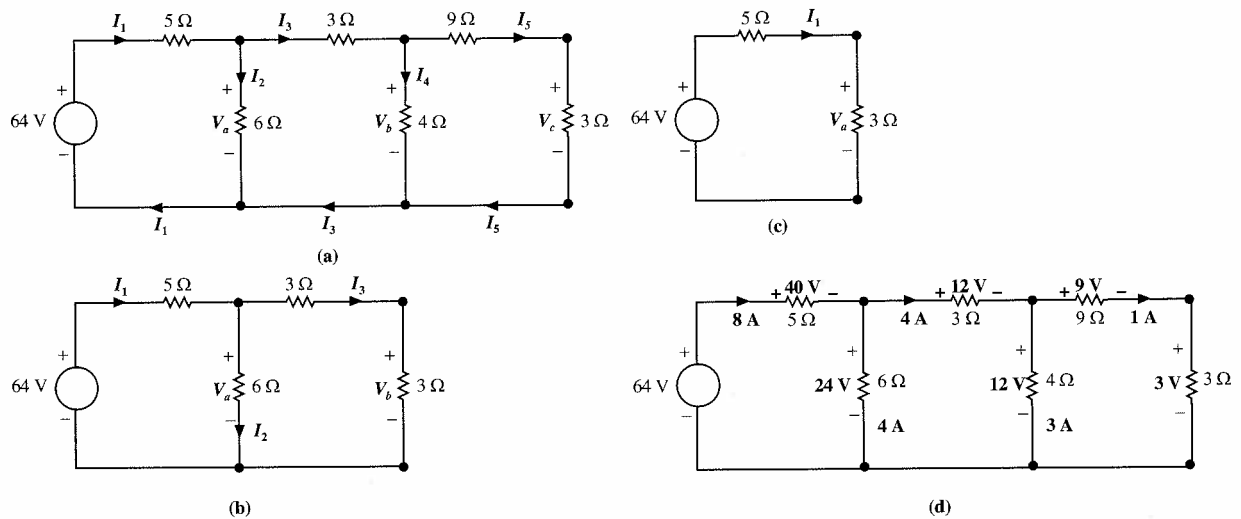
$V_o$  pode ser calculado a partir da lei de Ohm como

$$V_o = I_1(3)$$

$$= 24 \, \text{V}$$

ou, usando-se a lei de Kirchhoff para tensão,

$$\begin{aligned}
 V_a &= 64 - 5I_1 \\
 &= 64 - 40 \\
 &= 24 \text{ V}
 \end{aligned}$$



**Figura 2.26** Análise de um circuito em cascata.

Conhecendo-se  $I_1$  e  $V_a$ , podemos agora determinar todas as correntes e tensões na Figura 2.26b. Desde que  $V_a = 24 \text{ V}$ , a corrente  $I_2$  pode ser calculada usando-se a lei de Ohm como

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{24}{6} \\
 &= 4 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Então utilizando-se a lei de Kirchhoff para corrente, temos

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_2 + I_3 \\
 8 &= 4 + I_3 \\
 I_3 &= 4 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Observe que  $I_3$  poderia também ter sido calculada usando-se a lei de Ohm:

$$\begin{aligned}
 V_a &= (3 + 3)I_3 \\
 I_3 &= \frac{24}{6} \\
 &= 4 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Aplicando-se a lei de Kirchhoff para tensão à malha do lado direito na Figura 2.26b, temos

$$\begin{aligned}
 V_a - V_b &= 3I_3 \\
 24 - V_b &= 12 \\
 V_b &= 12 \text{ V}
 \end{aligned}$$

ou, uma vez que  $V_b$  é igual à queda de tensão sobre o resistor de  $3 \Omega$ , poderíamos usar a lei de Ohm como

$$\begin{aligned}
 V_b &= 3I_3 \\
 &= 12 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Estamos agora em condições de calcular as últimas correntes e tensões desconhecidas na Figura 2.26a. Conhecendo-se  $V_b$ , podemos calcular  $I_4$  usando a lei de Ohm como

$$\begin{aligned}
 V_b &= 4I_4 \\
 I_4 &= \frac{12}{4} \\
 &= 3 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Então, da lei de Kirchhoff para corrente, temos

$$I_3 = I_4 + I_5$$

$$4 = 3 + I_5$$

$$I_5 = 1 \text{ A}$$

Poderíamos também ter calculado  $I_5$  usando a regra da divisão de corrente. Por exemplo,

$$I_5 = \frac{4}{4 + (9 + 3)} I_3$$

$$= 1 \text{ A}$$

Finalmente,  $V_c$  pode ser calculado como

$$V_c = I_5(3)$$

$$= 3 \text{ V}$$

Repare que a lei de Kirchhoff para corrente é satisfeita em todos os nós e a lei de Kirchhoff para tensão é satisfeita em todas as malhas na Figura 2.26d. ■

### Exemplo 2.22

Dado o circuito da Figura 2.27 com  $V_0 = 72 \text{ V}$ , determine todas as correntes e tensões.

O circuito pode ser simplificado como mostrado na progressão da Figura 2.27a para a Figura 2.27b para a Figura 2.27c. Então  $I_1$  pode ser computado a partir da lei de Ohm como

$$I_1 = \frac{V_0}{6 + 2 + 4}$$

$$= 6 \text{ mA}$$

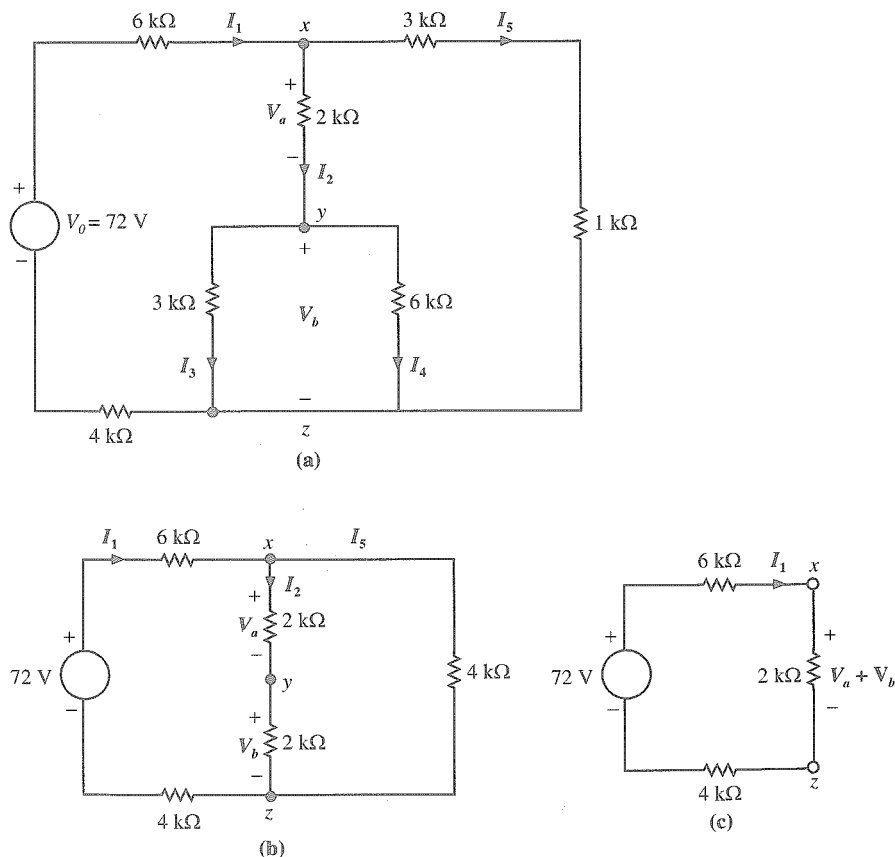


Figura 2.27 Exemplo de circuito para análise.

Agora usando-se a lei de Kirchhoff para tensão na Figura 2.27c temos

$$\begin{aligned} 72 &= (6)I_1 + V_a + V_b + (4)I_1 \\ 72 - (6)I_1 - (4)I_1 &= V_a + V_b \\ V_a + V_b &= 12 \text{ V} \end{aligned}$$

Esse valor poderia também ter sido calculado a partir da lei de Ohm, multiplicando-se a corrente de 6 mA pela resistência de 2 kΩ. Da Figura 2.27b podemos obter  $I_2$  como

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{V_a + V_b}{2 + 2} \\ &= 3 \text{ mA} \end{aligned}$$

Então, usando-se a lei de Ohm, obtemos

$$\begin{aligned} V_a &= I_2(2) \\ &= 6 \text{ V} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V_b &= I_2(2) \\ &= 6 \text{ V} \end{aligned}$$

Portanto, o ponto y é 6 V positivo em relação ao ponto z, e o ponto x é 6 V positivo em relação ao ponto y, ou 12 V positivo em relação ao ponto z. Da lei de Kirchhoff para corrente,

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_5 \\ 6 &= 3 + I_5 \\ I_5 &= 3 \text{ mA} \end{aligned}$$

Uma vez que  $V_b$  é conhecido, as correntes  $I_3$  e  $I_4$  podem ser obtidas a partir da lei de Ohm como

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{V_b}{3} \\ &= 2 \text{ mA} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{V_b}{6} \\ &= 1 \text{ mA} \end{aligned}$$

Qualquer uma das correntes poderia ter sido calculada a partir da divisão da corrente  $I_2$ . Por exemplo,  $I_3$  pode ser obtida como

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{6}{3 + 6} I_2 \\ &= 2 \text{ mA} \end{aligned}$$

### Exemplo 2.23

Dado o circuito da Figura 2.27a e  $I_4 = \frac{1}{2}$  mA, deseja-se determinar o valor da fonte de tensão  $V_o$ .

Se  $I_4 = \frac{1}{2}$  mA, então, a partir da lei de Ohm,  $V_b = 3$  V.  $V_b$  pode agora ser usado para calcular  $I_3 = 1$  mA. A lei de Kirchhoff para corrente aplicada ao nó y produz

$$\begin{aligned} I_2 &= I_3 + I_4 \\ &= 1,5 \text{ mA} \end{aligned}$$

Então, da lei de Ohm, tem-se

$$\begin{aligned} V_a &= (1,5)(2) \\ &= 3 \text{ V} \end{aligned}$$

Uma vez que  $V_a + V$  é agora conhecida,  $I_5$  pode ser obtida:

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{V_a + V_b}{3 + 1} \\ &= 1,5 \text{ mA} \end{aligned}$$

Aplicando-se a lei de Kirchhoff para corrente ao nó  $x$ , tem-se

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_5 \\ &= 3 \text{ mA} \end{aligned}$$

Fazendo-se agora uso da Figura 2.27c, podemos empregar a lei de Kirchhoff para tensão já que agora conhecemos  $I_1$ .

$$\begin{aligned} V_0 &= (6)I_1 + (2)I_1 + (4)I_1 \\ &= (12)I_1 \\ &= 36 \text{ V} \end{aligned}$$

■

### Exemplo 2.24

Consideremos o circuito da Figura 2.28a. Dado que  $V_{DE} = V_0 = 4 \text{ V}$ , ache o valor da fonte de tensão  $V_S$  e a tensão sobre a fonte de corrente  $V_{AD}$ .

Usando as leis de Kirchhoff e a de Ohm, podemos calcular as quantidades desejadas. Sendo  $V_{DE} = 4 \text{ V}$ , utilizando a lei de Ohm, obtém-se  $I_8 = 2 \text{ A}$ . Aplicando a lei de Kirchhoff para corrente no nó  $D$ , tem-se

$$I_3 + I_7 = I_8$$

Solucionando a equação para  $I_7$ , obtém-se

$$I_7 = -1 \text{ A}$$

Então, já que

$$\begin{aligned} V_{CE} &= V_{CD} + V_{DE} \\ &= 8 + 4 \\ &= 12 \text{ V} \end{aligned}$$

$I_6$  pode ser obtida a partir da lei de Ohm como 4 A. A lei de Kirchhoff para corrente no nó  $E$  produz

$$I_4 + I_6 + I_8 = 0$$

e daí  $I_4 = -6 \text{ A}$ . Então, desde que

$$\begin{aligned} V_{CB} &= V_{CE} + V_{EB} \\ &= 12 + (6)(1) \\ &= 18 \text{ V} \end{aligned}$$

A lei de Ohm produz  $I_5 = -3 \text{ A}$ . No nó  $C$ ,

$$I_2 + I_5 = I_6 + I_7$$

Determinando a única variável desconhecida, tem-se  $I_2 = 6 \text{ A}$ . Então

$$\begin{aligned} V_{AC} &= (6)(2) \\ &= 12 \text{ V} \end{aligned}$$

A única corrente ainda não conhecida é  $I_1$ . No nó  $A$

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ &= 9 \text{ A} \end{aligned}$$

Agora a lei de Kirchhoff para tensão em volta do laço de cima à esquerda produz

$$V_S - V_{AC} - V_{CB} = 0$$

ou

$$V_S = 30 \text{ V}$$

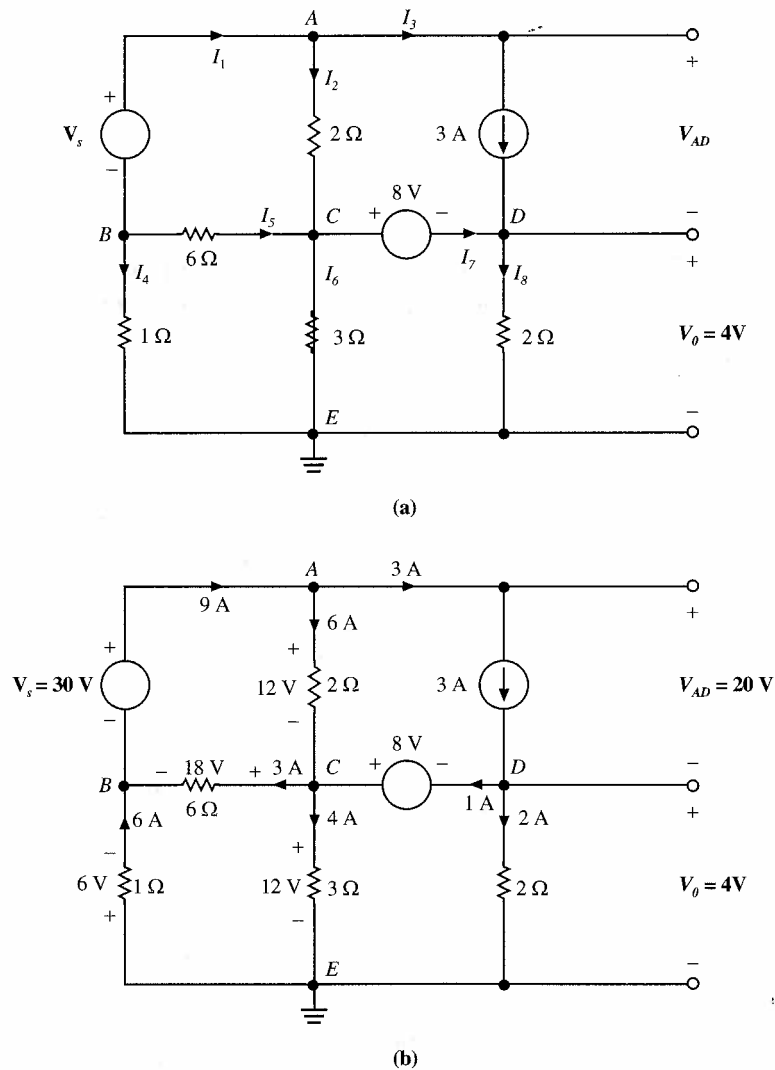
A lei de Kirchhoff para tensão ao redor do laço de cima à direita produz

$$V_{AC} - V_{AD} + 8 = 0$$

ou

$$V_{AD} = 20 \text{ V}$$

O circuito com todas as tensões e correntes posicionadas é mostrado na Figura 2.28b. Observe que a lei de Kirchhoff para corrente é satisfeita em todos os nós e a lei de Kirchhoff para tensão é satisfeita em todos os laços. ■



**Figura 2.28** Exemplo de circuito contendo uma fonte de corrente.

### Exercícios

**E2.16** Determine todas as correntes na rede da Figura E2.16.

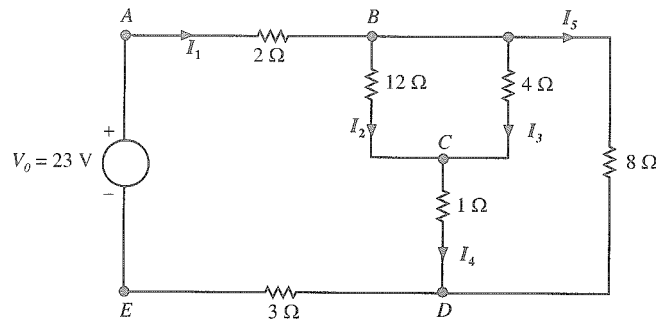


Figura E2.16

*Resp.:*  $I_1 = 3 \text{ A}$ ,  $I_2 = \frac{1}{2} \text{ A}$ ,  $I_3 = \frac{3}{2} \text{ A}$ ,  $I_4 = 2 \text{ A}$ ,  $I_5 = 1 \text{ A}$ .

E2.17 Determine  $V_o$  na rede da Figura E2.16, caso  $I_3$  seja 6 A.

*Resp.:*  $V_o = 92 \text{ V}$ .

## 2.7 Transformações Y (Estrela) $\leftrightarrow \Delta$ (Delta)

Para motivar o estudo deste tópico, considere o circuito da Figura 2.29. Repare que esse circuito tem essencialmente o mesmo número de elementos quanto os contidos nos exemplos anteriores. Entretanto, quando tentamos reduzir o circuito a um circuito equivalente contendo a fonte  $V_1$  e um resistor  $R$ , descobrimos que nenhum dos resistores está em série ou em paralelo com outro. Portanto, não podemos atacar o problema diretamente usando as técnicas que temos aprendido até agora. Entretanto podemos recolocar uma porção do circuito com um circuito equivalente, e tal conversão nos permitirá, facilmente, reduzir a combinação de resistores a uma única resistência equivalente. Tal conversão é chamada de transformação de Y-para-delta ou delta-para-Y.

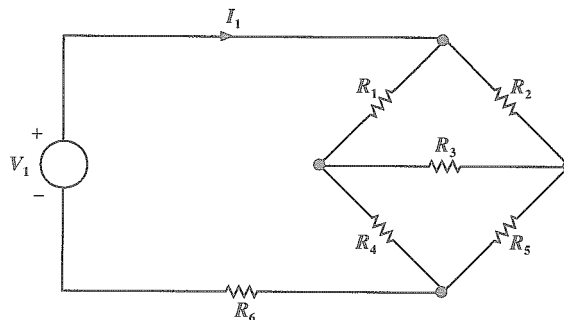


Figura 2.29 Rede usada para ilustrar a necessidade de uma transformação Y  $\leftrightarrow \Delta$  delta.

Consideremos os circuitos mostrados na Figura 2.30. Repare que os resistores na Figura 2.30a formam um  $\Delta$  (delta) e os resistores na Figura 2.30b formam um Y. Se ambas as configurações estão conectadas a somente três terminais  $a$ ,  $b$  e  $c$ , seria extremamente vantajoso se uma equivalência pudesse ser estabelecida entre elas. É, de fato, possível relacionar as resistências de um circuito às de outro de maneira tal que as características vistas dos terminais sejam as mesmas. Esse relacionamento entre as duas configurações do circuito é chamado de transformação Y- $\Delta$ .

A transformação que relaciona as resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  às resistências  $R_a$ ,  $R_b$  e  $R_c$  é obtida a seguir. Para que as duas redes sejam equivalentes a partir de terminais correspondentes, é necessário que a resistência nos terminais correspondentes seja igual (por exemplo, a resistência nos terminais  $a$  e  $b$  com o circuito aberto em  $c$  deve ser a mesma para ambos os circuitos). Portanto, se igualarmos as resistências para cada conjunto correspondente de terminais, obtemos as seguintes equações:

$$R_{ab} = R_a + R_b = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 + R_3}$$



$$R_{bc} = R_b + R_c = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_3 + R_1 + R_2} \quad (2.32)$$

$$R_{ca} = R_c + R_a = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

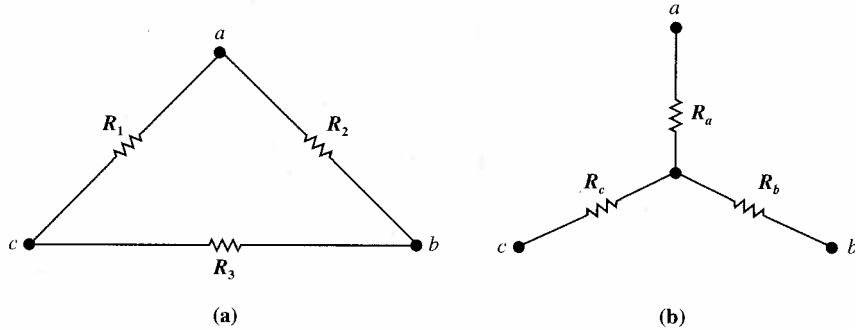


Figura 2.30 Redes de resistência Delta e Y.

Resolvendo esse conjunto de equações para  $R_a$ ,  $R_b$  e  $R_c$ , tem-se

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_b &= \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_c &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned} \quad (2.33)$$

De maneira semelhante, resolvendo-se a Equação 2.32 para  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , obtém-se

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_b} \\ R_2 &= \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_c} \\ R_3 &= \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_a} \end{aligned} \quad (2.34)$$

As equações 2.33 e 2.34 são expressões gerais e se aplicam a qualquer conjunto de resistências conectadas em Y ou  $\Delta$ . Para o caso equilibrado onde  $R_a = R_b = R_c$  e  $R_1 = R_2 = R_3$ , as equações acima podem ser reduzidas a

$$R_Y = \frac{1}{3} R_\Delta \quad (2.35)$$

e

$$R_\Delta = 3R_Y \quad (2.36)$$

É importante notar que não é necessário memorizar as fórmulas das equações 2.33 e 2.34. Uma inspeção detalhada dessas equações e da Figura 2.30 ilustra um padrão definido para os relacionamentos entre as duas configurações. Por exemplo, a resistência conectada ao ponto  $a$  em Y (isto é,  $R_a$ ) é igual ao produto dos dois resistores em  $\Delta$  que estão conectados ao ponto  $a$ , dividido pela soma de todas as resistências de delta.  $R_b$  e  $R_c$  são determinados de maneira semelhante. Similarmente, existem padrões geométricos associados com equações para cálculo dos resistores em delta como uma função daqueles em Y.

Vamos examinar agora o uso da transformação delta  $\leftrightarrow$  Y na análise de um circuito.

**Exemplo 2.25**

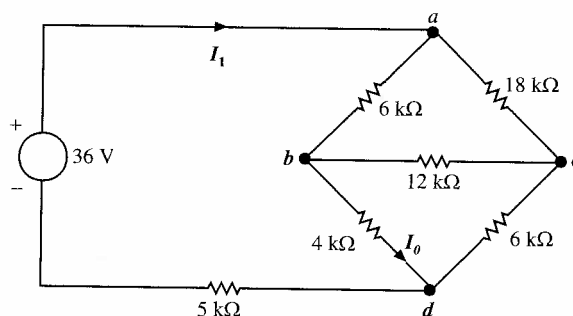
Dado o circuito da Figura 2.31a, vamos determinar a corrente  $I_0$ .

Observe que o lado direito do circuito é essencialmente uma conexão de dois deltas de costas um para o outro. Já que se deseja determinar a corrente no ramo que conecta o ponto  $b$  ao ponto  $d$  no delta mais baixo, aplicaremos a transformação ao delta de cima conectado entre os pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$ . O circuito resultante é mostrado na Figura 2.31b. Desde que os resistores de  $2\text{ k}\Omega$  e  $4\text{ k}\Omega$  estão em série e sua combinação está em paralelo com a combinação em série dos dois resistores de  $6\text{ k}\Omega$  produzindo um resistor de  $4\text{ k}\Omega$ , a corrente da fonte  $I_1$  é

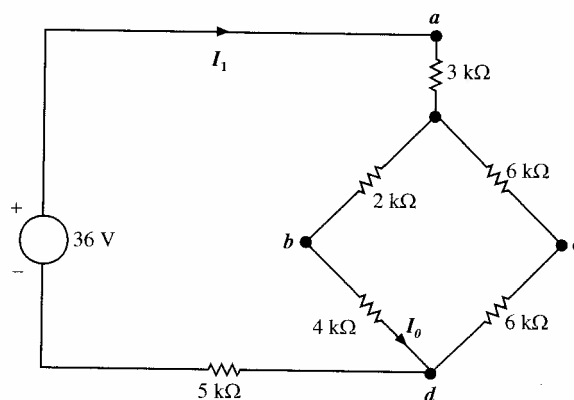
$$I_1 = \frac{36}{3 + 4 + 5} = 3\text{ mA}$$

Usando-se a divisão de corrente, tem-se

$$I_0 = \frac{(3)(6 + 6)}{2 + 4 + 6 + 6} = 2\text{ mA}$$



(a)



(b)

Figura 2.31 Exemplos de circuitos empregando uma transformação delta-Y.

**Exercício**

**E2.18** Determine  $V_0$  no circuito da Figura E2.18.

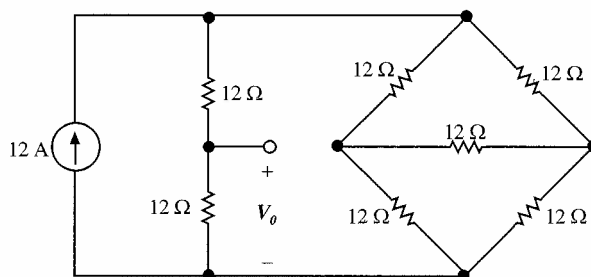


Figura E2.18

Resp.:  $V_o = 48 \text{ V}$ .

## 2.8 Circuitos com Fontes Dependentes

No Capítulo 1 ressaltamos os diferentes tipos de fontes dependentes. Essas fontes controladas são extremamente importantes porque são usadas para modelar componentes físicos tais como transistores de junção bipolar *nnp* e *pnnp* (BJTs – *bipolar junction transistors*) e transistores de efeito de campo (FETs – *field-effect transistors*), que tanto podem ser transistores de efeito de campo de semicondutores óxido-metálico (MOSFETs – *metal-oxide-semiconductor field-effect transistors*) quanto transistores de efeito de campo de porta isolada (IGFETs – *insulated-gate field-effect transistors*). Essas estruturas básicas são, por sua vez, usadas para construir dispositivos digitais e analógicos. Um dispositivo analógico típico é um amplificador operacional (op-amp). Dispositivos digitais típicos são memórias de acesso aleatório (RAMs) memórias somente de leitura (ROMs) e microprocessadores. Mostraremos agora como solucionar circuitos simples de laço único e nó único que contêm tais fontes dependentes. Apesar de os exemplos a seguir serem consideravelmente simples, eles nos servirão para ilustrar conceitos básicos.

O exemplo seguinte emprega uma fonte de tensão controlada por corrente.

### Exemplo 2.26

Considere o circuito mostrado na Figura 2.32. Para determinarmos a tensão  $V_o$  sobre o resistor de  $5 \Omega$ , empregamos a lei de Kirchhoff para tensão:

$$V_s - 5I_1 + 2I_1 - 3I_1 = 0$$

$$24 = I_1(5 + 3 - 2)$$

$$I_1 = 4 \text{ A}$$

Portanto,

$$V_o = (5)(4)$$

$$= 20 \text{ V}$$

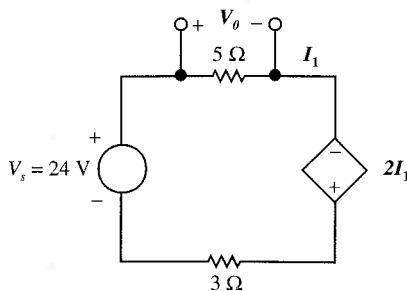
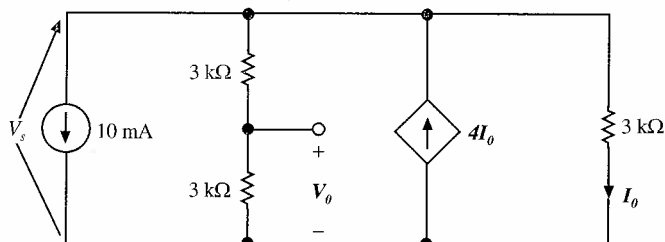


Figura 2.32 Exemplo de circuito contendo uma fonte de tensão controlada por corrente.

**Exemplo 2.27**

Dado o circuito da Figura 2.33 contendo uma fonte de tensão controlada por corrente, deseja-se determinar a tensão  $V_o$ .



**Figura 2.33** Exemplo de circuito contendo uma fonte de tensão controlada por corrente.

Empregando a lei de Kirchhoff para corrente no nó superior, tem-se

$$\frac{V_s}{3 + 3} + \frac{V_s}{3} = 4I_o - 10$$

Porém

$$I_o = \frac{V_s}{3}$$

Portanto

$$\frac{V_s}{6} + \frac{V_s}{3} - \frac{4V_s}{3} = -10$$

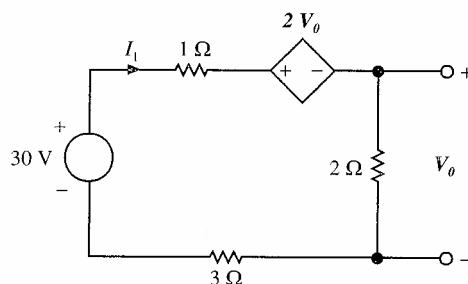
Resolvendo a equação para  $V_s$ , obtém-se

$$V_s = 12 \text{ V}$$

A corrente nos dois resistores de  $3 \text{ k}\Omega$  conectados em série é  $12/(3 \text{ k} + 3 \text{ k}) = 2 \text{ mA}$ . Daí  $V_o = (3 \text{ k})(2 \text{ mA}) = 6 \text{ V}$ . Tal valor poderia também ter sido calculado diretamente, notando-se que a relação entre  $V_s$  e  $V_o$  é um simples divisor da tensão através dos dois resistores idênticos de  $3 \text{ k}\Omega$ . ■

**Exemplo 2.28**

Deseja-se resolver o circuito da Figura 2.34 contendo uma fonte de tensão controlada por tensão para se determinar  $V_o$ .



**Figura 2.34** Exemplo de circuito contendo uma fonte de tensão controlada por tensão.

Aplicando-se a lei de Kirchhoff para tensão a esse circuito de malha única, tem-se

$$30 - 2V_o = (1 + 2 + 3)I_1$$

onde

$$V_o = 2I_1$$

Portanto, a equação acima fica

$$30 - 4I_1 = 6I_1$$

ou

$$I_1 = 3 \text{ A}$$

Então

$$V_o = 2I_1 = 6 \text{ V}$$

### Exemplo 2.29

Dado o circuito da Figura 2.35 contendo uma fonte de corrente controlada por tensão, deseja-se determinar  $V_o$ .

Aplicando a lei de Kirchhoff para corrente, tem-se

$$\left(\frac{V_x}{4}\right) + I_1 - 21 + I_2 = 0$$

ou

$$\left(\frac{V_x}{4}\right) + \frac{V_o}{6} + \frac{V_o}{3} = 21$$

Porém

$$V_x = 2(I_1) = 2\left(\frac{V_o}{6}\right) = \frac{V_o}{3}$$

Portanto

$$\frac{V_o}{12} + \frac{V_o}{6} + \frac{V_o}{3} = 21$$

Resolvendo para  $V_o$ , obtém-se

$$V_o = 36 \text{ V}$$

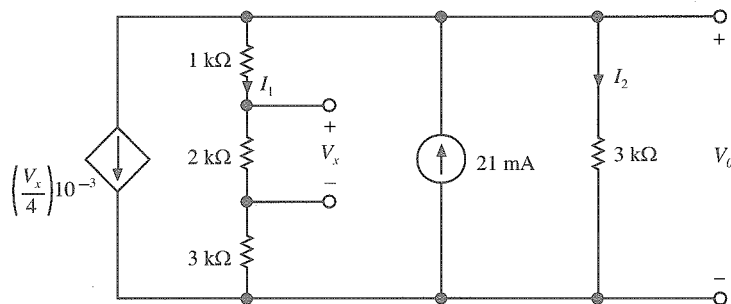


Figura 2.35 Exemplo de circuito contendo uma fonte de corrente controlada por tensão.

É conveniente ressaltar que, ao analisar circuitos com fontes dependentes, primeiro tratamos tais fontes como se fossem fontes independentes, isto é, escrevemos as equações das leis de Kirchhoff para corrente ou tensão. Uma vez escritas tais equações, escrevemos as equações que especificam o relacionamento das fontes dependentes com o parâmetro desconhecido. Por exemplo, a primeira equação no Exemplo 2.28 trata a fonte dependente como uma fonte independente. A segunda equação no exemplo especifica o relacionamento da fonte dependente com a tensão, que é desconhecida na primeira equação.

### Exercícios

E2.19 Determine  $V_o$  no circuito da Figura E2.19.

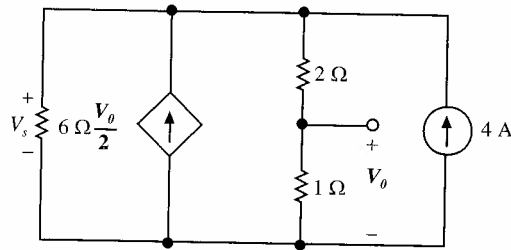


Figura E2.19

Resp.:  $V_o = 4\text{ V}$ .

E2.20 Determine  $V_o$  no circuito da Figura E2.20.

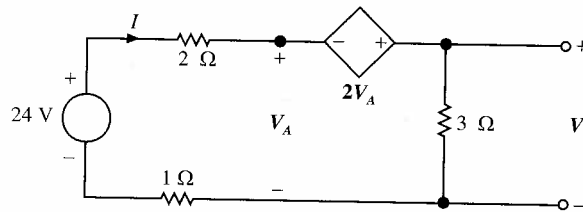


Figura E2.20

Resp.:  $V_o = 18\text{ V}$ .

### Exemplo 2.30

A Figura 2.36a mostra o circuito equivalente para baixos sinais de frequências moderadas de um amplificador em configuração de fonte comum usando transistor de efeito de campo (FET) ou de um amplificador em configuração de emissor comum usando um transistor de junção bipolar (BJT). Deseja-se desenvolver uma expressão para o ganho do amplificador, que é a razão entre a tensão de saída e a tensão de entrada.

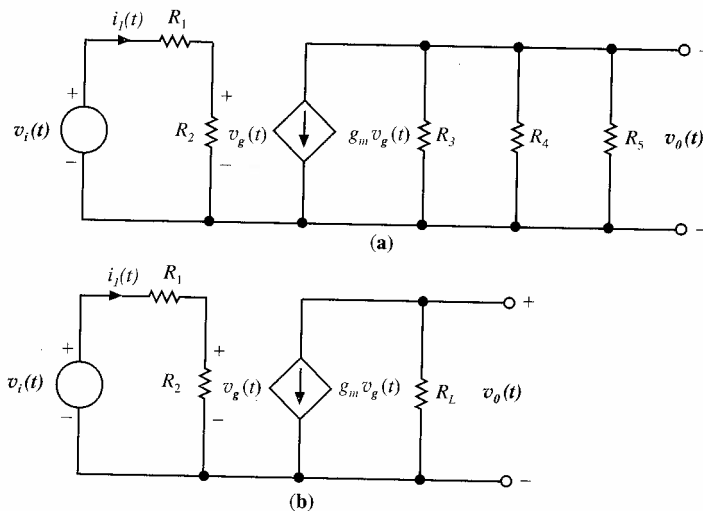


Figura 2.36 Exemplo de circuito contendo uma fonte de corrente controlada por tensão.

Apesar de esse circuito, que contém uma fonte de corrente controlada por tensão, parecer complicado, ele pode ser analisado com as técnicas estudadas até este ponto. O laço da esquerda, ou seja, a entrada do amplificador, é essencialmente desacoplada do estágio de saída do amplificador, mostrado à direita. A tensão sobre  $R_2$  é  $v_g(t)$  e é quem controla a fonte de corrente dependente.

Para simplificar a análise, vamos trocar os resistores  $R_3$ ,  $R_4$  e  $R_5$  por  $R_L$ , de modo que

$$\frac{1}{R_L} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

Portanto, o circuito reduz-se ao que é mostrado na Figura 2.36b. Aplicando-se a lei de Kirchhoff para tensão à porção de entrada do amplificador, tem-se

$$v_i(t) = i_1(t)(R_1 + R_2)$$

e

$$v_g(t) = i_1(t)R_2$$

Resolvendo essas equações para  $v_g(t)$ , tem-se

$$v_g(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i(t)$$

Do circuito de saída, repare que a tensão  $v_o(t)$  é dada pela expressão

$$v_g(t) = -g_m v_g(t) R_L$$

Combinando-se essa equação com a que está logo acima, tem-se

$$v_o(t) = \frac{-g_m R_L R_2}{R_1 + R_2} v_i(t)$$

Portanto, o ganho do amplificador, que é a razão entre a tensão de saída e a tensão de entrada, é dado por

$$\frac{v_o(t)}{v_i(t)} = -\frac{g_m R_L R_2}{R_1 + R_2}$$

Valores razoáveis para os parâmetros do circuito da Figura 2.36a são  $R_1 = 100 \, \Omega$ ,  $R_2 = 1 \, \text{k}\Omega$ ,  $g_m = 0,04 \, \text{S}$ ,  $R_3 = 50 \, \text{k}\Omega$  e  $R_4 = R_5 = 10 \, \text{k}\Omega$ . Portanto, o ganho do amplificador sob tais condições é

$$\begin{aligned} \frac{v_o(t)}{v_i(t)} &= \frac{-(0,04)(4,545)(10^3)(1)(10^3)}{(1,1)(10^3)} \\ &= -165,29 \end{aligned}$$

Logo, o ganho é de 165,29.

## 2.9 Resumo

Este capítulo lidou primeiramente com as leis fundamentais usadas na análise de circuitos, a saber: a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff. O componente resistivo foi introduzido e mostrou-se como calcular a resistência equivalente quando esses elementos são colocados em série ou em paralelo. Tanto as divisões de tensão como as de corrente foram apresentadas. Também foi ilustrado o uso da transformação Y-delta para simplificação de circuitos. Mostrou-se que, com o emprego das leis fundamentais, podemos analisar alguns circuitos razoavelmente complicados contendo fontes dependentes e independentes.

### Pontos-Chave

- Em um curto-circuito, a resistência é zero, a tensão sobre o curto é zero e a corrente no curto é determinada pelo resto do circuito.
- Em um circuito aberto, a resistência é infinita, a corrente é zero e a tensão sobre os terminais abertos é determinada pelo resto do circuito.
- Um nó é um ponto de interconexão de dois ou mais componentes de um circuito.
- Um laço é qualquer caminho fechado através do circuito no qual nenhum nó é percorrido mais do que uma vez.
- Um ramo é uma porção do circuito contendo somente um único componente e os nós no final de cada elemento.
- A lei de Kirchhoff para corrente afirma que a soma algébrica das correntes entrando em um nó é zero.
- A lei de Kirchhoff para tensão afirma que a soma algébrica das tensões ao longo de um caminho fechado é zero.
- A divisão de corrente mostra que a corrente se divide entre resistores em paralelo em proporção inversa da resistência do ramo.

- A divisão de tensão mostra que a tensão se divide entre resistores em série na proporção direta de suas resistências.
- A transformação Y-delta nos permite construir uma troca equivalente entre resistores conectados em configuração delta e resistores conectados em configuração Y.

### Problemas

2.1 Determine  $I_0$ ,  $I_1$  e  $I_2$  no circuito da Figura P2.1.

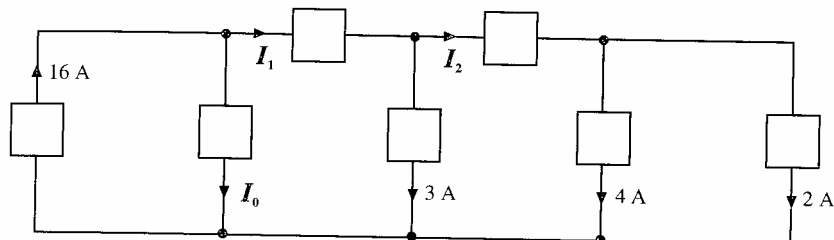


Figura P2.1

2.2 Determine  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$  no circuito da Figura P2.2.

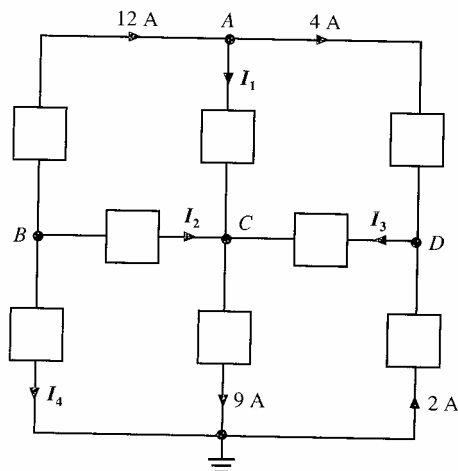


Figura P2.2

2.3 Já que a lei de Kirchhoff para corrente deve ser satisfeita a cada partição que corta o circuito em duas partes, use as partições para encontrar as correntes desconhecidas no circuito da Figura P2.3.

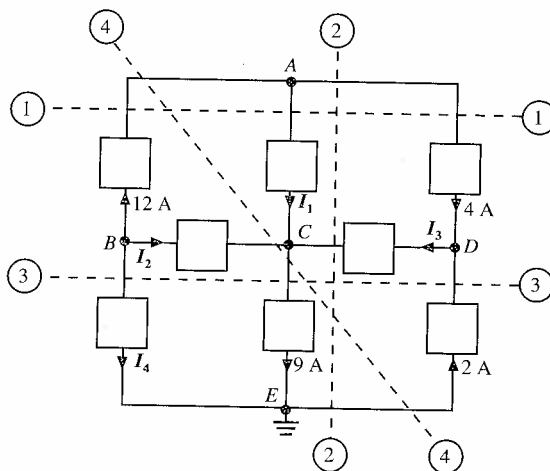


Figura P2.3



- 2.4 Determine a potência dissipada no resistor de  $2\ \Omega$  do circuito mostrado na Figura P2.4.

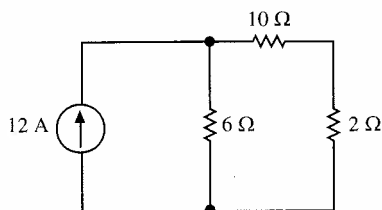


Figura P2.4

- 2.5 Determine a potência dissipada no resistor de  $1\ \Omega$  do circuito mostrado na Figura P2.5.

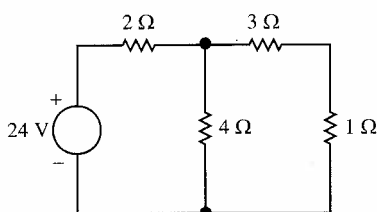


Figura P2.5

- 2.6 Determine  $I_1$  no circuito mostrado na Figura P2.6.

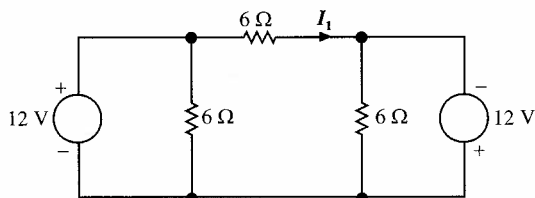


Figura P2.6

- 2.7 Dado o circuito da Figura P2.7, determine  $V_o$  e  $I_o$ .

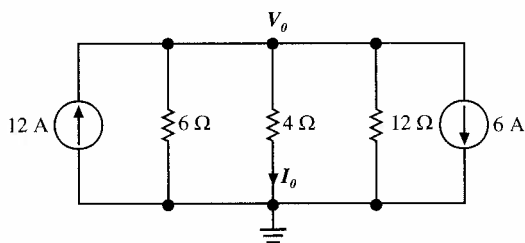


Figura P2.7

- 2.8 Determine a condutância equivalente no circuito da Figura P2.8.

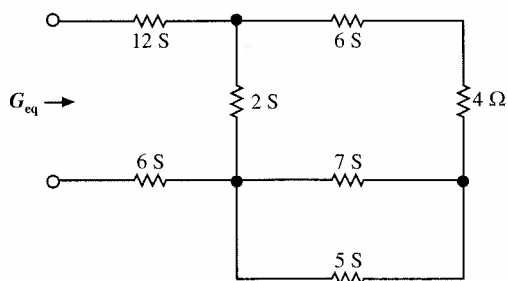


Figura P2.8

2.9 Determine a resistência equivalente do circuito da Figura P2.9.

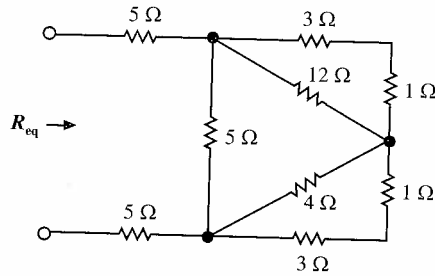


Figura P2.9

2.10 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.10.

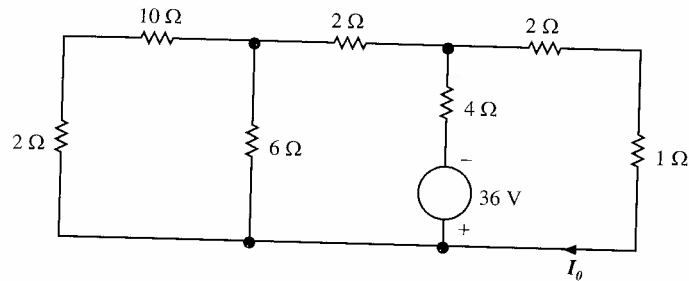


Figura P2.10

2.11 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P2.11.

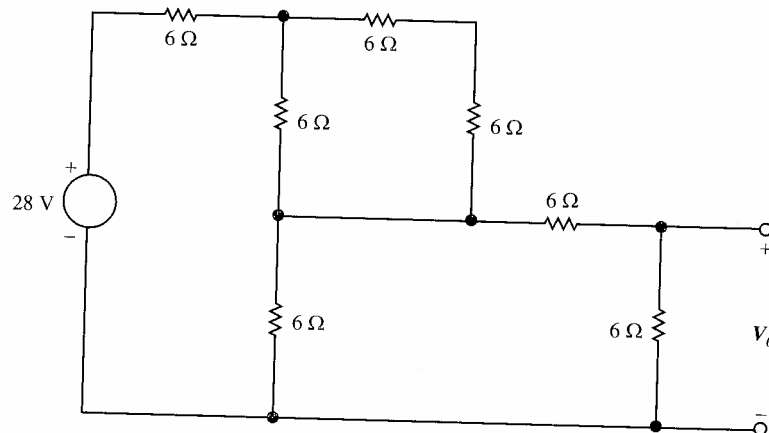


Figura P2.11

2.12 Determine  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$  no circuito da Figura P2.12.

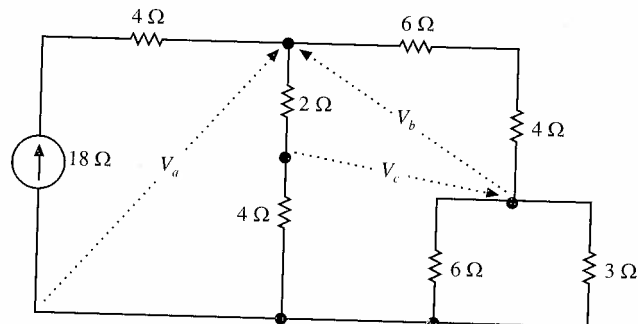


Figura P2.12

2.13 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P2.13.

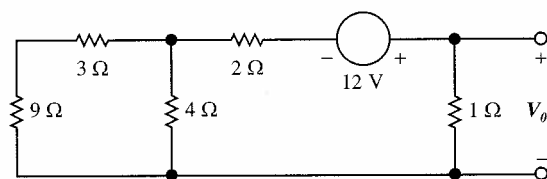


Figura P2.13

2.14 Determine  $I_1$  e  $V_o$  no circuito da Figura P2.14.

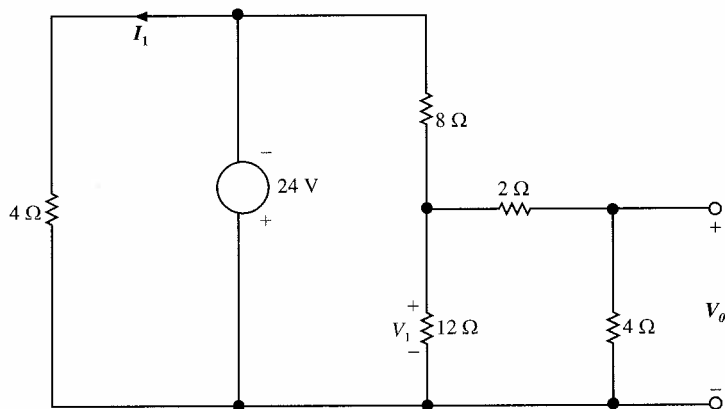


Figura P2.14

2.15 Determine  $I_1$  e  $V_o$  no circuito da Figura P2.15.

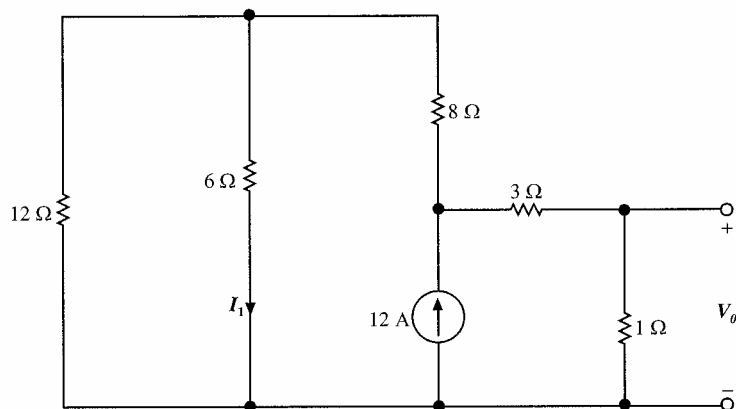


Figura P2.15

2.16 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.16.

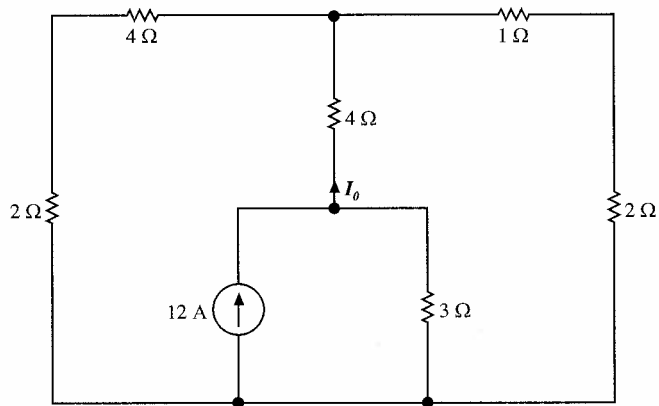


Figura P2.16

2.17 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P2.17.

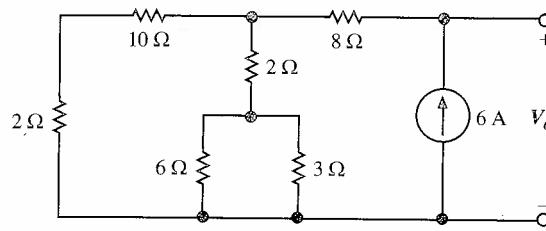


Figura P2.17

2.18 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.18.

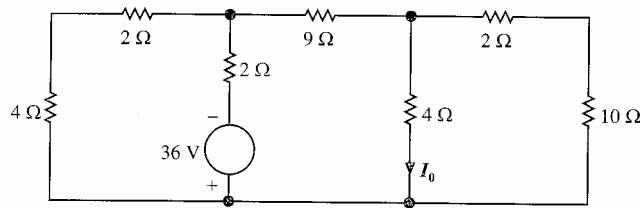


Figura P2.18

2.19 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.19.

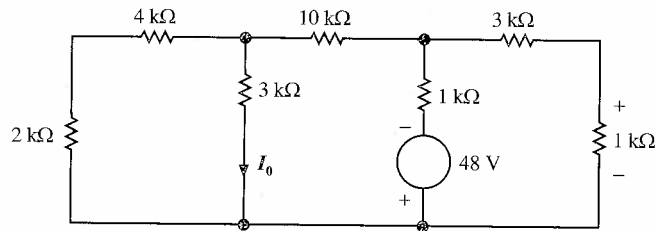


Figura P2.19

2.20 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P2.20.

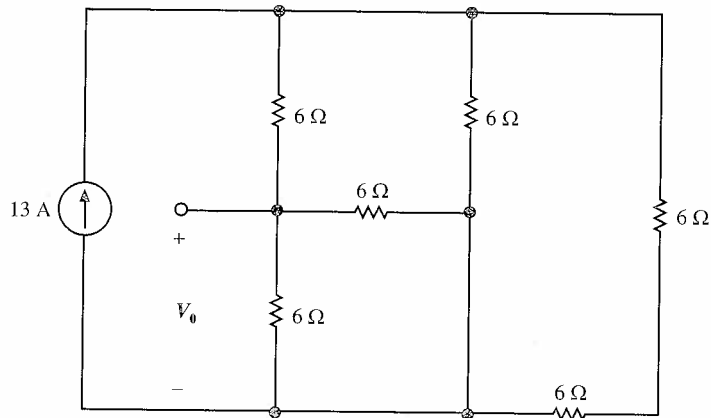


Figura P2.20

2.21 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P2.21.

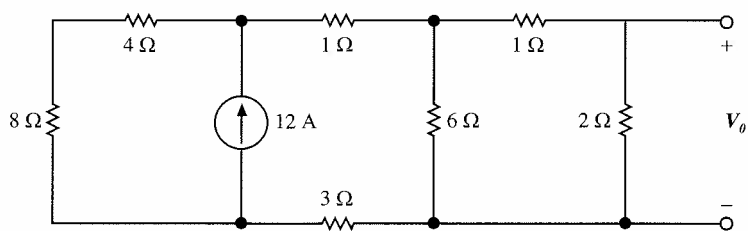


Figura P2.21

2.22 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.22.

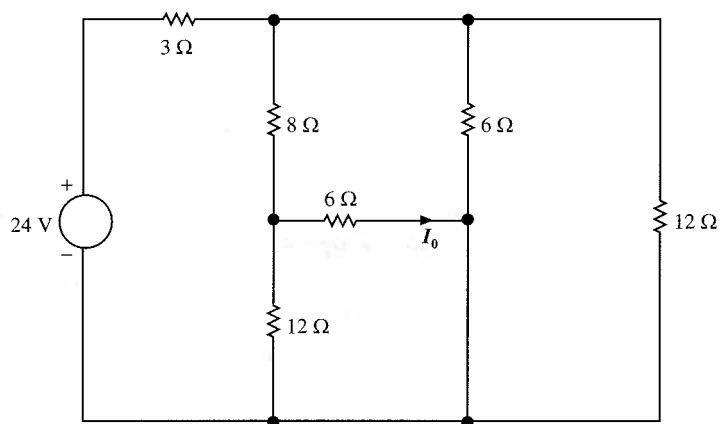


Figura P2.22

2.23 Determine  $I_o$  no circuito da Figura 2.23.

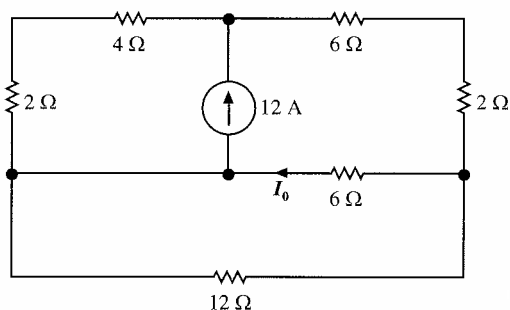


Figura P2.23

2.24 O circuito da Figura P2.24 é utilizado em conversores digital-para-analógico. Determine expressões para  $I_1$ ,  $I_3$  e  $I_5$  em termos de  $I_o$ .

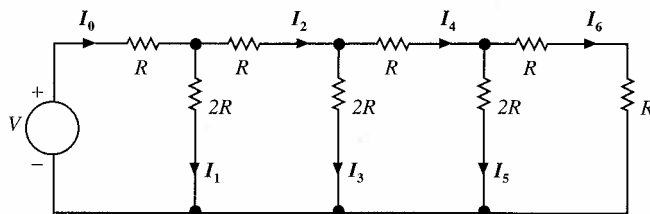


Figura P2.24

2.25 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P2.25.

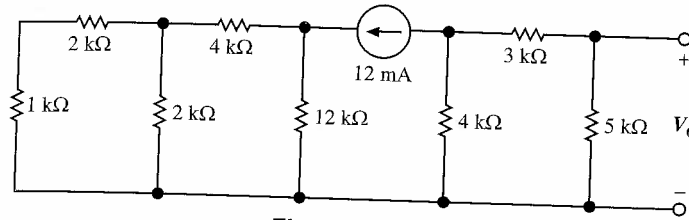


Figura P2.25

2.26 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.26.

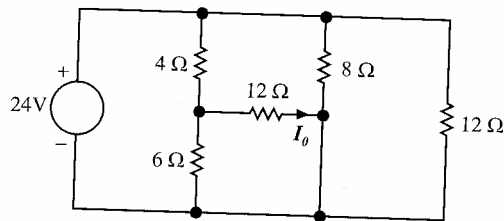


Figura P2.26

2.27 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.27.

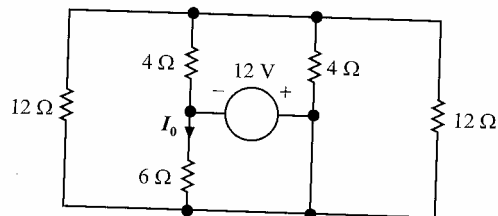


Figura P2.27

2.28 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.28.

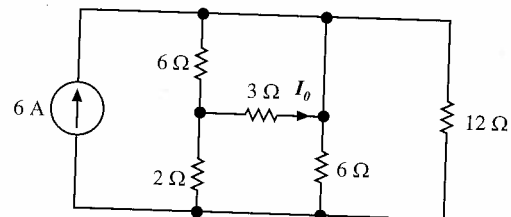


Figura P2.28

2.29 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.29.

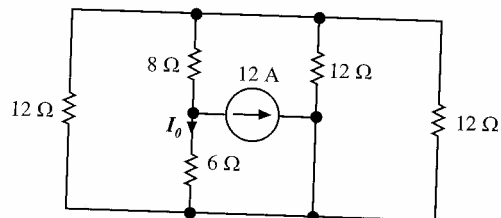


Figura P2.29

2.30 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.30.

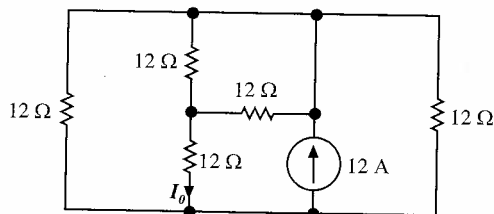


Figura P2.30

2.31 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.31.

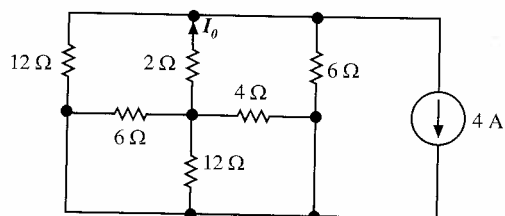


Figura P2.31

2.32 Dado  $V_o = 12$  V no circuito da Figura P2.32, calcule  $V_s$ .

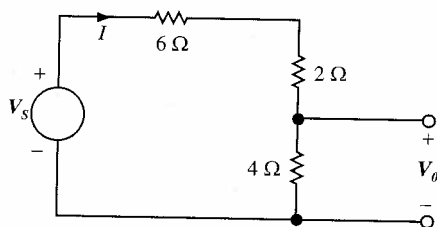


Figura P2.32

2.33 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P2.33.

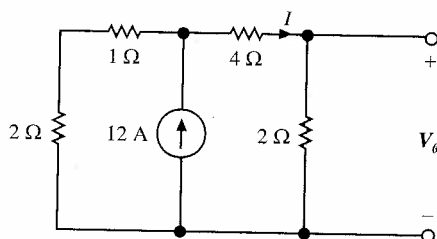


Figura P2.33

2.34 No circuito da Figura P2.34, se  $I_1 = 6$  A, calcule  $V_o$ .

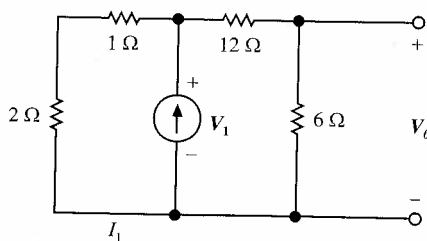


Figura P2.34

- 2.35 No circuito da Figura P2.35, se  $P_{6\Omega} = 24 \text{ W}$ , calcule  $P_{V_s}$ .

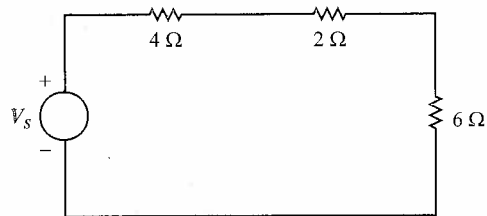


Figura P2.35

- 2.36 No circuito da Figura P2.36, se  $V_o = 12 \text{ V}$ , calcule  $P_I$ .

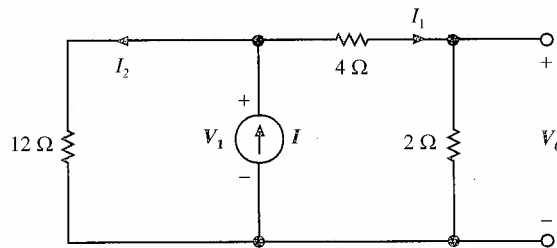


Figura P2.36

- 2.37 A potência dissipada pelo resistor de  $4 \Omega$  no circuito da Figura P2.37 é de  $64 \text{ W}$ . Determine  $V_s$ .

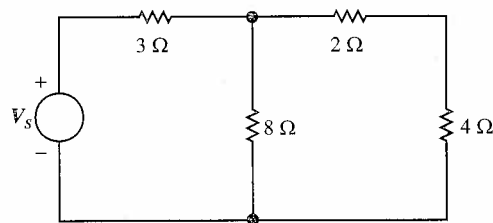


Figura P2.37

- 2.38 No circuito da Figura P2.38,  $I = 4 \text{ A}$ , calcule  $V_s$ .

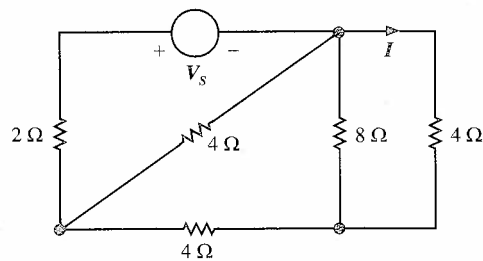


Figura P2.38

- 2.39 No circuito da Figura P2.39, se  $V_o = 12 \text{ V}$ , calcule  $V_s$ .

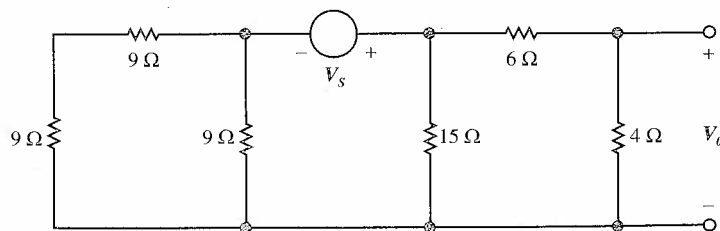


Figura P2.39



- 2.40 No circuito da Figura P2.40, se  $I_o = 4$  A, calcule  $I_S$ .

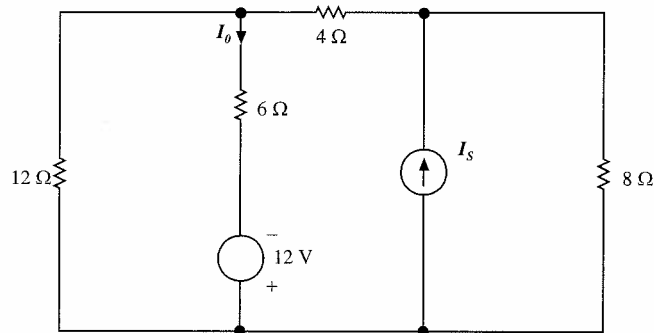


Figura P2.40

- 2.41 No circuito da Figura P2.41, se  $V_o = 4$  V, calcule  $R$ .

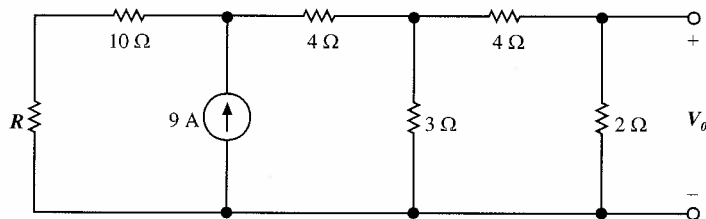


Figura P2.41

- 2.42 No circuito da Figura P2.42, se  $V_o = 12$  V, calcule  $R$ .

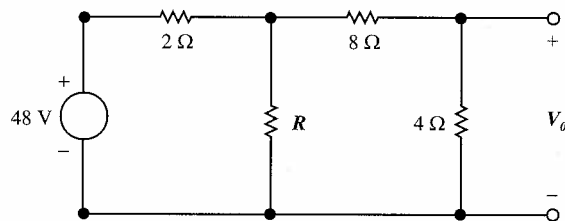


Figura P2.42

- 2.43 No circuito da Figura P2.43, se  $V_1 = 16$  V, calcule  $R$ .

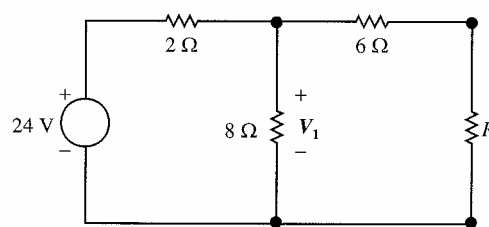


Figura P2.43

- 2.44 Dado o circuito da Figura P2.44, se  $V_o = 12$  V, calcule  $I_S$ .

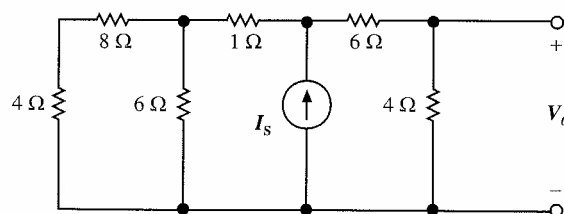


Figura P2.44

2.45 No circuito da Figura P2.45, se  $I_o = 2$  A, calcule  $V_S$ .

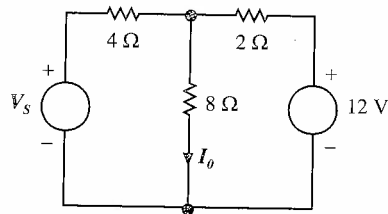


Figura P2.45

2.46 No circuito da Figura P2.46, se  $V_o = 12$  V, calcule  $I_o$ .

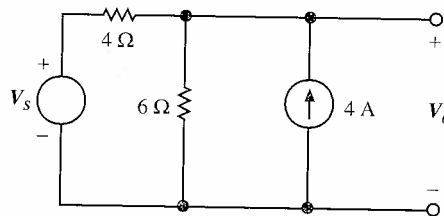


Figura P2.46

2.47 No circuito da Figura P2.47, se  $V_o = 12$  V, calcule  $V_S$ .

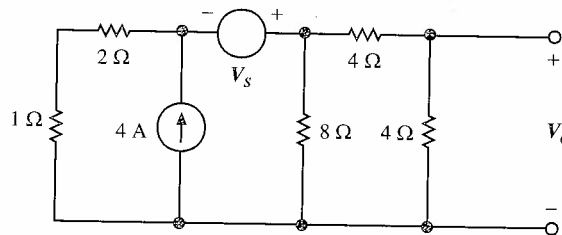


Figura P2.47

2.48 No circuito da Figura P2.48, se  $I_o = 2$  A, calcule  $I_S$ .

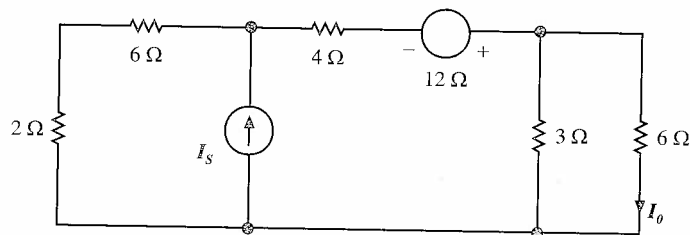


Figura P2.48

2.49 No circuito da Figura P2.49, se  $V_o = 12$  V, calcule  $V_S$ .

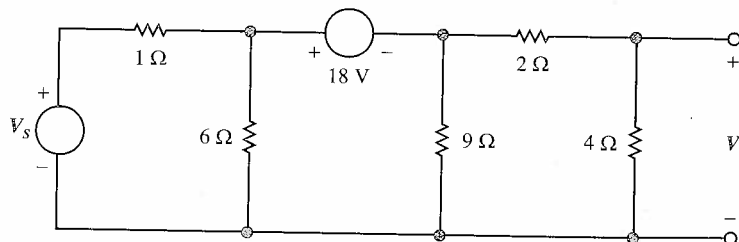
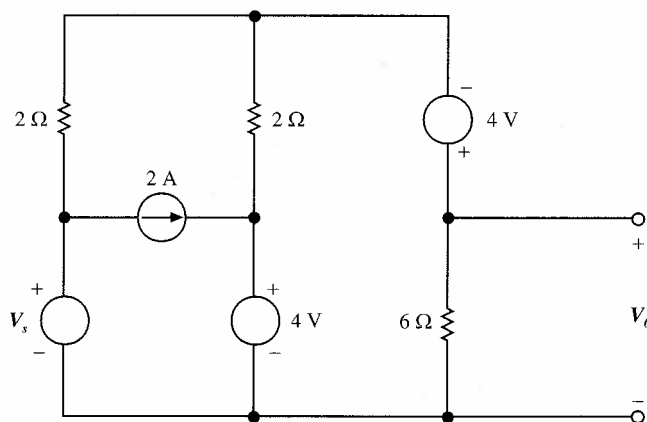


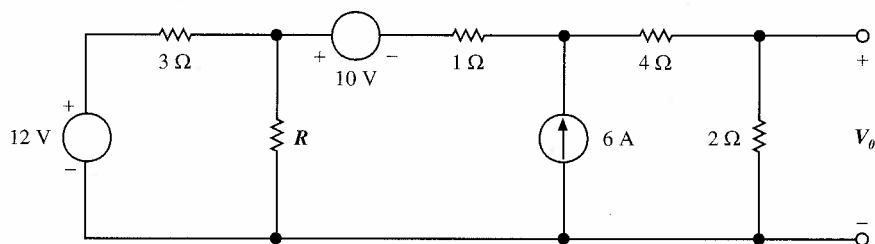
Figura P2.49

**2.50** Determine a potência fornecida ou dissipada pela fonte  $V_S$  no circuito da Figura P2.50.



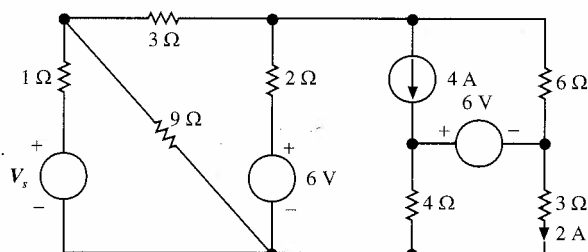
**Figura P2.50**

**2.51** No circuito da Figura P2.51, se  $V_o = 4$  V, calcule  $R$ .



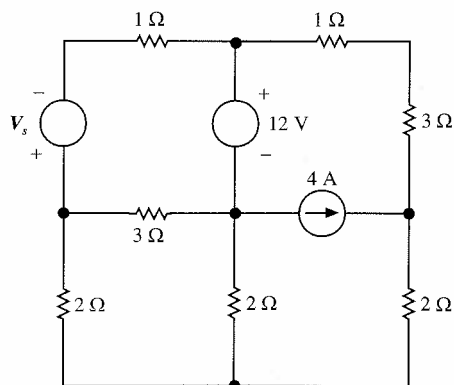
**Figura P2.51**

**2.52** Calcule  $V_S$  no circuito na Figura P2.52.



**Figura P2.52**

**2.53** No circuito da Figura P2.53, a fonte de 4 A fornece 24 W de potência ao circuito. Calcule  $V_S$ .



**Figura P2.53**

2.54 Se  $I_O = 2 \text{ mA}$  no circuito da Figura P2.54, calcule  $I_S$ .

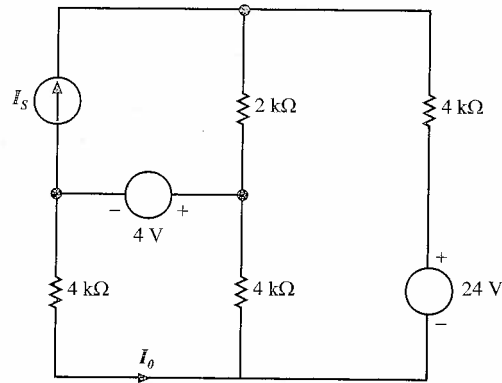


Figura P2.54

2.55 Dado  $I_O = 2 \text{ mA}$  no circuito da Figura P2.55, calcule  $V_O$ .

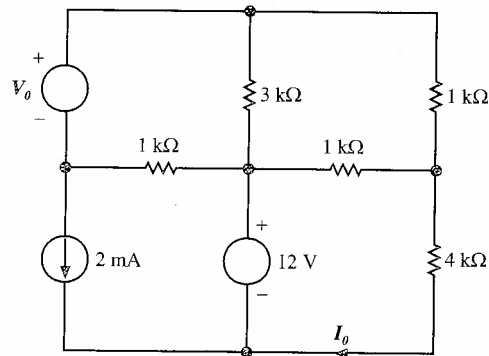


Figura P2.55

2.56 Dado o circuito da Figura P2.56, se a potência gerada pela fonte de 4 A é de 48 W, determine  $V_O$ .

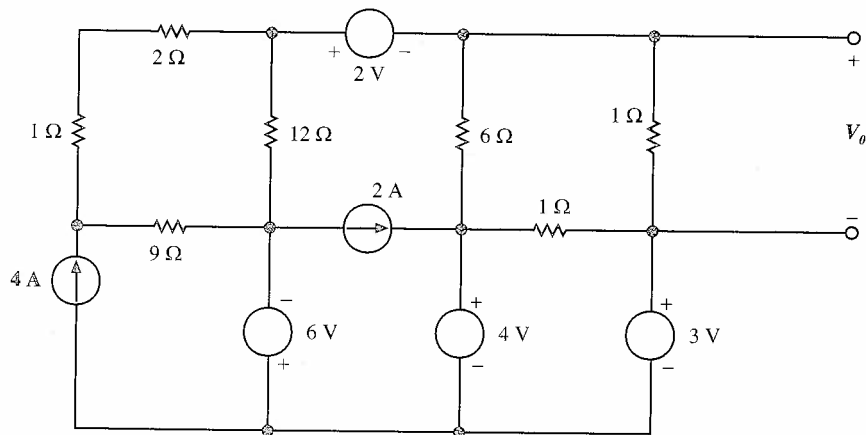


Figura P2.56

2.57 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.57.

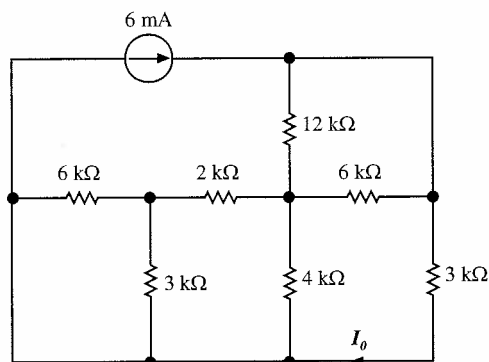


Figura P2.57

2.58 Encontre a potência dissipada pelo circuito da Figura P2.58.

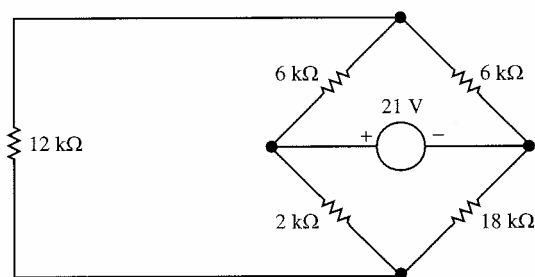


Figura P2.58

2.59 Calcule  $I_o$  no circuito da Figura P2.59.

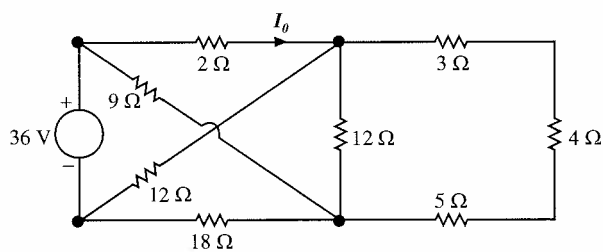


Figura P2.59

2.60 Calcule  $I_o$  no circuito da Figura P2.60.

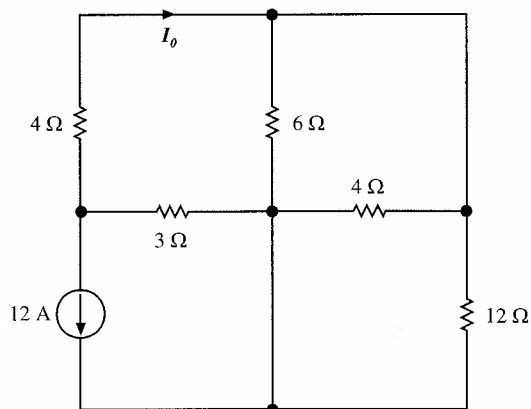


Figura P2.60

2.61 Calcule  $I_o$  no circuito da Figura P2.61.

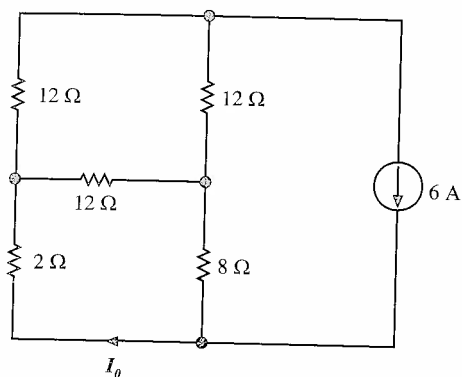


Figura P2.61

2.62 Calcule  $I_o$  no circuito da Figura P2.62.

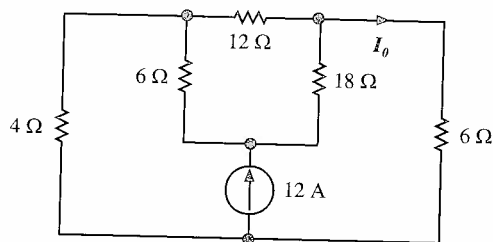


Figura P2.62

2.63 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P2.63.

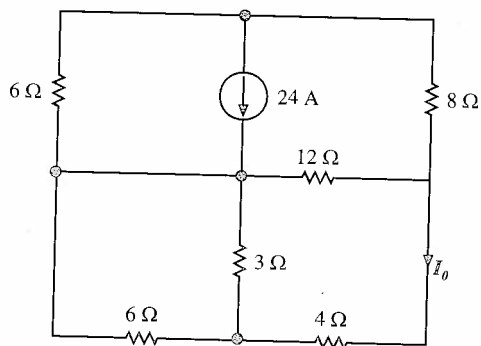


Figura P2.63

2.64 Calcule  $I_o$  no circuito da Figura P2.64.

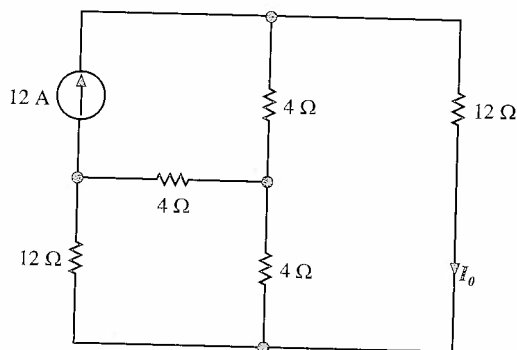


Figura P2.64

2.65 Calcule  $I_o$  no circuito da Figura P2.65.

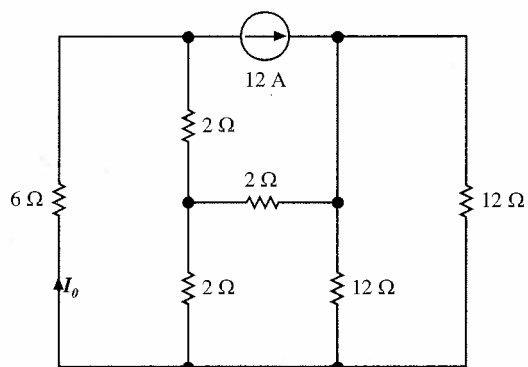


Figura P2.65

2.66 Calcule  $I_o$  no circuito da Figura P2.66.

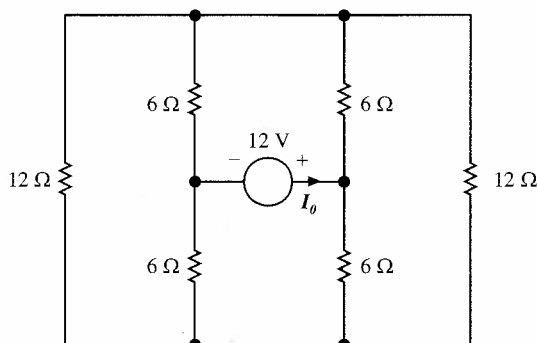


Figura P2.66

2.67 Qual deve ser o valor de  $R_o$  no circuito da Figura P2.67 se a corrente  $I_o$  é de 4 A?

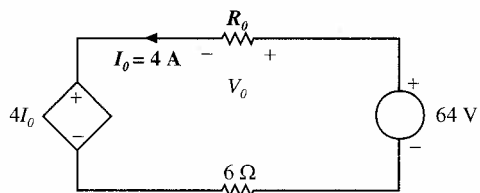


Figura P2.67

2.68 Calcule  $V_o$  no circuito da Figura P2.68.

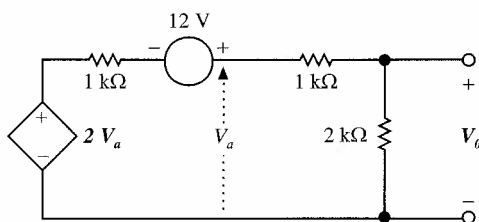


Figura P2.68

2.69 Calcule a tensão  $V_o$  no circuito mostrado na Figura P2.69.

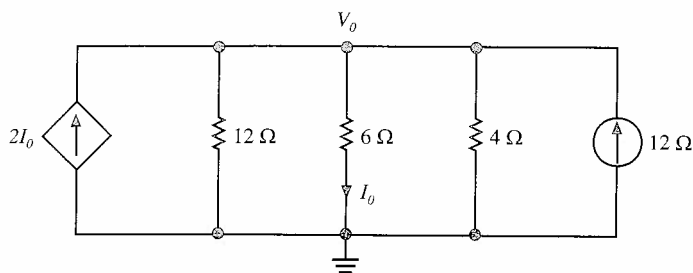


Figura P2.69

2.70 Calcule a potência dissipada pelo resistor de  $12\ \Omega$  no circuito da Figura P2.70.

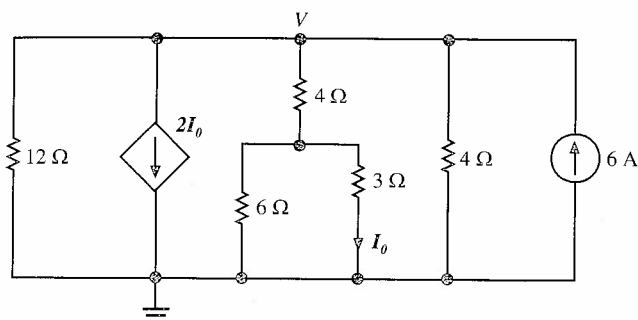


Figura P2.70

2.71 Calcule a tensão  $V_o$  no circuito da Figura P2.71.

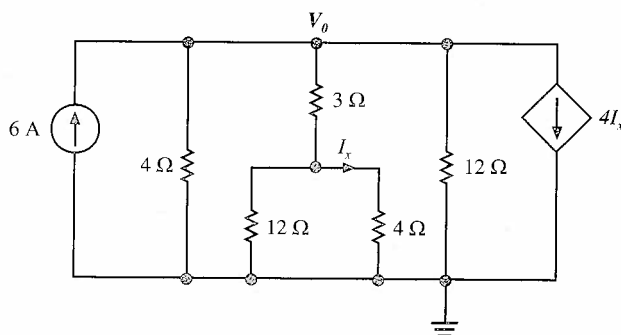


Figura P2.71



# Técnicas de Análises Nodal e de Laço

No Capítulo 2 foram analisados circuitos simples. Tais circuitos continham apenas um único par de nós ou um único laço. Esses circuitos podem ser completamente analisados através de uma única equação algébrica. No caso de circuitos com um único par de nós (ou seja, um circuito com dois nós, um dos quais é o nó de referência), uma vez que a tensão no nó é conhecida, podemos calcular todas as correntes. Em um circuito de laço único, uma vez conhecida a corrente no laço, podemos calcular todas as tensões.

Neste capítulo será desenvolvida uma sistemática para calcular todas as correntes e tensões em circuitos com múltiplos nós e laços. Nossa análise está baseada primeiramente em duas leis com as quais já estamos familiarizados: lei de Kirchhoff para corrente (LKC) e lei de Kirchhoff para tensão (LKT). Em uma análise nodal empregamos a LKC para determinar as tensões nos nós, e em uma análise de laço usamos a LKT para determinar as correntes nos laços. Introduziremos brevemente a topologia de redes e demonstraremos seu uso na aplicação de equações LKC e LKT. Finalmente, discutiremos um circuito muito importante conhecido como amplificador operacional.

## 3.1 Análise Nodal

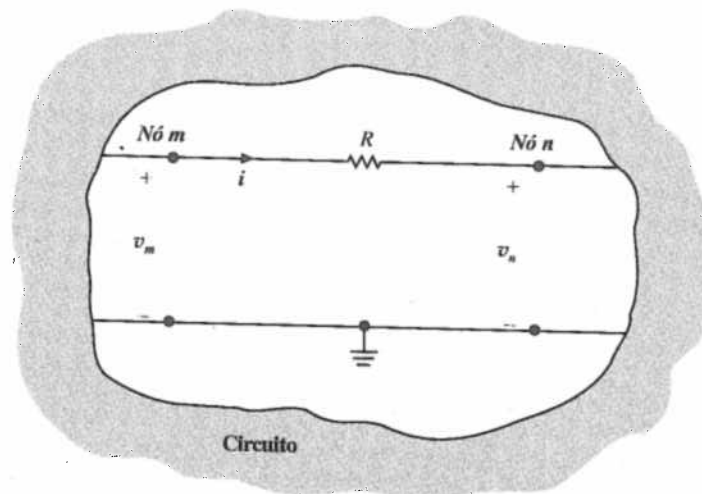
Na análise nodal, as variáveis em um circuito são selecionadas para ser a tensão nos nós. Tal tensão é definida em relação a um ponto comum no circuito. Um nó é selecionado como nó de referência, e todas as outras tensões nodais são definidas em relação àquele nó. Normalmente o nó de referência é aquele ao qual o maior número de ramos está conectado. Ele é geralmente chamado de *terra* porque é sabido estar a um potencial nulo de terra, e às vezes representa o chassi ou a linha terra em um circuito prático.

As variáveis serão selecionadas como sendo positivas em relação ao nó de referência. Se uma tensão nodal for negativa em relação ao nó de referência, a análise revelará isso.

Suponhamos por um momento que conhecemos todas as tensões nos nós de um dado circuito. Cada elemento resistivo no circuito está conectado entre dois nós, um dos quais pode ser o nó de referência. Portanto, a tensão sobre cada elemento resistivo é conhecida. Logo, com referência à Figura 3.1, podemos usar a lei de Ohm, que é

$$i = \frac{V_m - V_n}{R} \quad (3.1)$$

para calcular a corrente através de qualquer elemento resistivo. Desse modo podemos determinar todas as tensões e todas as correntes em um circuito.



**Figura 3.1** Circuito utilizado para ilustrar a lei de Ohm em uma rede de múltiplos nós.

Em um circuito de nó duplo (ou seja, aquele que contém dois nós, um dos quais é o nó de referência), uma única equação é necessária para determinar a tensão desconhecida do nó. No caso de um circuito com  $N$  nós,  $N - 1$  equações lineares independentes simultâneas são necessárias para determinar as  $N - 1$  tensões desconhecidas. Essas equações são escritas empregando-se a LKC em  $N - 1$  dos  $N$  nós.

Consideremos, por exemplo, o circuito mostrado na Figura 3.2a. Esse circuito possui três nós. O nó de baixo é selecionado como nó de referência e é então marcado usando-se o símbolo  $\perp$ . Assume-se que esse nó de referência está a um potencial zero e as tensões nos nós  $v_1$  e  $v_2$  são definidas em relação a esse nó; isto é, se  $v_1 = 4$  V e  $v_2 = 16$  V, a tensão sobre  $R_1$  e  $R_2$  é 4 V, a tensão sobre  $R_4$  e a fonte de corrente é 16 V e a tensão sobre  $R_3$  é  $16 - 4 = 12$  V. O terminal à direita de  $R_3$  é positivo em relação ao terminal à esquerda e, portanto, a corrente fluirá da direita para a esquerda através de  $R_3$ , como ilustrado pela Figura 3.2a. Assim, aplicando a lei de Ohm para acharmos a corrente em um resistor, tomamos a diferença de potencial entre os dois terminais de um resistor e dividimos pelo valor do resistor. Como mostrado na Figura 3.2a, a corrente fluirá do terminal de maior potencial para o terminal de potencial mais baixo.

O circuito foi redesenhado na Figura 3.2b para indicar os nós mais claramente. Convencionou-se que as correntes nos ramos circulem nas direções indicadas nas figuras. Se uma das correntes circula no ramo na direção oposta àquela que foi convencionada, a análise indicará uma corrente negativa.

Aplicando-se a LKC no nó 1, tem-se

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

Usando-se a lei de Ohm e notando que o nó de referência está em um potencial zero, obtém-se

$$\frac{v_1 - 0}{R_1} + \frac{v_1 - 0}{R_2} - \frac{v_2 - v_1}{R_3} = 0$$

ou

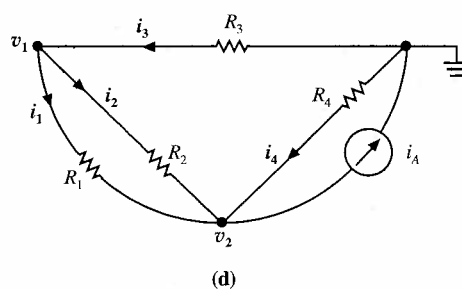
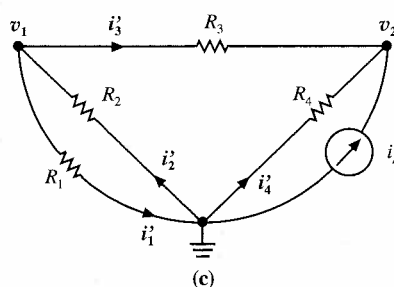
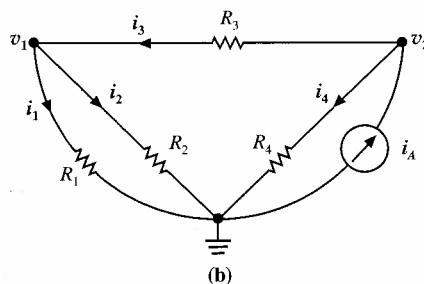
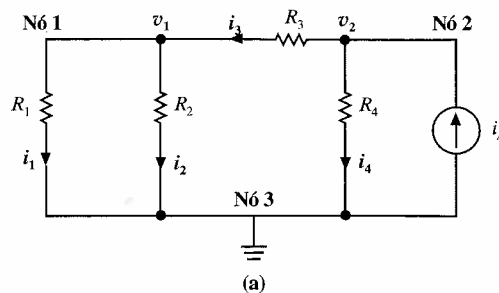
$$v_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - v_2 \frac{1}{R_3} = 0$$

que pode, ao certo, ser escrita

$$v_1 (G_1 + G_2 + G_3) - v_2 (G_3) = 0$$

No nó 2, a LKC para as correntes deixando o nó é

$$+i_3 + i_4 - i_A = 0$$



**Figura 3.2** Circuito de três nós.

Note que desde que  $i_A$  entra no nó,  $-i_A$  deixa o nó. Tal equação pode ser escrita

$$+\frac{v_2 - v_1}{R_3} + \frac{v_2 - 0}{R_4} - i_A = 0$$

ou

$$-v_1 \frac{1}{R_3} + v_2 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = i_A$$

que também pode ser escrita como

$$-v_1(G_3) + v_2(G_3 + G_4) = i_A$$

Portanto, as duas equações, que determinam as tensões nos nós, são

$$\begin{aligned} v_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - v_2 \frac{1}{R_3} &= 0 \\ -v_1 \frac{1}{R_3} + v_2 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) &= i_A \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observe que a análise produziu duas equações simultâneas em função das incógnitas  $v_1$  e  $v_2$ . Elas podem ser resolvidas usando-se qualquer técnica conveniente. No Apêndice A, dois métodos para se resolver equações simultâneas são apresentados. O primeiro é chamado de eliminação gaussiana e o segundo envolve o uso de matrizes. Como mostrado no apêndice, a Equação 3.2 pode ser escrita em forma matricial como

$$Av=i \quad (3.3)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad i = \begin{bmatrix} 0 \\ i_A \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_A \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Em geral, a solução da Equação 3.3 é

$$v = A^{-1}i \quad (3.5)$$

onde  $A^{-1}$  é a matriz inversa de  $A$ . Como regra geral, métodos matriciais usados em conjunto com um computador digital são extremamente úteis em análise de circuitos.

As equações LKC para os nós 1 e 2 produzem as seguintes equações simultâneas lineares independentes:

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 + i_4 - i_A &= 0 \end{aligned}$$

A equação LKC para o nó terra (o terceiro) é

$$i_1 + i_2 + i_4 - i_A = 0$$

Note que se somarmos as duas primeiras equações, obteremos a terceira. Além disso, qualquer conjunto de duas equações pode ser usado para derivar a terceira equação. Portanto, nesse circuito em que  $N = 3$  nós, somente  $N - 1 = 2$  das equações são linearmente independentes e necessárias para determinar as  $N - 1 = 2$  tensões nodais desconhecidas.

Note que uma análise nodal emprega a LKC em conjunto com a lei de Ohm. Uma vez que o sentido das correntes de ramo seja *convencionado*, então a lei de Ohm, como ilustrado pela Figura 3.1 e expresso pela Equação 3.1, é utilizada para expressar as correntes de ramo em termos das tensões desconhecidas nos nós. Podemos assumir que as correntes estão em qualquer direção. Entretanto, uma vez que assumimos determinado sentido, devemos ter o cuidado de escrever as correntes corretamente em termos das tensões nos nós usando-se a lei de Ohm. Por exemplo, suponhamos que o sentido das correntes nos ramos está como o mostrado na Figura 3.2c. Nota-se então que quando empregamos a lei de Ohm, como ilustrado na Figura 3.1 e expresso na Equação 3.1, a corrente em um resistor é igual à diferença de potencial entre os dois terminais do resistor dividido pelo valor do resistor, e a corrente flui do terminal de maior potencial para o terminal de potencial mais baixo. As correntes de ramo para o circuito da Figura 3.2c são

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1 - 0}{R_1} & i_3 &= \frac{v_1 - v_2}{R_3} \\ i_2 &= \frac{0 - v_1}{R_2} & i_4 &= \frac{0 - v_2}{R_4} \end{aligned}$$

A LKC aplicada aos dois nós do circuito da Figura 3.2c produz

$$i_1' - i_2' + i_3' = 0$$

e

$$i_3' + i_4' + i_A = 0$$

Quando combinamos essas equações para o circuito da Figura 3.2c, obtemos as mesmas equações para a tensão no nó que derivamos para a rede da Figura 3.2a e b.

### Exemplo 3.1

Suponhamos que a rede mostrada na Figura 3.2 tenha os seguintes parâmetros:  $R_1 = 0,5 \, \Omega$ ,  $R_2 = 1 \, \Omega$ ,  $R_3 = 1 \, \Omega$ ,  $R_4 = 0,5 \, \Omega$  e  $i_A = I_A = 11 \, \text{A}$ . Então, a Equação 3.2 torna-se

$$4V_1 - V_2 = 0$$

$$-V_1 + 3V_2 = 11$$

onde, como especificado no Capítulo 1, empregamos letras maiúsculas porque as tensões são constantes.

Usando-se eliminação gaussiana, resolvemos a primeira equação para  $V_1$  em termos de  $V_2$ ; isto é,

$$V_1 = \frac{V_2}{4}$$

Esse valor é então substituído na segunda equação para termos

$$-\frac{V_2}{4} + 3V_2 = 11$$

ou

$$V_2 = 4 \, \text{V}$$

Esse valor para  $V_2$  é agora substituído de volta na equação para  $V_1$  em termos de  $V_2$ , que produz

$$V_1 = \frac{V_2}{4} = 1 \, \text{V}$$

As equações do circuito podem também ser resolvidas usando-se análise matricial. Nesse caso, tem-se

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Para se calcular a matriz inversa de  $A$ , precisamos da adjacente e do determinante. A adjacente é

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

e o determinante é

$$|A| = (3)(4) - (-1)(-1) = 11$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Então  $V_1 = 1 \text{ V}$  e  $V_2 = 4 \text{ V}$ .

Conhecendo-se as tensões nos nós, podemos determinar todas as correntes pela lei de Ohm:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{1}{1} = 1 \text{ A}$$

e

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{V_2 - V_1}{R_3} \\ &= \frac{4 - 1}{1} \\ &= 3 \text{ A} \end{aligned}$$

Note que o valor positivo de  $I_3$  significa simplesmente que a corrente está na realidade fluindo no circuito da direita para a esquerda como indicado pelos valores de  $I$ . A soma das correntes deixando o nó 1 é

$$I_1 + I_2 - I_3 = 2 + 1 - 3 = 0$$

A corrente

$$I_4 = \frac{V_2}{R_4} = \frac{4}{0,5} = 8 \text{ A}$$

e a soma das correntes deixando o nó 2 é

$$+I_3 + I_4 - I_A = 3 + 8 - 11 = 0$$

Desde que a LKC seja satisfeita em cada nó, as respostas serão coerentes.

Antes de abandonar esse exemplo, vamos examinar o caso em que o nó  $v_2$  e o nó de terra ( $\perp$ ) no circuito da Figura 3.2b são trocados entre si como mostrado na Figura 3.2d. As equações LKC para esse caso são

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \\ i_1 + i_2 + i_4 - i_A &= 0 \end{aligned}$$

ou

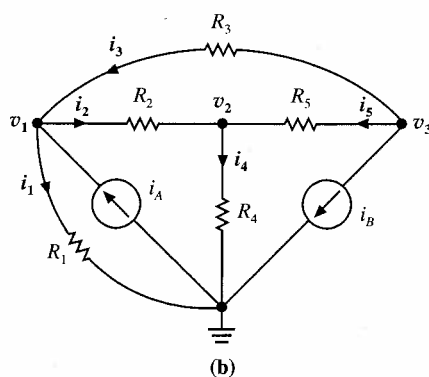
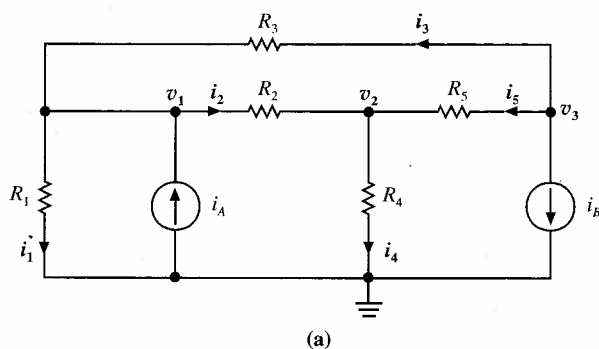
$$\begin{aligned} \frac{v_1 - v_2}{0,5} + \frac{v_1 - v_2}{1} - \left( \frac{0 - v_1}{1} \right) &= 0 \\ \frac{v_1 - v_2}{0,5} + \frac{v_1 - v_2}{1} + \left( \frac{0 - v_2}{0,5} \right) - 11 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo-se essas equações, temos  $v_1 = -3 \text{ V}$  e  $v_2 = -4 \text{ V}$ . Portanto todas as correntes na rede são idênticas às que foram calculadas usando o circuito da Figura 3.2b, e as tensões nos nós têm as mesmas relações entre si. ■

Examinemos agora o circuito da Figura 3.3a que pode ser redesenhado como mostra a Figura 3.3b. Os sentidos das correntes seguem a convenção mostrada nas figuras.

No nó 1, a LKC produz

$$i_1 - i_A + i_2 - i_3 = 0$$



**Figura 3.3** Circuito de quatro nós.

ou

$$\frac{v_1}{R_1} - i_A + \frac{v_1 - v_2}{R_2} - \frac{v_3 - v_1}{R_3} = 0$$

$$v_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - v_2 \frac{1}{R_2} - v_3 \frac{1}{R_3} = i_A$$

No nó 2, a LKC produz

$$-i_2 + i_4 - i_5 = 0$$

ou

$$-\frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_2}{R_4} - \frac{v_3 - v_2}{R_5} = 0$$

$$-v_1 \frac{1}{R_2} + v_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - v_3 \frac{1}{R_5} = 0$$

No nó 3, a equação é

$$i_3 + i_5 + i_B = 0$$

ou

$$\frac{v_3 - v_1}{R_3} + \frac{v_3 - v_2}{R_5} + i_B = 0$$

$$-v_1 \frac{1}{R_3} - v_2 \frac{1}{R_5} + v_3 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) = -i_B$$

Agrupando-se as equações nodais, obtém-se

$$\begin{aligned}
 v_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - v_2 \frac{1}{R_2} - v_3 \frac{1}{R_3} &= i_A \\
 -v_1 \frac{1}{R_2} + v_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - v_3 \frac{1}{R_5} &= 0 \\
 -v_1 \frac{1}{R_3} + v_2 \frac{1}{R_5} + v_3 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) &= -i_B
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Observe que a análise produziu três equações simultâneas em função das três tensões  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ . As equações podem também ser escritas em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ 0 \\ -i_B \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

### Exemplo 3.2

Supondo que o circuito mostrado na Figura 3.3 possui os seguintes parâmetros, determine as tensões nos nós.

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 0,5 \Omega & R_3 &= 1 \Omega & R_5 &= 0,5 \Omega & i_B &= I_B = 1 \text{ A} \\
 R_2 &= 0,25 \Omega & R_4 &= 1 \Omega & i_A &= I_A = 4 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Os dados indicam que

$$G_1 = 2 \quad G_3 = 1 \quad G_5 = 2 \quad G_2 = 4 \quad G_4 = 1$$

As equações nos nós são

$$\begin{aligned}
 7V_1 - 4V_2 - V_3 &= 4 \\
 -4V_1 + 7V_2 - 2V_3 &= 0 \\
 -V_1 - 2V_2 + 3V_3 &= -1
 \end{aligned}$$

A matriz de equações para o circuito é

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -4 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -4 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Os co-fatores que produzem a matriz adjacente são

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 17, & A_{12} &= (-1) \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 14, \\
 A_{13} &= \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 15
 \end{aligned}$$

Os co-fatores restantes são calculados como

$$\begin{aligned}
 A_{21} &= 14 & A_{22} &= 20 & A_{23} &= 18 \\
 A_{31} &= 15 & A_{32} &= 18 & A_{33} &= 33
 \end{aligned}$$



O determinante da matriz pode ser calculado como

$$\Delta = |A| = 48$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 17 & 14 & 15 \\ 14 & 20 & 18 \\ 15 & 18 & 33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Então

$$V_1 = \frac{1}{48} [(4)(17) - (1)(15)] = +1,104 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{1}{48} [(4)(14) - (1)(18)] = +0,792 \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{1}{48} [(4)(15) - (1)(33)] = +0,563 \text{ V}$$

Podemos agora calcular todas as correntes.

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{1,10}{0,5} = 2,21 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = \frac{1,10 - 0,79}{0,25} = 1,25 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_3 - V_1}{R_3} = \frac{0,56 - 1,10}{1} = -0,54 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{V_2}{R_4} = \frac{0,79}{1} = 0,79 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{V_3 - V_2}{R_2} = \frac{0,56 - 0,79}{0,5} = -0,46 \text{ A}$$

Podemos agora conferir os resultados obtidos usando a LKC e a LKT. No nó 1, as correntes entrando no nó são

$$-I_1 + I_A - I_2 + I_3 = -2,21 + 4 - 1,25 - 0,54 = 0$$

No nó 2, as correntes entrando no nó são

$$I_2 - I_4 + I_5 = 1,25 - 0,79 - 0,46 = 0$$

No nó 3, as correntes entrando no nó são

$$-I_3 - I_5 - I_B = 0,54 + 0,46 - 1 = 0$$

É importante notar a simetria das equações que descrevem as duas redes apresentadas. As equações 3.2 e 3.4 e as equações 3.6 e 3.7 exibem o mesmo tipo de simetria. A matriz  $A$  para cada circuito 3.4 e 3.7 é uma matriz simétrica. Tal simetria não é acidental. As equações nodais para redes contendo somente resistores e fontes independentes de corrente podem sempre ser escritas de forma simétrica. Podemos aproveitar tal fato e aprender a escrever as equações por inspeção. Note na primeira equação de 3.2 que o coeficiente de  $v_1$  é a soma de todas as condutâncias conectadas ao nó 1, e o coeficiente de  $v_2$  é o negativo das condutâncias conectadas entre os nós 1 e 2. O lado direito da equação é a soma das correntes entrando no nó 1 através de fontes de corrente. Essa equação é a LKC para o nó 1. Na segunda equação de 3.2, o coeficiente de  $v_2$  é a soma de todas as condutâncias conectadas ao nó 2, o coeficiente de  $v_1$  é o negativo da condutância conectada entre os nós 2 e 1, e o lado direito da equação é a soma das correntes entrando no nó 2 através das fontes de corrente. Essa equação é a LKC para o nó 2. Similarmente, na primeira equação de 3.6 o coeficiente de  $v_1$  é a soma das condutâncias conectadas ao nó 1, o coeficiente de  $v_2$  é o negativo da condutância conectada entre o nó 1 e nó 2, o coeficiente de  $v_3$  é o negativo da condutância conectada entre os nós 1 e 3, e o lado direito da equação é a soma das correntes entrando no nó 1 através das fontes de corrente. As outras duas equações de 3.6 são obtidas de maneira semelhante. Em geral, se a LKC é aplicada ao nó  $j$  com tensão no nó  $v_j$ , o coe-

coeficiente de  $v_j$  é a soma de todas as condutâncias conectadas ao nó  $j$ , e os coeficientes das outras tensões de nó (por exemplo,  $v_{j-1}$ ,  $v_{j+1}$ ) são o negativo da soma das condutâncias conectadas diretamente entre esses nós e  $j$ . O lado direito da equação é igual à soma das correntes entrando no nó através das fontes de corrente. Portanto, o lado esquerdo da equação representa a soma das correntes deixando o nó  $j$  e o lado direito da equação representa as correntes entrando no nó  $j$ .

### Exemplo 3.3

Vamos aplicar o que acabamos de aprender e escrever por inspeção as equações para o circuito da Figura 3.4. As equações são

$$\begin{aligned} v_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - v_2 \frac{1}{R_1} &= i_A \\ -v_1 \frac{1}{R_1} + v_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right) - v_4 \frac{1}{R_4} &= -i_B \\ v_3 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} \right) - v_5 \frac{1}{R_6} &= -i_A \\ -v_2 \frac{1}{R_4} + v_4 \left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) &= -i_C \\ -v_3 \frac{1}{R_6} + v_5 \frac{1}{R_6} &= i_C \end{aligned}$$

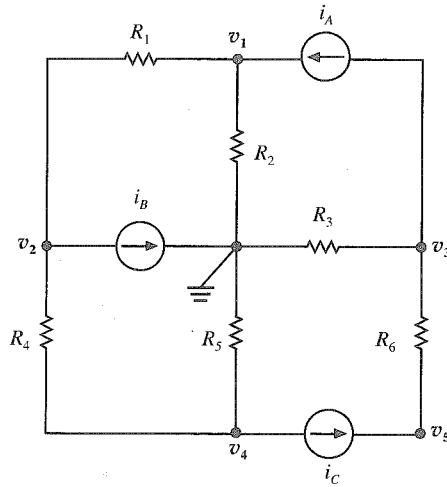


Figura 3.4 Exemplo de um circuito de seis nós.

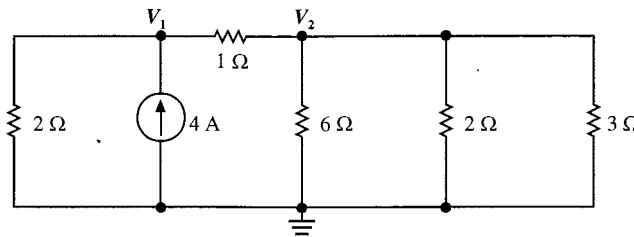
As equações matriciais são:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} & 0 & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} & 0 & -\frac{1}{R_6} \\ 0 & -\frac{1}{R_4} & 0 & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_6} & 0 & \frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ -i_B \\ -i_A \\ -i_C \\ i_C \end{bmatrix}$$

Novamente, observe a simetria da matriz  $A$ .

**Exercícios**

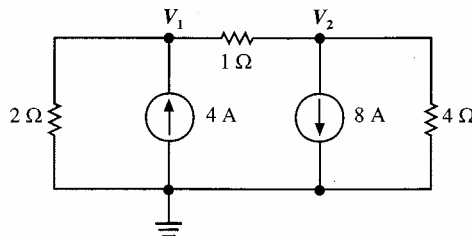
**E3.1** Use a análise nodal para determinar as tensões nos nós do circuito da Figura E3.1.



**Figura E3.1**

**Resp.:**  $V_1 = 4 \text{ V}$ ,  $V_2 = 2 \text{ V}$ .

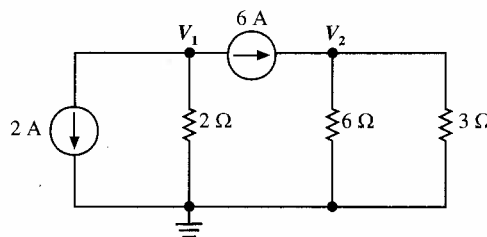
**E3.2** Use a análise nodal para determinar todas as correntes nos ramos do circuito da Figura E3.2.



**Figura E3.2**

**Resp.:**  $I_{2\Omega} = \frac{12}{7} \text{ A} \uparrow$ ,  $I_{1\Omega} = \frac{40}{7} \text{ A} \rightarrow$ ,  $I_{4\Omega} = \frac{16}{7} \text{ A} \uparrow$ .

**E3.3** Determine todas as correntes de ramos no circuito da Figura E3.3 usando análise nodal.



**Figura E3.3**

**Resp.:**  $I_{2\Omega} = 8 \text{ A} \uparrow$ ,  $I_{6\Omega} = 2 \text{ A} \downarrow$ ,  $I_{3\Omega} = 4 \text{ A} \downarrow$ .

### Equações Nodais para Circuitos Contendo Fontes Independentes de Tensão

Para introduzir este tópico, consideremos o circuito mostrado na Figura 3.5a e suponhamos que as resistências e tensões das fontes sejam conhecidas. Pode parecer à primeira vista que há duas tensões desconhecidas,  $v_A$  e  $v_B$ . Mas, desenhando o circuito como mostrado na Figura 3.5b, observa-se que as fontes independentes de tensão estão compreendidas entre os nós e portanto as tensões nodais estão definidas. Por exemplo,  $v_A = v_1$  porque a fonte  $v_1$  está conectada diretamente entre o terminal A e o terra. Além disso, repare que  $v_{R5} = v_B$ . A LKT nesse laço contendo  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_{R5}$  produz

$$+v_1 - v_2 - v_B = 0$$

Portanto,

$$v_B = v_1 - v_2$$

e já que  $v_1$  e  $v_2$  são valores conhecidos, todas as tensões de nó são conhecidas. As correntes podem ser imediatamente calculadas como

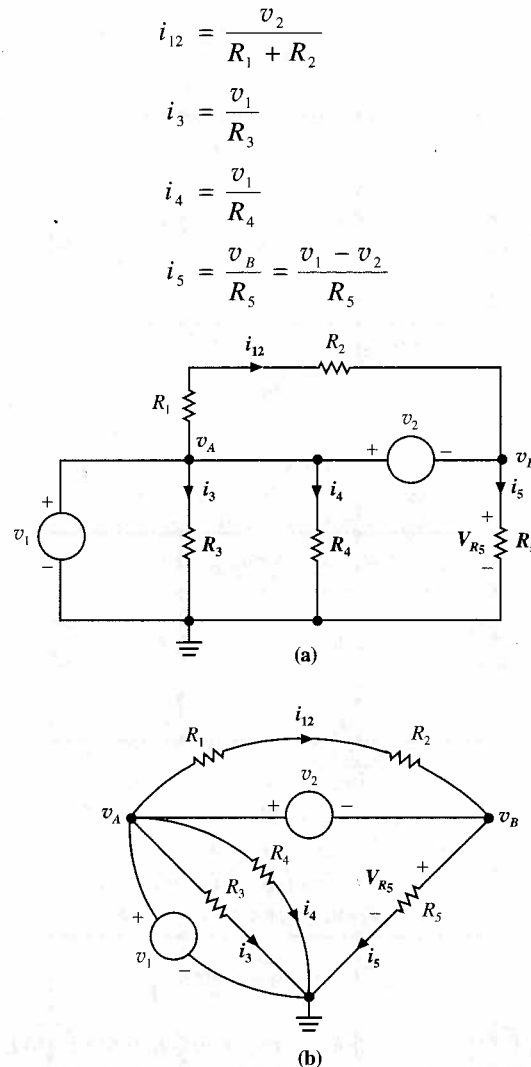


Figura 3.5 Rede contendo fontes de tensão entre nós.

Apesar de este ser um exemplo muito simples, está claro que a presença de fontes de tensão simplifica a análise. Como regra geral, toda vez que existir fontes de tensão entre nós, as equações de tensão de nó que descrevem a rede serão mais simples.

Consideremos agora a rede da Figura 3.6a. Suponhamos que desejamos determinar a corrente no ramo  $I_2$  usando equações nodais. Uma vez que  $I_2 = V_2/R_2$ , determinaremos a tensão nodal  $V_2$ . Lembrando de desenvolvimentos anteriores, quando aplicou-se a LKC a circuitos contendo somente fontes de corrente e resistores, as correntes de ramo eram os valores conhecidos das fontes ou poderiam ser expressos como a tensão no ramo dividido pela resistência no ramo. Entretanto, a corrente de ramo  $I_5$  que passa através da fonte de tensão  $V_S$  não pode ser expressa diretamente em nenhuma dessas formas. Portanto, as equações LKC para a rede são

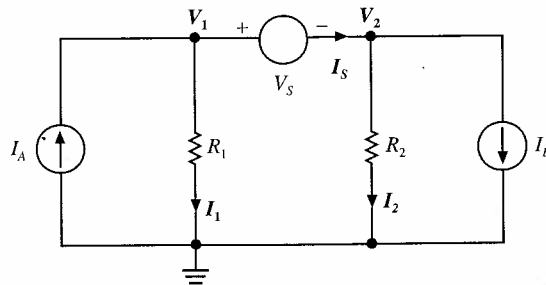
$$I_A = I_1 + I_S$$

$$I_S = I_2 + I_B$$

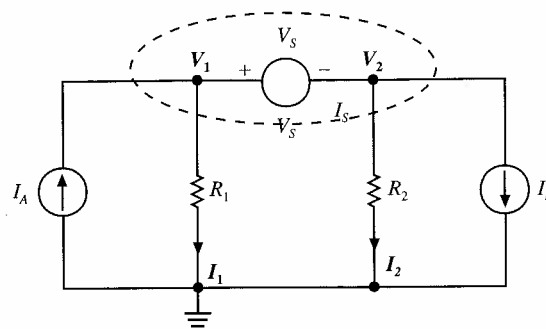
que podem ser escritas como

$$I_A = \frac{V_1}{R_1} + I_S \quad (3.8)$$

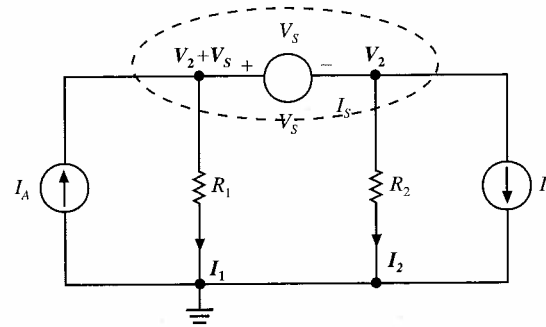
$$I_S = \frac{V_2}{R_2} + I_B \quad (3.9)$$



(a)



(b)



(c)

**Figura 3.6** Circuitos usados para ilustrar análise nodal para um supernó.

Temos agora duas equações lineares independentes com três incógnitas  $V_1$ ,  $V_2$  e  $I_S$ . Deve-se notar, no entanto, que se  $V_1$  e  $V_2$  são conhecidos, então a outra tensão nodal,  $V_2$  ou  $V_1$ , é também conhecida, já que a diferença de potencial entre os dois nós é determinada pela fonte de tensão  $V_S$ . Essa restrição produz uma outra equação linearmente independente,

$$V_1 - V_2 = V_S \quad (3.10)$$

As Equações 3.8, 3.9 e 3.10 formam um conjunto de três equações linearmente independentes nas três incógnitas  $V_1$ ,  $V_2$  e  $I_S$ . Porém, a rede da Figura 3.6a tem três nós e afirmamos anteriormente que, dado um circuito com  $N$  nós, requerem-se  $N - 1$  equações linearmente independentes para se determinar as  $N - 1$  tensões nodais. Eliminando  $I_S$  nas Equações 3.8 e 3.9, tem-se a equação

$$I_A = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + I_B \quad (3.11)$$

As equações 3.10 e 3.11 podem agora ser escritas como

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= V_s \\ \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} &= I_A - I_B \end{aligned} \quad (3.12)$$

que são duas equações linearmente independentes nas duas tensões nodais  $V_1$  e  $V_2$ . Se resolvermos essas equações para  $V_2$ , podemos determinar  $I_2 = V_2/R_2$ . Note que tal procedimento requer três equações e três incógnitas. Uma das variáveis foi eliminada imediatamente, produzindo duas equações envolvendo as duas tensões nodais desconhecidas. Ilustraremos agora que essas duas equações podem ser escritas diretamente. Para tal, vamos examinar o circuito da Figura 3.6b. Note que a fonte de tensão  $V_s$  está completamente incluída dentro da linha tracejada. Além disso, sabemos que, dentro dessa superfície, se uma tensão nodal pode ser determinada, a outra passa a ser conhecida imediatamente; isto é, uma equação *restritiva* para essa porção dentro da linha tracejada do circuito é

$$V_1 - V_2 = V_s \quad (3.13)$$

Essa equação é uma das duas equações linearmente independentes necessárias para determinar as tensões nodais. A outra equação é obtida aplicando-se a LKC à superfície dentro da linha tracejada, a qual é chamada de *supernó*. Foi mostrado no Capítulo 2 que a LKC deve ser satisfeita para tal superfície, e tal técnica elimina o problema de lidarmos com uma corrente através de uma fonte de tensão. A LKC para o supernó é

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = I_A - I_B \quad (3.14)$$

Note que as equações 3.13 e 3.14 são idênticas à Equação 3.12. Observe que se evitarmos considerar as correntes em fontes de tensão, menos equações e menos variáveis serão necessárias para a análise.

Por causa da presença da fonte de tensão, uma simplificação adicional pode ser feita baseada na restrição que existe entre as tensões nodais. Consideremos novamente o circuito como mostrado na Figura 3.6c. Note que a equação de restrição já foi utilizada naquele nó tal que a tensão nodal  $V_1$  foi escrita como  $V_2 + V_s$ . Se aplicarmos agora a LKC ao supernó, obteremos diretamente uma equação na variável  $V_2$ , isto é,

$$-I_A + \frac{V_2 + V_s}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + I_B = 0 \quad (3.15)$$

Essa equação, que é equivalente às equações 3.13 e 3.14, produzirá  $V_2$  e  $I_2 = V_2/R_2$ .

Consideremos agora um circuito mais complexo como o mostrado na Figura 3.7. Da discussão anterior, percebe-se imediatamente que a tensão  $v_D$  é conhecida, e que a tensão entre os nós A e C também é conhecida. Essas duas condições são *restrições* no circuito e representam duas das equações básicas necessárias para determinar todas as tensões nodais. Portanto, duas das equações independentes exigidas para achar as quatro tensões nodais são

$$\begin{aligned} v_D &= v_2 \\ v_A - v_C &= v_1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Os supernós são marcados como  $SN_1$  e  $SN_2$ .

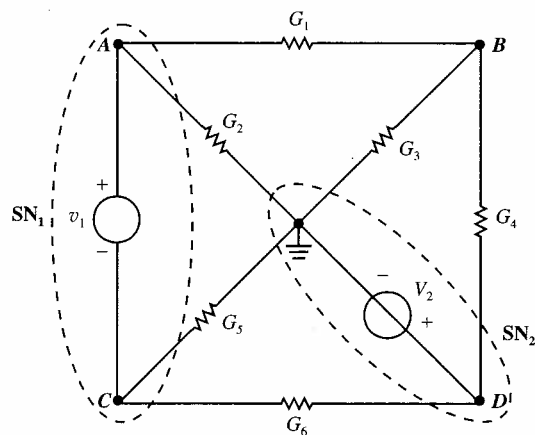
Ao examinar o circuito da Figura 3.7, parece que ele tem três nós, dois supernós e o nó B. Desde que a tensão nodal  $v_D$  é conhecida, a LKC aplicada aos nós B e  $SN_1$  produz as duas equações restantes. Para esses nós, as equações são

$$\begin{aligned} (V_B - V_A)G_1 + V_B G_3 + (V_B - V_D)G_4 &= 0 \\ (V_A - V_B)G_1 + V_A G_2 + V_C G_5 + (V_C - V_D)G_6 &= 0 \end{aligned}$$

que quando simplificadas tornam-se

$$\begin{aligned} -V_A G_1 + V_B (G_1 + G_3 + G_4) - V_D G_4 &= 0 \\ V_A (G_1 + G_2) - V_B (G_1) + V_C (G_5 + G_6) - V_D G_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

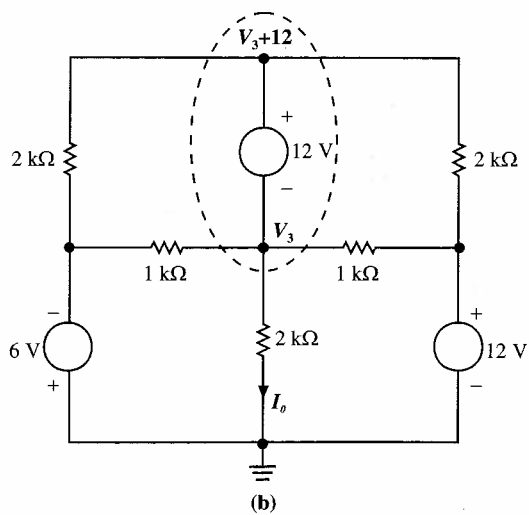
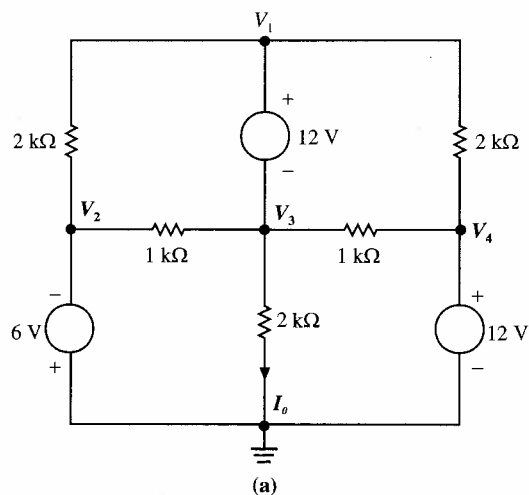
As quatro equações em 3.16 e 3.17 podem ser usadas para determinar todas as tensões desconhecidas.



**Figura 3.7** Circuito contendo fontes de tensão, ilustrando supernós.

### Exemplo 3.4

Vamos determinar a corrente  $I_o$  no circuito da Figura 3.8a.



**Figura 3.8** Exemplo de circuito com supernós.

Examinando-se o circuito, notamos que as tensões nodais  $V_2$  e  $V_4$  são conhecidas e as tensões nodais  $V_1$  e  $V_3$  estão relacionadas pela equação

$$V_1 - V_3 = 12$$

O circuito foi redesenhado na Figura 3.8b. Apesar de podermos indicar um supernó para ambas as tensões nodais  $V_2$  e  $V_4$ , elas foram omitidas para que o circuito não parecesse desnecessariamente complicado.

Uma vez que se deseja determinar a corrente  $I_o$ ,  $V_1$  no supernó contendo  $V_1$  e  $V_3$  foi escrita como  $V_3 + 12$ . A equação LKC no supernó é então

$$\frac{V_3 + 12 - (-6)}{2} + \frac{V_3 + 12 - 12}{2} + \frac{V_3 - (-6)}{1} + \frac{V_3 - 12}{1} + \frac{V_3}{2} = 0$$

Resolvendo-se essa equação para  $V_3$ , tem-se

$$V_3 = \frac{6}{7} \text{ V}$$

$I_o$  pode então ser computada imediatamente como

$$I_o = \frac{-\frac{6}{7}}{2} = -\frac{3}{7} \text{ mA}$$

■

### Exercícios

**E3.4** Utilize análise nodal para encontrar as correntes nos dois resistores do circuito da Figura E3.4.

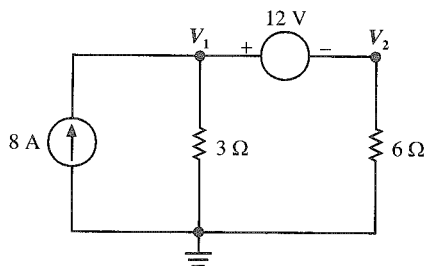


Figura E3.4

*Resp.:*  $I_{3\Omega} = \frac{20}{3} \text{ A} \downarrow$ ,  $I_{6\Omega} = \frac{4}{3} \text{ A} \downarrow$ .

**E3.5** Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  no circuito da Figura E3.5.

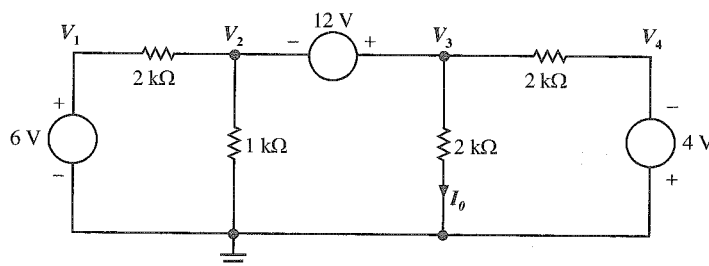


Figura E3.5

*Resp.*  $I_o = 3,8 \text{ mA}$ .

Como ponto final da discussão, considere a porção tracejada do circuito mostrado na Figura 3.9. Note que  $R_5$  e o nó A formam um supernó. Esse supernó existe porque a corrente em  $R_5$  é conhecida e a tensão sobre  $R_5$  é também conhecida.



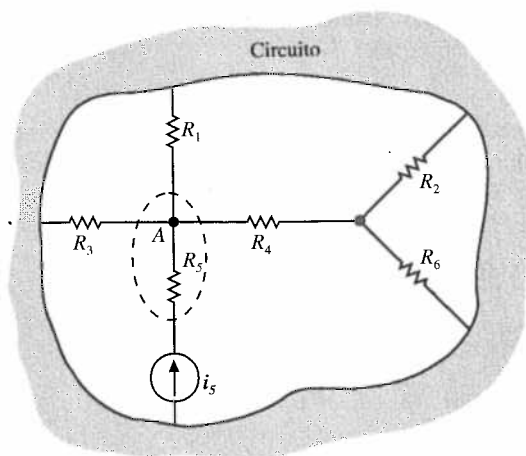


Figura 3.9 Rede contendo um supernó.

### Equações Nodais para Circuitos Contendo Fontes Dependentes de Tensão

Circuitos que contêm fontes dependentes (controladas) são tratados da mesma maneira como os descritos anteriormente. Existe, no entanto, uma importante diferença na forma das equações resultantes: a presença de uma fonte dependente pode destruir a simetria das equações nodais que definem o circuito.

Considere o circuito mostrado na Figura 3.10. Note que  $v_4 = v_B$  e  $v_A = v_2 - v_3$ . Portanto, as equações que descrevem o circuito são

$$\begin{aligned} v_4 &= v_B \\ v_1(G_1 + G_3) - v_2(G_1) - v_4(G_3) &= i_A \\ -v_1(G_1) + v_2(G_1 + G_2) - v_3(G_2) &= -i_A - 3(v_2 - v_3) \\ -v_2(G_2) + v_3(G_2 + G_4) &= i_B \end{aligned}$$

### Exemplo 3.5

Dados os seguintes parâmetros para o circuito da Figura 3.10, determine as tensões nodais.

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \, \Omega & R_3 &= 2 \, \Omega & i_A &= I_A = 4 \, \text{A} & v_B &= V_B = 10 \, \text{V} \\ R_2 &= 0,5 \, \Omega & R_4 &= 1 \, \Omega & i_B &= I_B = 5 \, \text{A} \end{aligned}$$

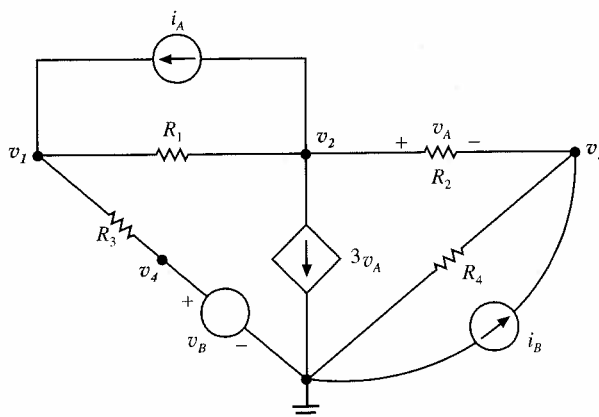


Figura 3.10 Circuito contendo uma fonte controlada de corrente.

Substituindo esses valores nas equações anteriores, tem-se

$$\begin{aligned} 1,5V_1 - V_2 &= 9 \\ -V_1 + 6V_2 - 5V_3 &= -4 \\ -2V_2 + 3V_3 &= 5 \end{aligned}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Os co-fatores da matriz de coeficientes (ou seja, a matriz  $A$ ) são

$$\begin{aligned} A_{11} &= 8 & A_{12} &= 3 & A_{13} &= 2 \\ A_{21} &= 3 & A_{22} &= 4,5 & A_{23} &= 3 \\ A_{31} &= 5 & A_{32} &= 7,5 & A_{33} &= 8 \end{aligned}$$

O determinante é  $|A| = 9$ , e portanto a solução da equação é

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 3 & 4,5 & 7,5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,4444 \\ 5,1666 \\ 5,1111 \end{bmatrix}$$

Recapitulando rapidamente, a LKC no nó 3 nos dá

$$\frac{V_3 - V_2}{0,5} + \frac{V_3}{1} - 5 = \frac{5,1111 - 5,1666}{0,5} + \frac{5,1111}{1} - 5 = 0$$

Consideremos agora o circuito mostrado na Figura 3.11, que contém uma fonte de tensão dependente. As equações nodais para esse circuito são

$$\begin{aligned} \frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_1 - v_3}{R_1} &= i_A \\ v_2 &= 10i_4 = \frac{10v_3}{R_4} \\ \frac{v_3 - v_1}{R_1} + \frac{v_3 - v_2}{R_3} + \frac{v_3}{R_4} &= -i_B \end{aligned}$$

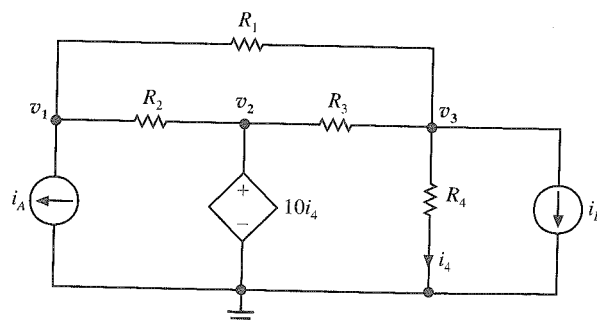


Figura 3.11 Circuito contendo uma fonte de tensão controlada.

Agrupando-se os vários termos nas equações e substituindo em  $v_2$  temos

$$v_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - v_3 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{10}{R_2 R_4} \right) = i_A$$

$$-v_1 \frac{1}{R_1} + v_3 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} - \frac{10}{R_3 R_4} \right) = -i_B$$

Novamente uma simples substituição muda o problema de três variáveis para duas, uma vez que  $v_3$  sendo conhecida,  $v_2$  pode ser calculada diretamente. Uma fonte de tensão dependente reduzirá a ordem das equações da mesma maneira que uma fonte de tensão independente.

### Exemplo 3.6

Suponhamos que os parâmetros no circuito mostrado na Figura 3.11 sejam

$$R_1 = 0,5 \Omega \quad R_3 = 2 \Omega \quad i_A = I_A = 10 \text{ A}$$

$$R_2 = 1 \Omega \quad R_4 = 10 \Omega \quad i_B = I_B = 2 \text{ A}$$

Substituindo tais valores nas equações desenvolvidas anteriormente temos

$$3V_1 - 3V_3 = 10$$

$$-2V_1 + 2,1V_3 = -2$$

ou

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2,1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{0,3} \begin{bmatrix} 2,1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50,0000 \\ 46,6666 \end{bmatrix}$$

Uma vez que

$$V_2 = \frac{10}{R_4} V_3$$

então

$$V_2 = V_3$$

Isto significa, obviamente, que nenhuma corrente flui em  $R_3$ . Vamos conferir tal resposta aplicando a LKC no nó 3.

$$\frac{V_3 - V_2}{R_3} + \frac{V_3 - V_1}{R_1} + \frac{V_3}{R_4} + I_B = 0 + \frac{46,6666 - 50,0000}{0,5} + \frac{46,6666}{10} + 2$$

$$= 0$$

### Exercícios

**E3.6** Determine as tensões nodais para o circuito da Figura E3.6.

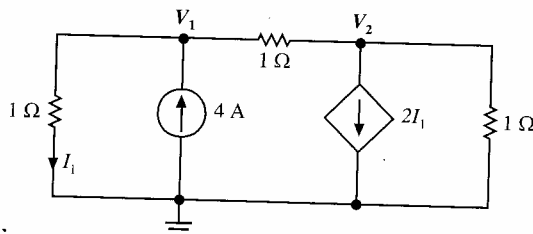


Figura E3.6

Resp.:  $V_1 = \frac{8}{5} \text{ V}$ ,  $V_2 = -\frac{4}{5} \text{ V}$ .

E3.7 Calcule as tensões nodais para o circuito da Figura E3.7.

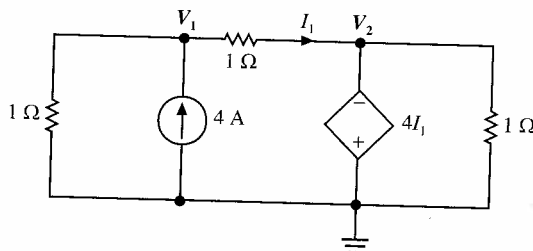


Figura E3.7

Resp.:  $V_1 = 6 \text{ V}$ ,  $V_2 = 8 \text{ V}$ .

E3.8 Utilize a análise nodal para determinar a tensão sobre a fonte dependente de tensão para o circuito na Figura E3.8.

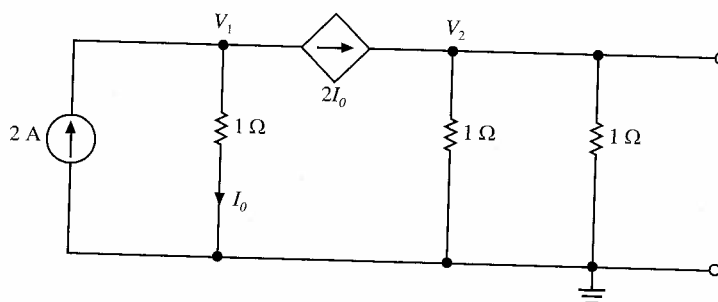


Figura E3.8

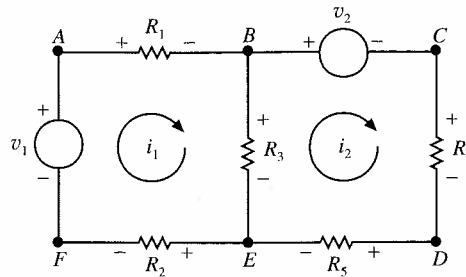
Resp.:  $V_1 - V_2 = 0 \text{ V}$ .

## 3.2 Análise de Laço

Na análise nodal, os parâmetros desconhecidos são as tensões nodais, e a LKC é empregada para determiná-las. Contrastando com esse método, uma análise de malha usa LKT para determinar as correntes do circuito. Uma vez que as correntes sejam conhecidas, a lei de Ohm pode ser usada para calcular as tensões. Relembre que, no Capítulo 2, achamos que uma única equação era o suficiente para determinar a corrente em um circuito contendo um laço simples. Se o circuito contém  $N$  laços independentes, mostraremos que  $N$  equações independentes simultâneas serão necessárias para descrever o circuito. Por enquanto assumiremos que os circuitos são *planos*, o que simplesmente significa que podemos desenhar o circuito em uma folha de papel de maneira tal que nenhum condutor cruze com outro condutor.

Para iniciar nossa análise, consideremos o circuito mostrado na Figura 3.12. Vamos também identificar dois laços,  $A-B-E-F-A$  e  $B-C-D-E-B$ . Podemos agora definir um novo conjunto de variáveis de corrente, chamadas de *correntes de laço*, que podem ser usadas para encontrar as correntes físicas no circuito. Vamos assumir que a corrente  $i_1$  flui através do primeiro laço e a corrente  $i_2$  através do segundo. Então a cor-

rente de ramo fluindo de  $B$  para  $E$  através de  $R_3$  é  $i_1 - i_2$ . As direções das correntes têm de ser inicialmente arbitradas. Como aconteceu no caso da análise nodal, se as correntes reais não estão na direção indicada, os valores calculados serão negativos.



**Figura 3.12** Circuito de duas malhas.

Aplicando-se LKT ao primeiro laço, tem-se

$$-i_1 R_1 - (i_1 - i_2) R_3 - i_1 R_2 + v_1 = 0$$

ou

$$i_1 (R_1 + R_2 + R_3) - i_2 R_3 = v_1$$

A LKT aplicada ao segundo laço produz

$$-v_2 - i_2 R_4 - i_2 R_5 + (i_1 - i_2) R_3 = 0$$

ou

$$-i_1 R_3 + i_2 (R_3 + R_4 + R_5) = -v_2$$

Portanto as duas equações simultâneas necessárias para se resolver esse circuito de dois laços são

$$\begin{aligned} i_1 (R_1 + R_2 + R_3) - i_2 (R_3) &= v_1 \\ -i_1 (R_3) + i_2 (R_3 + R_4 + R_5) &= -v_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}$$

Neste ponto é importante definir o que é uma *malha*. Uma *malha* nada mais é do que um tipo especial de laço que não contém quaisquer outros laços dentro de si. Portanto, quando cruzamos o caminho de uma malha, não envolvemos quaisquer elementos do circuito. Por exemplo, a rede da Figura 3.12 contém duas malhas definidas pelos caminhos  $A-B-E-F-A$  e  $B-C-D-E-B$ . O caminho  $A-B-C-D-E-F-A$  é um laço, mas não é uma malha. Já que a maioria de nossa análise nesta seção envolverá a escrita de equações LKT para malhas, vamos nos referir às correntes como correntes de malha e à análise como *análise de malha*.

### Exemplo 3.7

Se o circuito da Figura 3.12 possui os seguintes parâmetros, determine as correntes de malha.

$$\begin{aligned} R_1 &= 2 \, \Omega & R_3 &= 2 \, \Omega & R_5 &= 2 \, \Omega & v_2 &= V_2 = 36 \, \text{V} \\ R_2 &= 4 \, \Omega & R_4 &= 5 \, \Omega & v_1 &= V_1 = 24 \, \text{V} \end{aligned}$$

As equações para o circuito são

$$\begin{aligned} 8I_1 - 2I_2 &= 24 \\ -2I_1 + 9I_2 &= -36 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -36 \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se para as correntes, tem-se

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{68} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ -36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{144}{68} \\ \frac{240}{68} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,1176 \\ -3,5294 \end{bmatrix}$$

Note que uma vez que  $I_2$  seja negativa, ela está, de fato, fluindo na direção oposta do que foi estipulado.

Podemos conferir a validade das respostas através da LKT. Na malha 1, a LKT exige que

$$\begin{aligned} -I_1 R_1 - (I_1 - I_2) R_3 - I_1 R_2 + V_1 \\ = (2,1176)(2) - (2,1176 + 3,5294)(2) - (2,1176)(4) + 24 = 0 \end{aligned}$$

Na malha 2, a LKT exige que

$$\begin{aligned} -V_2 - I_2 R_4 - I_2 R_5 + (I_1 - I_2) R_3 \\ = -36 + (3,5294)(5) + (3,5294)(2) + (2,1176 + 3,5294)(2) = 0 \end{aligned}$$

Fica aqui a sugestão para o leitor conferir com LKT todo o circuito fora do laço  $A-B-C-D-E-F-A$ .

Uma vez que as correntes de malha sejam conhecidas, as tensões em qualquer ponto do circuito podem ser facilmente determinadas. Por exemplo, a tensão no nó  $A$  em relação ao nó  $E = V_1 - I_1 R_2 = I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_3$ . A tensão no nó  $C$  em relação ao nó  $E = -V_2 + (I_1 - I_2) R_3 = I_2 R_4 + I_2 R_5$ . A tensão em qualquer ponto do circuito em relação a qualquer outro ponto pode ser obtida de maneira semelhante. ■

Vamos agora considerar o circuito da Figura 3.13. Aplicando-se a LKT ao caminho fechado  $A-B-E-D-C-A$ , tem-se

$$+v_1 - i_1 R_2 + v_4 - R_4(i_1 - i_3) - R_3(i_1 - i_2) - i_1 R_1 = 0$$

ou

$$i_1(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - i_2(R_3) - i_3(R_4) = v_1 + v_4$$

A LKT para a malha 2 ao longo do caminho  $C-D-G-F-C$  é

$$+R_3(i_1 - i_2) + v_3 + v_2 - i_2 R_5 = 0$$

ou

$$-i_1(R_3) + i_2(R_3 + R_5) = v_2 + v_3$$

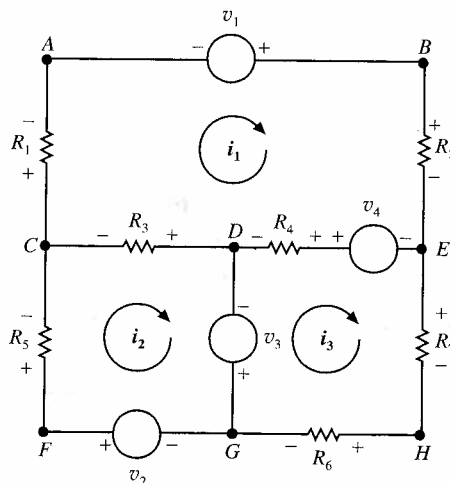


Figura 3.13 Circuito de três malhas.

A LKT para a malha 3 é

$$+R_4(i_1 - i_3) - v_4 - R_7 i_3 - R_6 i_3 - v_3 = 0$$

ou

$$-i_1(R_4) + i_3(R_4 + R_6 + R_7) = -v_3 - v_4$$

Portanto, as três equações necessárias para resolver as três correntes de malha desconhecidas são

$$\begin{aligned} i_1(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - i_2(R_3) - i_3(R_4) &= v_1 + v_4 \\ -i_1(R_3) + i_2(R_3 + R_5) &= v_2 + v_3 \\ -i_1(R_4) + i_3(R_4 + R_6 + R_7) &= -v_3 - v_4 \end{aligned} \quad (3.19)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + R_4 & -R_3 & -R_4 \\ -R_3 & R_3 + R_5 & 0 \\ -R_4 & 0 & R_4 + R_6 + R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + v_4 \\ v_2 + v_3 \\ -v_3 - v_4 \end{bmatrix}$$

### Exemplo 3.8

Dados os seguintes parâmetros para a rede mostrada na Figura 3.13, determine as correntes de malha.

$$\begin{aligned} R_1 &= 2 \, \Omega & R_3 &= 3 \, \Omega & R_5 &= 4 \, \Omega & R_7 &= 1 \, \Omega \\ R_2 &= 1 \, \Omega & R_4 &= 1 \, \Omega & R_6 &= 2 \, \Omega & v_1 &= V_1 = 12 \, \text{V} \\ & & & & v_2 &= V_2 = 6 \, \text{V} & v_4 &= V_4 = 24 \, \text{V} \\ & & & & v_3 &= V_3 = 18 \, \text{V} \end{aligned}$$

A matriz de equações acima se torna

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 24 \\ -42 \end{bmatrix}$$

Os co-fatores da matriz são  $A_{11} = 28$ ,  $A_{12} = 12$ ,  $A_{13} = 7$ ,  $A_{21} = 12$ ,  $A_{22} = 27$ ,  $A_{23} = 3$ ,  $A_{31} = 7$ ,  $A_{32} = 3$  e  $A_{33} = 40$ . O determinante de  $A$ ,  $|A| = 153$ . Portanto,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{153} \begin{bmatrix} 28 & 12 & 7 \\ 12 & 27 & 3 \\ 7 & 3 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ 24 \\ -42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,5490 \\ 6,2353 \\ -8,8627 \end{bmatrix}$$

Usando-se esses dados e somando-se as tensões ao redor da malha 1, temos

$$\begin{aligned} +V_1 - I_1 R_2 + V_4 - R_4(I_1 - I_3) - R_3(I_1 - I_2) - I_1 R_1 \\ = 12 - (6,5490)(1) + 24 - 3(6,5490 - 6,2353) - 1(6,5490 + 8,8627) \\ - 2(6,5490) = 0 \end{aligned}$$

Como vimos no Exemplo 3.7, uma vez que as correntes sejam conhecidas, podemos determinar todas as correntes de ramo e tensões em quaisquer dois pontos. ■

Mais uma vez somos compelidos a ressaltar a forma simétrica das equações de malha que descrevem os circuitos anteriormente mencionados. Note também que a matriz  $A$  para cada circuito é simétrica. Uma vez que essa simetria é geralmente exibida por circuitos contendo resistores e fontes independentes de tensão, podemos aprender a escrever as equações de malha por inspeção. Na primeira equação de 3.18, o coeficiente de  $i_1$  é a soma das resistências através da qual a corrente de malha flui e o coeficiente de  $i_2$  é o negativo da soma das resistências em comum para correntes de malha 1 e 2. O lado direito da equação é a soma das fontes de tensão na malha 1. O sinal da fonte de tensão é positivo se ela coopera com a direção assumida do fluxo de corrente e negativo se ela se opõe ao fluxo originalmente arbitrado. A primeira equação é a LKT para a malha 1. Na segunda equação de 3.18, o coeficiente de  $i_2$  é a soma de todas as resistências na malha 2, o coeficiente de  $i_1$  é o negativo da soma de todas as resistências comuns às malhas 1 e 2 e o lado direito da equação é a soma das fontes de tensão na malha 2. As equações de 3.19 são obtidas de maneira semelhante. Em geral, se assumirmos que todas as correntes de malha estão na mesma direção, então se a LKT é aplicada

à malha  $j$  com a corrente de malha  $i_j$ , o coeficiente de  $i_j$  é a soma das resistências na malha  $j$  e os coeficientes das outras correntes de malha (por exemplo,  $i_{j-1}$ ,  $i_{j+1}$ ) são os valores negativos das resistências comuns a essas malhas e malha  $j$ . O lado direito da equação é igual à soma das fontes de tensão na malha  $j$ . Essas fontes de tensão terão o sinal positivo, se favorecerem o fluxo de corrente  $i_j$ , e um sinal negativo, se forem opostas a ele.

### Exemplo 3.9

Vamos aplicar a técnica de inspeção descrita acima para o circuito mostrado na Figura 3.14. Por inspeção, a LKT produz

$$\begin{aligned}(R_1 + R_2)i_1 - R_2i_2 &= v_1 + v_3 \\ -R_2i_1 + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5)i_2 - R_5i_4 &= -v_2 \\ (R_6 + R_7 + R_8)i_3 - R_8i_4 &= -v_3 - v_4 \\ -R_5i_2 - R_8i_3 + (R_5 + R_8 + R_9)i_4 &= v_4 - v_5\end{aligned}$$

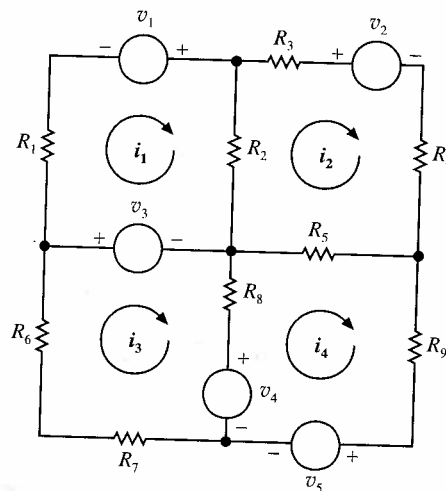


Figura 3.14 Exemplo de um circuito com quatro malhas.

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 & 0 & -R_5 \\ 0 & 0 & R_6 + R_7 + R_8 & -R_8 \\ 0 & -R_5 & -R_8 & R_5 + R_8 + R_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + v_3 \\ -v_2 \\ -v_3 - v_4 \\ v_4 - v_5 \end{bmatrix}$$

### Exercícios

E3.9 Determine  $V_o$  no circuito da Figura E3.9 usando análise de malha.



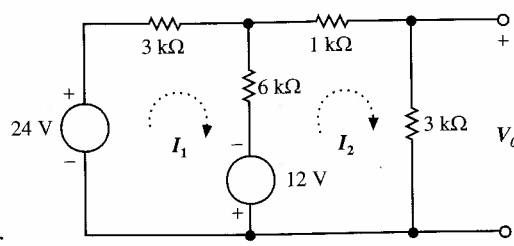


Figura E3.9

Resp.:  $V_o = 6 \text{ V}$ .

**E3.10** Use análise de malha para calcular  $V_o$  no circuito da Figura E3.10.

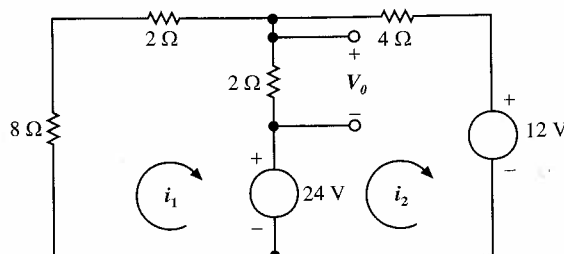


Figura E3.10

Resp.:  $V_o = -6,35 \text{ V}$ .

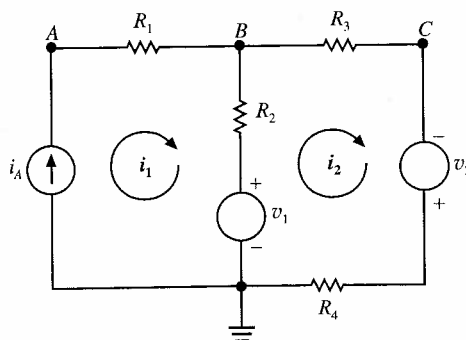
### Equações de Malha para Circuitos Contendo Fontes Independentes de Corrente

Considere o circuito mostrado na Figura 3.15. Parece haver duas correntes desconhecidas  $i_1$  e  $i_2$ . No entanto, desde que assumimos que  $i_1$  percorre o ramo contendo  $i_A$ ,  $i_1$  deve ser igual a  $i_A$ . Portanto, já que  $i_1 = i_A$ , a única corrente desconhecida é  $i_2$ . Assim, a LKT para a segunda malha é

$$-i_1 R_2 + i_2 (R_2 + R_3 + R_4) = v_1 + v_2$$

ou, já que  $i_1 = i_A$ ,

$$i_2 (R_2 + R_3 + R_4) = v_1 + v_2 + i_A R_2$$



**Figura 3.15** Circuito contendo uma fonte independente de corrente.

Dáí  $i_2$  pode ser calculada imediatamente. Uma vez que as correntes de malha são conhecidas, todas as tensões no circuito podem ser calculadas. Por exemplo,

$$v_C = -v_2 + i_2 R_4$$

$$v_B = v_C - i_2 R_3 = -v_2 + i_2 R_4 + i_2 R_3$$

ou

$$v_B = v_1 + (i_1 - i_2)R_2$$

e

$$v_A = v_B + i_A R_1$$

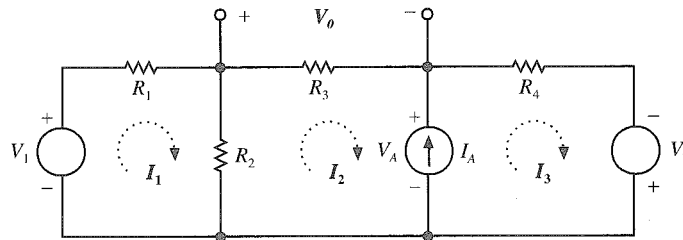
Claramente, a presença de uma fonte de corrente simplificou as equações de malha. Como regra geral, equações LKT são mais simples sempre que existirem fontes de corrente presentes.

Consideremos agora o circuito mais complicado da Figura 3.16a. Suponhamos que desejamos calcular  $V_o$  usando equações de malha. No desenvolvimento anterior em que as redes consistiam somente de fontes de tensão e resistores, as tensões de ramo eram valores conhecidos de fonte ou podiam ser expressos como o produto da corrente de ramo e a resistência ao ramo. Entretanto, a tensão de ramo,  $V_A$ , não pode ser expressa diretamente em nenhuma dessas formas. As equações de malha para o circuito são

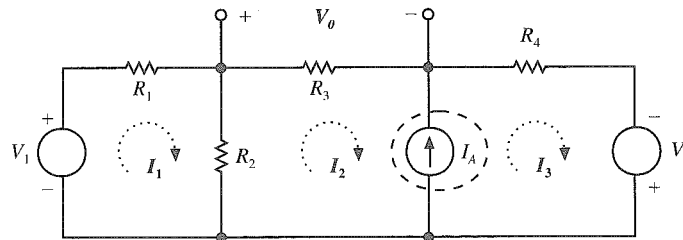
$$V_1 - I_1 R_1 - (I_1 - I_2)R_2 = 0 \quad (3.20)$$

$$-(I_2 - I_1)R_2 - R_3 I_2 - V_A = 0 \quad (3.21)$$

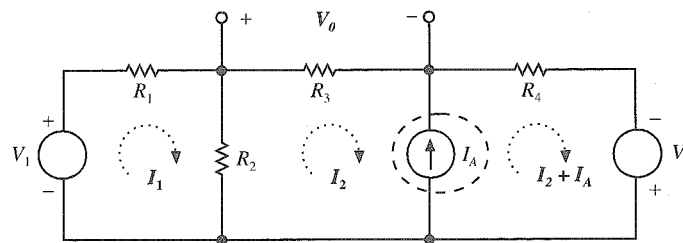
$$V_A - I_3 R_4 + V_2 = 0 \quad (3.22)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 3.16 Exemplo de rede contendo uma fonte de corrente.

Portanto temos três equações LKT linearmente independentes envolvendo as quatro variáveis  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $V_A$ . Note, entretanto, que uma vez que as duas correntes de malha  $I_2$  e  $I_3$  passam através da fonte de corrente  $I_A$ , as correntes de malha são *limitadas* pela restrição

$$I_3 - I_2 = I_A \quad (3.23)$$

As equações 3.20 a 3.23 formam um conjunto de quatro equações linearmente independentes nas quatro incógnitas. Eliminando  $V_A$  nas equações 3.21 e 3.22, produz-se a equação

$$-(I_2 - I_1)R_2 - R_3I_2 - I_3R_4 + V_2 = 0 \quad (3.24)$$

As equações 3.20, 3.23 e 3.24 podem agora ser escritas como

$$\begin{aligned} I_1(R_1 + R_2) - I_2R_2 &= V_1 \\ -I_2 + I_3 &= I_A \\ -I_1R_2 + I_2(R_2 + R_3) + I_3R_4 &= V_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

que são três equações linearmente independentes nas três correntes de malha desconhecidas  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Se resolvermos essas equações para  $I_2$ , podemos determinar  $V_o = R_3I_2$ . Note que esse procedimento requer quatro equações e quatro incógnitas. Uma das incógnitas foi imediatamente eliminada, produzindo três equações envolvendo as três correntes de malha desconhecidas  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Essas equações podem ser escritas diretamente, no entanto, se tivermos cuidado ao escolher o caminho ao qual aplicaremos LKT. Para ilustrar esse fato, vamos refazer o problema usando um laço no lugar de duas malhas. Com relação à Figura 3.16b, englobamos a fonte de corrente dentro da superfície tracejada. Dentro da superfície, as correntes  $I_2$  e  $I_3$  são limitadas pela equação

$$I_3 - I_2 = I_A \quad (3.26)$$

Esta é uma das três equações linearmente independentes necessárias para resolver problemas e para as correntes. A equação LKT para a primeira malha é uma outra equação,

$$V_1 - I_1R_1 - (I_1 - I_2)R_2 = 0 \quad (3.27)$$

A terceira e última equação é obtida aplicando-se a LKT a outro laço que não contém a fonte de corrente  $I_A$ . Tal malha é a que contém os elementos  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  e  $V_2$ . A equação para esse laço é

$$-(I_2 - I_1)R_2 - I_2R_3 - I_3R_4 + V_2 = 0 \quad (3.28)$$

As equações 3.26, 3.27 e 3.28 podem ser escritas como

$$\begin{aligned} I_1(R_1 + R_2) - I_2R_2 &= V_1 \\ -I_2 + I_3 &= I_A \\ -I_1R_2 + I_2(R_2 + R_3) + I_3R_4 &= V_2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Tais equações são idênticas às da Equação 3.25.

Uma simplificação adicional pode ser feita, no entanto, baseando-se na restrição imposta sobre as correntes de malha  $I_2$  e  $I_3$  pela presença da fonte de corrente. Mais uma vez, consideremos o circuito mostrado na Figura 3.16c. Note que a restrição já havia sido empregada, pois a corrente de malha  $I_3$  é igual a  $I_2 + I_A$ . Se agora escrevermos equações LKT para a primeira malha e o laço contendo  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  e  $V_2$ , podemos obter diretamente as duas equações linearmente independentes

$$\begin{aligned} V_1 - I_1R_1 - (I_1 - I_2)R_2 &= 0 \\ -(I_2 - I_1)R_2 - I_2R_3 - (I_2 + I_A)R_4 + V_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

que são, obviamente, equivalentes àsquelas na Equação 3.29. Finalmente,  $V_o$  pode ser completada usando-se a relação  $V_o = R_3I_2$ .

### Exemplo 3.10

Vamos determinar todas as correntes de ramo na rede da Figura 3.17a.

A rede é redesenhada na Figura 3.17b com as correntes de malha marcadas. Dentro das seções tracejadas, as correntes de malha são limitadas pelas equações

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \text{ mA} \\ I_3 - I_1 &= 4 \text{ mA} \end{aligned}$$

Uma vez que a rede contenha três malhas, três equações linearmente independentes são necessárias para determinar as correntes de malha. As equações acima são duas dessas equações. A equação final é a equação LKT ao redor do laço que não passa por uma fonte de corrente. Tal malha está no caminho A-C-D-B-A. A equação para esse laço é

$$+6 - (1)I_1 - (2)I_3 - (2)(I_3 - I_2) - (1)(I_1 - I_2) = 0$$

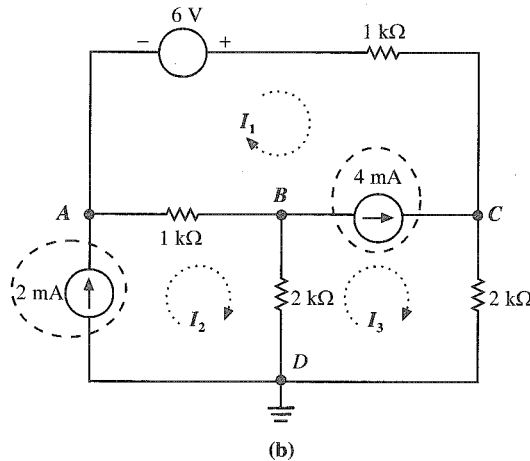
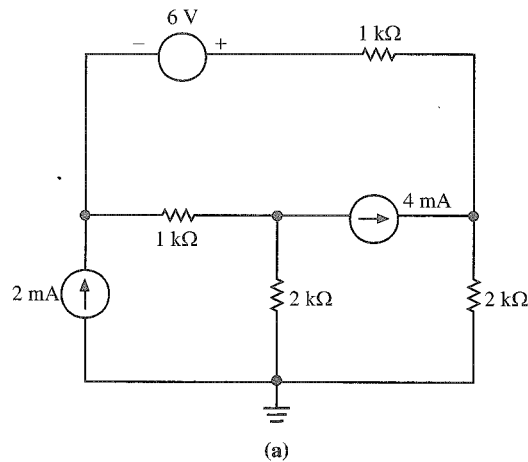


Figura 3.17 Rede contendo múltiplas fontes independentes de corrente.

Resolvendo essas equações para  $I_1$ , temos

$$I_1 = -\frac{2}{3} \text{ mA}$$

Então

$$I_3 = I_1 + 4 \text{ mA} = \frac{10}{3} \text{ mA}$$

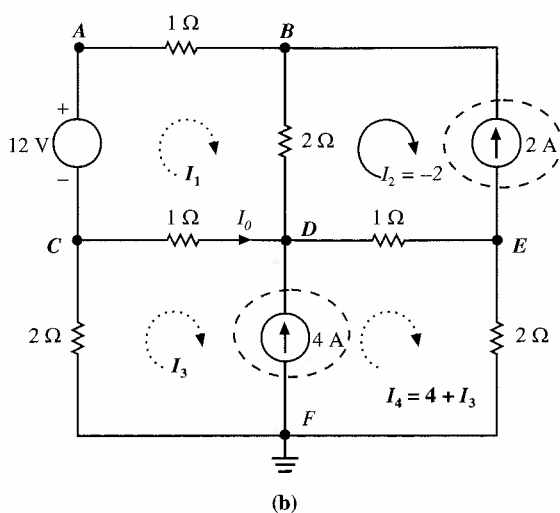
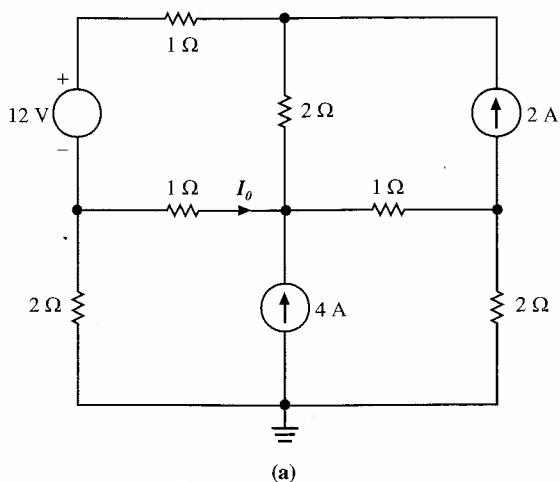
Logo, além das correntes de ramo que são iguais às correntes de malha,  $I_{AB} = 8/3 \text{ mA}$  e  $I_{DB} = 4/3 \text{ mA}$ .

### Exemplo 3.11

Desejamos determinar a corrente  $I_o$  na rede da Figura 3.18a.

O circuito está redesenhado na Figura 3.18b com as correntes de malha devidamente mostradas. Note que  $I_2$  está limitada a  $-2$  e  $I_4$  a  $4 + I_3$ . Por causa dessas restrições, somente duas equações LKT são necessárias para determinar  $I_1$  e  $I_3$  e, portanto,  $I_o = I_3 - I_1$ . As duas equações podem ser derivadas da malha A-B-D-C-A e o laço C-D-E-F-C. As equações são

$$\begin{aligned} +12 - 1I_1 - 2(I_1 + 2) - 1(I_1 - I_3) &= 0 \\ -2I_3 - 1(I_3 - I_1) - 1(4 + I_3 + 2) - 2(4 + I_3) &= 0 \end{aligned}$$



**Figura 3.18** Rede de quatro malhas com duas fontes independentes de corrente.

Essas equações podem ser colocadas em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix}$$

Resolvendo para as correntes, obtemos

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34}{23} \\ \frac{-48}{23} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$I_0 = I_3 - I_1 = \frac{-82}{23} \text{ A}$$

### Exercícios

**E3.11** Use análise de malha para determinar  $V_o$  na rede da Figura E3.11.

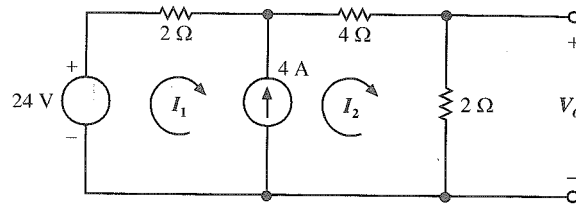


Figura E3.11

Resp.:  $V_o = 8 \text{ V}$ .

E3.12 Determine  $V_o$  na rede da Figura E3.12 usando análise de malha.

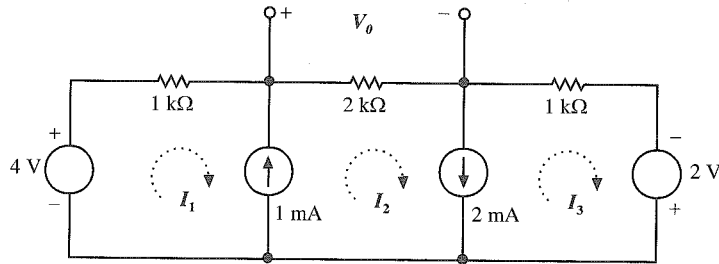


Figura E3.12

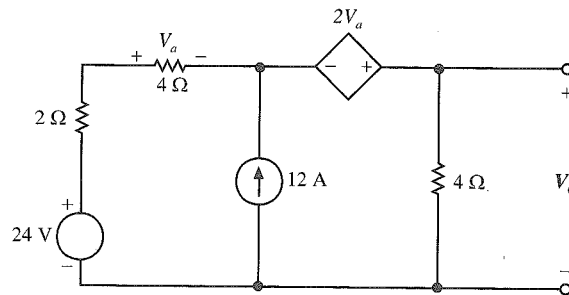
Resp.:  $V_o = 4,5 \text{ V}$ .

### Equações de Malha para Circuitos Contendo Fontes Dependentes

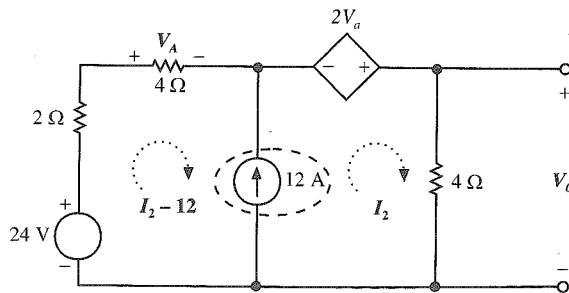
Apesar de lidarmos com circuitos contendo fontes dependentes da mesma maneira dos circuitos descritos anteriormente, devemos nos lembrar que a fonte dependente pode destruir a simetria das equações resultantes. O exemplo simples que é mostrado a seguir ilustrará a aplicação de equações de malha em circuitos com fontes dependentes.

#### Exemplo 3.12

Queremos determinar a tensão de saída no circuito mostrado na Figura 3.19a.



(a)



(b)

Figura 3.19 Circuito contendo uma fonte dependente.

A rede está redesenhada na Figura 3.19b para ilustrar a restrição nas correntes de malha. A equação LKT para o laço mais externo é

$$+24 - 2(I_2 - 12) - V_a + 2V_a - 4I_2 = 0$$

onde

$$V_a = 4(I_2 - 12)$$

Resolvendo essas equações, achamos  $I_2 = 0$  e, portanto,  $V_o = 0$ .

### Exemplo 3.13

Vamos determinar a tensão de saída na rede da Figura 3.20a.

A restrição nas correntes de malha é mostrada na Figura 3.20b. As equações LKT para a rede são

$$\begin{aligned} +12 - 2I_1 - 1(I_1 + 3I_0) - 2(I_1 + 3I_0 - I_0) - 6 &= 0 \\ +6 - 2(I_0 - I_1 - 3I_0) - 1I_0 - 1I_0 &= 0 \end{aligned}$$

As equações em forma matricial são

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

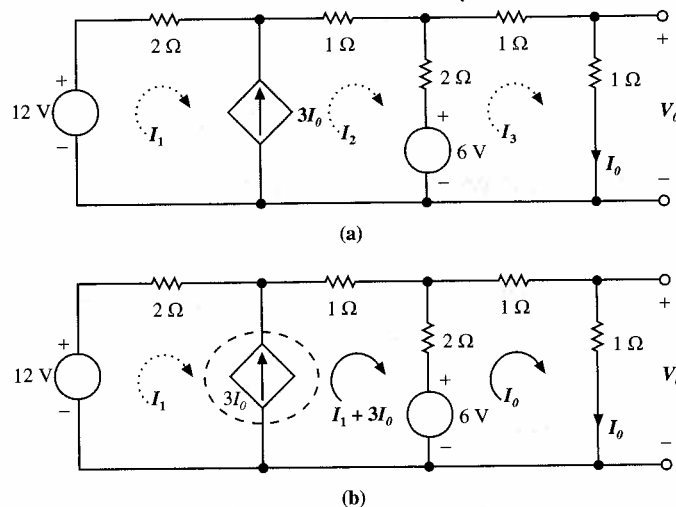


Figura 3.20 Rede contendo uma fonte dependente de corrente.

Resolvendo para as correntes, obtém-se

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{27}{2} \\ \frac{21}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto,  $I_0 = 21/2$  A e  $V_o = 21/2$  V.

### Exercícios

E3.13 Use análise de malha para determinar  $V_o$  na rede da Figura E3.13.

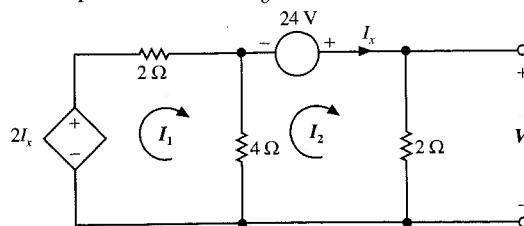


Figura E3.13

Resp.:  $V_o = 24$  V.

E3.14 Determine  $V_o$  no circuito da Figura E3.14 usando análise de malha.

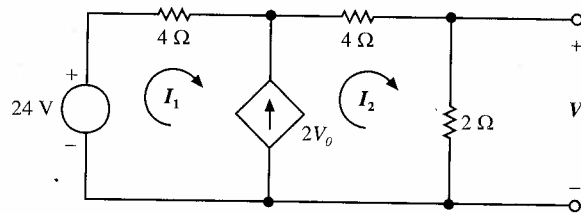


Figura E3.14

Resp.:  $V_o = -8 \text{ V}$ .

### 3.3 Equações de Circuito via Topologia de Rede

Vamos agora generalizar os métodos de análise nodal e de malha que temos apresentado. O meio que empregaremos para conseguir isso é a *topologia*. Para nossos propósitos, topologia se refere às propriedades relacionadas à geometria do circuito. Essas propriedades permanecem imutáveis mesmo que o circuito seja manipulado de maneira a adquirir outra forma com a condição de que nenhuma parte seja cortada e nenhuma nova conexão seja feita.

#### Definições Básicas

Para embasar os conceitos que vamos discutir agora, consideremos a rede mostrada na Figura 3.21. Suponhamos que necessitamos encontrar todas as correntes e tensões desse circuito. Esse circuito parece ser muito mais complicado do que os que vimos anteriormente. Ele é mais complicado porque é o que chamamos de um circuito *não-plano*. Um circuito *plano* é aquele que pode ser desenhado em uma superfície plana sem nenhum cruzamento de fios; isto é, nenhum ramo passa por cima de outro ramo. E, obviamente, um circuito não-plano é aquele que não pode ser desenhado em uma superfície plana.

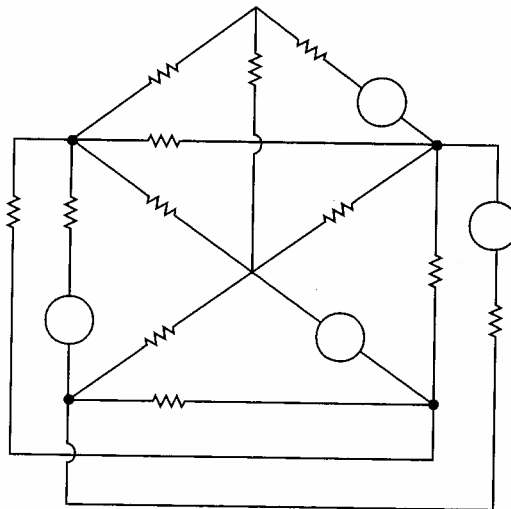


Figura 3.21 Exemplo de um circuito não-plano.

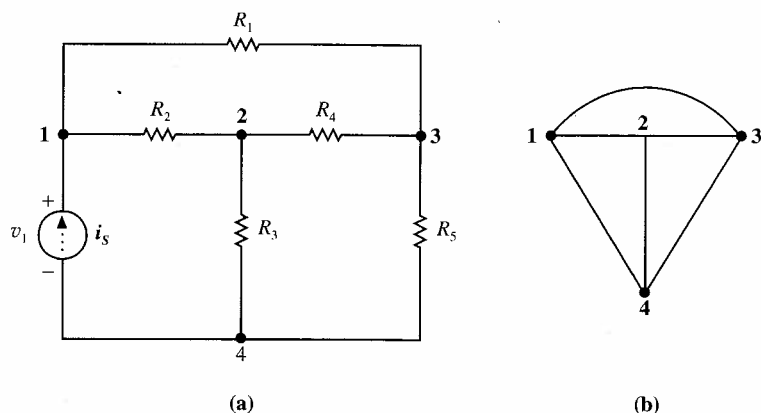
Vamos agora apresentar alguns conceitos topológicos que nos auxiliarão em nossa discussão. Desde que as propriedades geométricas de um circuito são independentes dos elementos do circuito que estão contidos em cada ramo, representaremos cada ramo da rede por um segmento de linha. Tal desenho do circuito é chamado de *grafo*.



**Exemplo 3.14**

O grafo associado com o circuito mostrado na Figura 3.22a é dado na Figura 3.22b. ■

Como pode ser visto do exemplo, o grafo consiste de um número de nós interconectados. Se existe um caminho de qualquer um dos nós para qualquer outro nó, diz-se que o grafo está *conectado*.



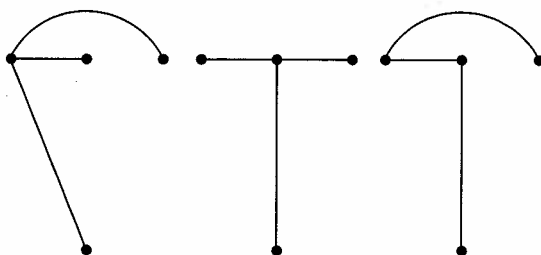
**Figura 3.22** Um circuito e seu grafo associado.

Uma *árvore* do grafo é definida como um conjunto de ramos que conecta todo nó a todo outro nó via algum caminho sem formar um caminho fechado. Em geral, existem várias árvores diferentes para um dado circuito.

**Exemplo 3.15**

Três possíveis árvores para o grafo mostrado na Figura 3.22b são mostradas na Figura 3.23. ■

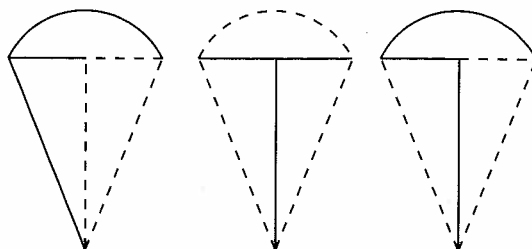
Se um grafo para uma rede é conhecido e uma árvore em particular é especificada, esses ramos do grafo que não fazem parte da árvore formam o que chamamos de *co-árvore*. A co-árvore consiste do que chamamos de *elo* ou conexão.



**Figura 3.23** Árvores para o grafo da Figura 3.22b.

**Exemplo 3.16**

As conexões que pertencem às co-árvores que correspondem às árvores mostradas na Figura 3.23 são mostradas com linhas tracejadas na Figura 3.24.



**Figura 3.24** Co-árvores consistindo das conexões para as árvores da Figura 3.23.

Note que é impossível especificar categoricamente determinado ramo de um grafo como uma conexão, uma vez que ele pode ser uma conexão para uma escolha de árvore e não para uma outra.

Finalmente, desejamos definir o que é chamado de *conjunto de corte*. Um conjunto de corte é simplesmente um conjunto mínimo de ramos que, quando cortados, dividirão o grafo em duas partes distintas. Portanto é impossível ir de um nó em uma parte do grafo para um nó em outra parte sem passar através de um ramo do conjunto de corte.

### Exemplo 3.17

Dois conjuntos de corte para o grafo mostrado na Figura 3.22b são mostrados na Figura 3.25. Note que, em um caso, o nó 4 está separado dos nós 1, 2 e 3; e no outro, os nós 1 e 2 estão separados dos nós 3 e 4.

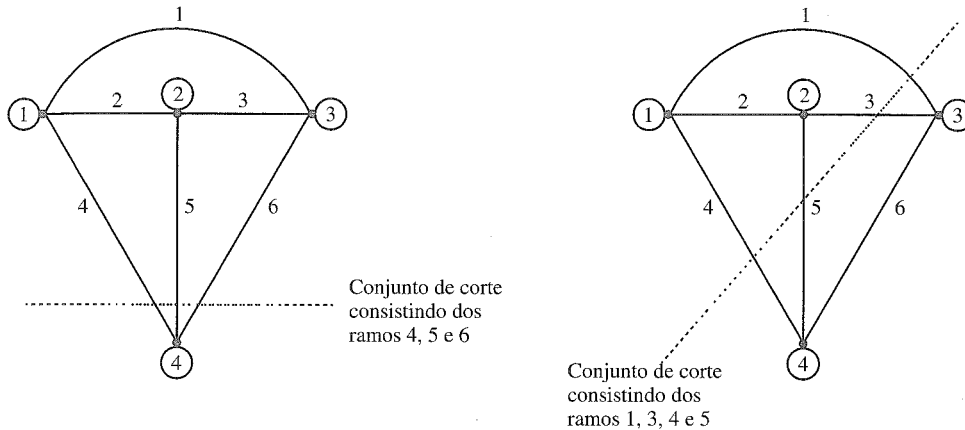


Figura 3.25 Dois conjuntos de corte para o grafo da Figura 3.22b.

Vamos supor que temos um grafo que representa um circuito e tenhamos definido os seguintes parâmetros:

$L$  = número de elos

$B$  = número de ramos no grafo

$N$  = número de nós no grafo

Agora suponhamos que removemos todos os ramos do grafo para que somente os nós permaneçam. Objetivando construir uma árvore, começamos colocando um ramo entre dois nós. Continuamos adicionando ramos à árvore de maneira a não formar nenhum laço. Cada vez que adicionamos mais um ramo, adicionamos um nó a mais. Note que a adição de todo ramo sucessivo conecta um nó, com a exceção do primeiro ramo, que conecta dois nós. Logo, existe um nó a mais que ramos na árvore. Portanto, em geral, uma árvore consiste de  $N - 1$  ramos. Uma vez que o grafo inteiro contém  $B$  ramos, o número de elos é dado pela expressão

$$L = B - (N - 1) = B - N + 1 \quad (3.31)$$

### Exemplo 3.18

Uma árvore específica para a rede mostrada na Figura 3.21 é ilustrada na Figura 3.26. Note que o grafo da rede satisfaz o relacionamento na Equação 3.31.

$$L = B - N + 1$$

$$8 = 13 - 6 + 1$$

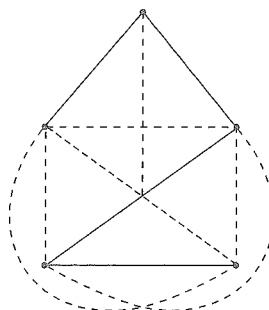


Figura 3.26 Árvore com seus elos correspondentes para a rede da Figura 3.21.

## Exercícios

**E3.15** Dado o grafo para a rede da Figura E 3.15a, especifique se as combinações de co-árvores da Figura E3.15b a f formam um conjunto válido de ramos de árvore e elos.

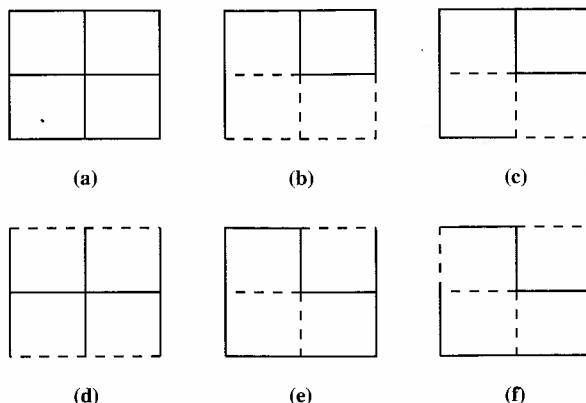


Figura E3.15

**Resp.:** (b) Não, (c) sim, (d) sim, (e) não, (f) sim.

**E3.16** Calcule o número devido de elos para os grafos da Figura E3.15a.

**Resp.:**  $L = 4$ .

## Equações Gerais de Análise Nodal

Temos mostrado que, se tivermos um conjunto *linearmente independente* de  $N - 1$  equações nodais para uma rede de  $N$  nós, poderíamos determinar as tensões nodais necessárias. Tendo isso em mente, vamos redesenhar os gráficos na Figura 3.25 com as direções assumidas de correntes como mostrado na Figura 3.27. A LKC para cada parte do circuito dividida por um conjunto de corte é chamada de uma equação de corte. Note que cada equação de corte nada mais é do que a soma de equações LKC escritas para todos os nós em ambas as partes do circuito. Por exemplo, a equação de corte para a Figura 3.27a é

$$i_4 - i_5 + i_6 = 0$$

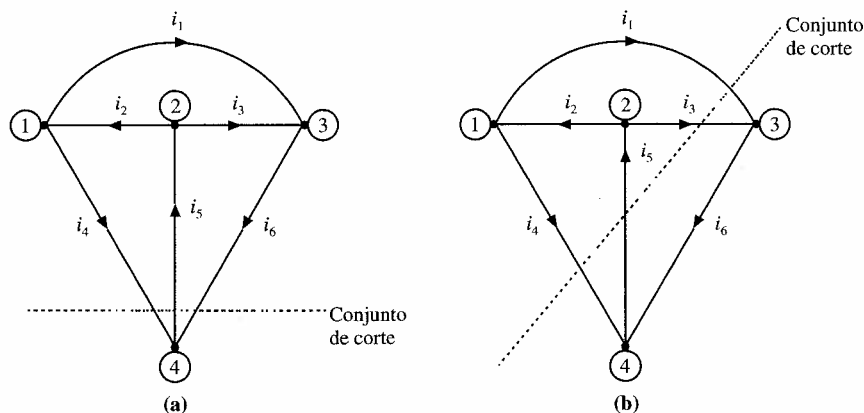


Figura 3.27 Exemplo de gráfico para ilustrar equações de corte.

que é a LKC no nó 4, onde  $i_k(t)$  representa o  $k$ -ésimo ramo. De forma semelhante, a equação de corte para a Figura 3.27b é

$$i_4 - i_5 + i_3 + i_1 = 0$$

que é a soma das equações LKC nos nós 3 e 4, ou equivalentemente nos nós 1 e 2:

$$\text{Para o nó 3: } i_1 + i_3 - i_6 = 0$$

$$\text{Para o nó 4: } i_4 - i_5 + i_6 = 0$$

Somando-se essas duas equações, tem-se

$$i_4 - i_5 + i_3 + i_1 = 0$$

Por causa do relacionamento entre as equações LKC e as equações de corte, podemos determinar as equações LKC independentes para uma rede, determinando-se as equações independentes de corte. Além disso, podemos provar [1] que o número de equações de corte (e, portanto, de equações LKC) é exatamente  $N - 1$ .

As equações de corte são derivadas de uma árvore que, como temos mostrado, contém  $N - 1$  ramos. Se qualquer ramo da árvore é cortado, a árvore será dividida em duas partes. Cada ramo da árvore que é cortado, juntamente com os elos que conectam as duas partes separadas do grafo, formam um conjunto de corte. Por exemplo, os conjuntos de corte para uma árvore específica para o grafo mostrado na Figura 3.22 são mostrados na Figura 3.28. Note que o conjunto de corte 1 inclui o ramo de árvore 5 e elos 4 e 6. O conjunto de corte 2 inclui o ramo de árvore 2 e elos 4, 3 e 6. O conjunto de corte 3 inclui o ramo de árvore 1 e elos 3 e 6. Conjuntos de corte contendo somente um único ramo de árvore são chamados de *conjunto de corte fundamental*, e há  $N - 1$  conjuntos fundamentais porque existem  $N - 1$  ramos de árvore.

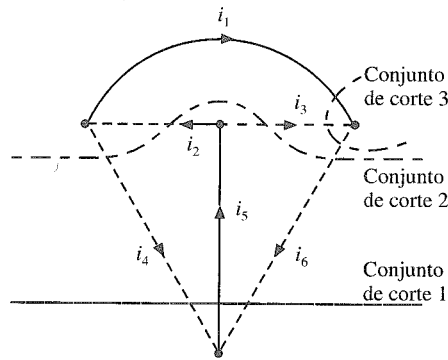


Figura 3.28 Ilustração de conjuntos de corte fundamentais.

Vamos agora demonstrar o uso de topologia para determinar as equações nodais para uma rede.

### Exemplo 3.19

O circuito da Figura 3.22a está redesenhado na Figura 3.29a com as direções inicialmente estipuladas para as correntes. Uma árvore correspondente com seus conjuntos de corte fundamentais é mostrada na Figura 3.29b. As equações de corte para os conjuntos de corte 1, 2 e 3 são

$$i_1 + i_2 - i_5 = 0 \quad (3.32)$$

$$i_1 + i_4 - i_5 = 0 \quad (3.33)$$

$$i_5 - i_3 - i_5 = 0 \quad (3.34)$$

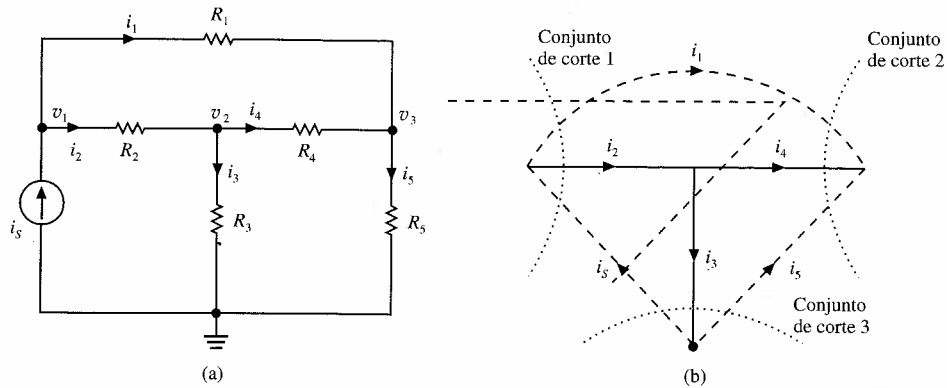
Subtraindo-se a segunda equação da primeira e somando à terceira, tem-se

$$i_2 - i_4 - i_3 = 0 \quad (3.35)$$

tem-se

Escrevendo-se as correntes de ramo em termos de tensões nodais nas equações 3.32, 3.35 e 3.34,

$$\begin{aligned} v_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - v_2 \left( \frac{1}{R_2} \right) - v_3 \left( \frac{1}{R_1} \right) &= i_s \\ -v_1 \left( \frac{1}{R_2} \right) + v_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - v_3 \left( \frac{1}{R_4} \right) &= 0 \\ -v_1 \left( \frac{1}{R_1} \right) - v_2 \left( \frac{1}{R_4} \right) + v_3 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) &= 0 \end{aligned}$$



**Figura 3.29** Rede e grafo usados no Exemplo 3.19.

que reconhecemos ser as equações nodais para a rede.

### Exemplo 3.20

Desejamos derivar as equações nodais para a rede da Figura 3.3. Um grafo para essa rede é mostrado na Figura 3.30.

As equações de corte para esse grafo são

$$i_1 - i_A + i_2 - i_3 = 0$$

$$i_3 - i_2 + i_4 + i_B = 0$$

$$i_3 + i_5 + i_B = 0$$

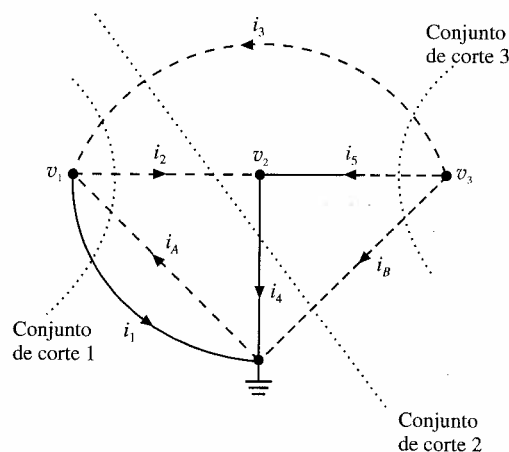
Subtraindo-se a terceira equação da segunda e usando a equação resultante com a primeira e terceira equações, tem-se

$$i_1 + i_2 - i_3 = i_A$$

$$-i_2 + i_4 - i_5 = 0$$

$$i_3 + i_5 = -i_B$$

que são idênticas às equações derivadas anteriormente.



**Figura 3.30** Grafo e conjuntos de corte para a rede mostrada na Figura 3.3.

Por último, se existem fontes de tensão presentes na rede, então, em geral, o número de equações independentes LKC é  $N - 1$  – o número de fontes de tensão.

Ao utilizar equações nodais para resolver circuitos contendo fontes de tensão, as seguintes regras regem a formulação das equações necessárias.

- (1) número de equações LKC = número de nós topológicos – 1 (ou seja, nós restantes com fontes de tensão e corrente recolocadas por circuitos abertos e em curto, respectivamente – 1)

- (2) número de equações de restrição = número de fontes de tensão
- (3) número de variáveis = número de nós físicos - 1
- = soma do número de equações (1) e (2)

### Exercício

**E3.17** Dada a rede da Figura E3.17a, use o grafo especificado para a rede na Figura E3.17b para escrever um conjunto próprio de equações nodais para a rede.

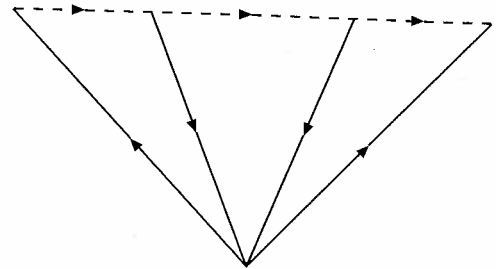
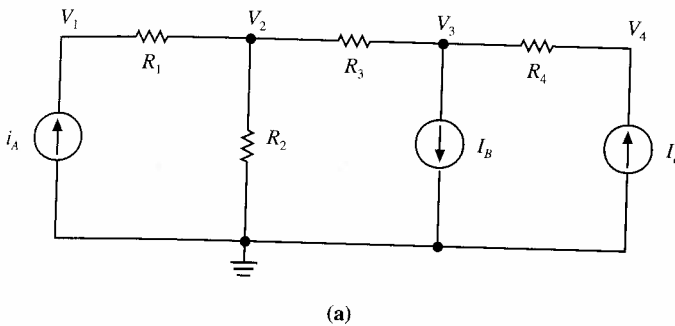


Figura E3.17

Resp.: 
$$I_A = \frac{V_1 - V_2}{R_1}, \frac{V_1 - V_2}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2 - V_3}{R_3},$$

$$\frac{V_2 - V_3}{R_3} = \frac{V_3 - V_4}{R_4} + I_B, \frac{V_3 - V_4}{R_4} = -I_C.$$

### Equações Gerais de Análise de Laço

Vamos considerar mais uma vez o grafo mostrado na Figura 3.28. Imagine que começamos somente com três ramos de árvore: 1, 2 e 5. Se agora adicionarmos a eles um elo de cada vez, criaremos um novo laço com cada elo. Por exemplo, adicionando-se o elo 3, um laço é gerado consistindo daquele elo e os ramos de árvore 1 e 2. Laços semelhantes são gerados quando outros elos são adicionados um de cada vez. Já que mostramos que o número de elos é igual a  $B - N + 1$ , construiremos esse mesmo número de laços, cada um deles contendo somente um elo. Os laços construídos dessa maneira são chamados de *laços fundamentais*. Se forem escritas equações LKT para esses laços fundamentais, essas equações serão independentes, desde que cada uma contenha uma tensão de elo que não esteja presente em nenhuma outra equação. Portanto, existem  $B - N + 1$  equações LKT independentes e, de fato, podemos provar [1] que existem exatamente  $B - N + 1$  equações LKT independentes.

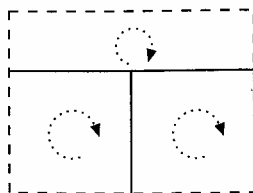
Se existem fontes de corrente presentes na rede, então, em geral, o número de equações LKT independentes é  $B - N + 1$  - o número de fontes de corrente.

Ao utilizar equações de laço para resolver circuitos que contêm fontes de corrente, as seguintes regras se aplicam à formulação das equações necessárias:

- (1) número de equações LKT = número de laços topológicos (ou seja, laços que permanecem com fontes de corrente e fontes de tensão desligadas)
- (2) número de equações de restrição = número de fontes de corrente
- (3) número de variáveis = número de laços físicos
- = soma do número de equações (1) e (2)

Até o momento, nossa análise tem sido muito geral. No caso especial de redes planas, "janelas" podem ser empregadas para escrever as equações LKT necessárias. A Figura 3.31, que é uma versão redesenhada da Figura 3.29, ilustra tal método. Se assumirmos que todas as correntes de malha estão na mesma di-

reção e nenhuma fonte controlada está presente, as equações LKT para as janelas podem ser escritas por inspeção, como demonstrado anteriormente.



**Figura 3.31** Grafo ilustrando janelas para o circuito da Figura 3.29.

### Exemplo 3.21

Usando os métodos de topologia já descritos, desejamos derivar as equações de laço para a rede da Figura 3.12. Um grafo para essa rede é mostrado na Figura 3.32a. As tensões de ramo foram selecionadas e os elos, juntamente com os ramos de árvore apropriados, formam os laços fundamentais.

As variáveis de corrente do laço fundamental são  $i_1$  e  $i_2$  e as equações do laço fundamental são

$$v_1 - v_{R_1} - v_{R_3} - v_{R_2} = 0$$

$$v_{R_3} - v_2 - v_{R_4} - v_{R_5} = 0$$

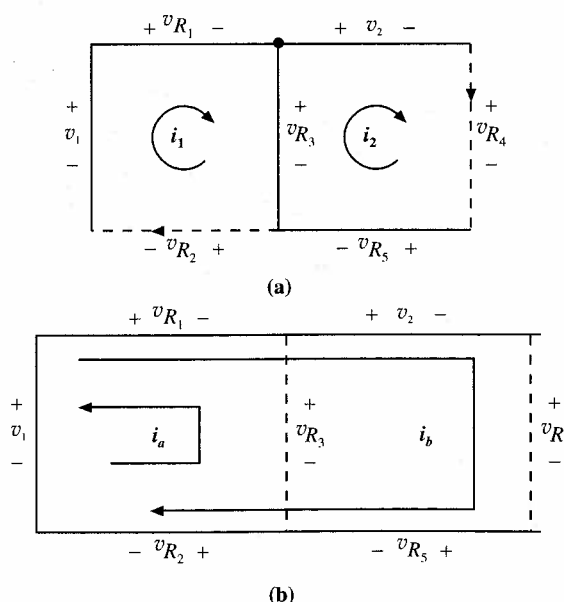
Utilizando o relacionamento  $v = iR$ , temos

$$\begin{aligned} i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_3 + i_1 R_2 &= v_1 \\ -(i_1 - i_2) R_3 + i_2 R_4 + i_2 R_5 &= -v_2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} i_1 (R_1 + R_2 + R_3) - i_2 R_3 &= v_1 \\ -i_1 R_3 + i_2 (R_3 + R_4 + R_5) &= -v_2 \end{aligned}$$

que são as mesmas equações de 3.18.



**Figura 3.32** Grafo para a rede da Figura 3.12 ilustrando laços fundamentais.

Suponhamos, no entanto, que tivéssemos selecionado ramos de árvore e os elos correspondentes para a rede como mostrado na Figura 3.32b. As correntes de laço fundamental são  $i_a$  e  $i_b$ , e as equações de laço fundamental resultam, nesse caso, em

$$v_1 - v_{R_1} - v_{R_3} - v_{R_2} = 0$$

$$v_1 - v_{R_1} - v_2 - v_{R_4} - v_{R_5} - v_{R_2} = 0$$

Uma vez que  $v_R = (i_a + i_b)R_1$ , e assim por diante, as equações acima podem ser escritas em termos de correntes de laço como

$$\begin{aligned}(R_1 + R_2 + R_3)i_a + (R_1 + R_2)i_b &= v_1 \\ (R_1 + R_2)i_a + (R_1 + R_2 + R_4 + R_5)i_b &= v_1 - v_2\end{aligned}$$

Essas duas equações linearmente independentes também produzirão todas as correntes e tensões na rede. ■

### Exercício

**E3.18** Dada a rede da Figura E3.18a e o grafo para a rede da Figura E3.18b, escreva um conjunto próprio de equações de laço que produzirão todas as correntes da rede.

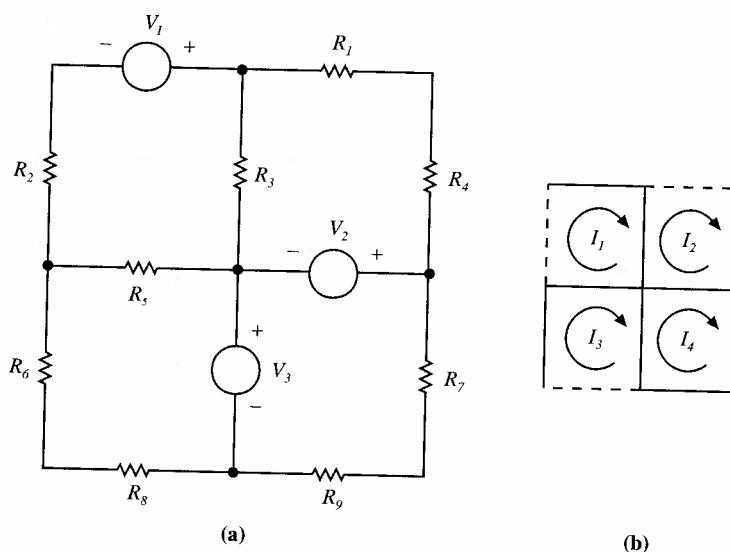


Figura E3.18

Resp.: 
$$\begin{aligned}I_1(R_2 + R_3 + R_5) - I_2(R_3) - I_3(R_5) - I_4(0) &= V_1, \\ -I_1(R_3) + I_2(R_1 + R_3 + R_4) - I_3(0) - I_4(0) &= V_2, \\ -I_1(R_5) - I_2(0) + I_3(R_5 + R_6 + R_8) - I_4(0) &= -V_3, \\ -I_1(0) - I_2(0) - I_3(0) + I_4(R_7 + R_9) &= V_2 + V_3.\end{aligned}$$

## 3.4 Circuitos com Amplificadores Operacionais

O amplificador operacional, ou amp-op como é normalmente conhecido, é um circuito de extrema importância. É uma interconexão versátil de componentes que expande amplamente a capacidade de projeto de circuitos. Ele é empregado em uma ampla gama de aplicações, desde sistemas de controle de motores até fornos de microondas.

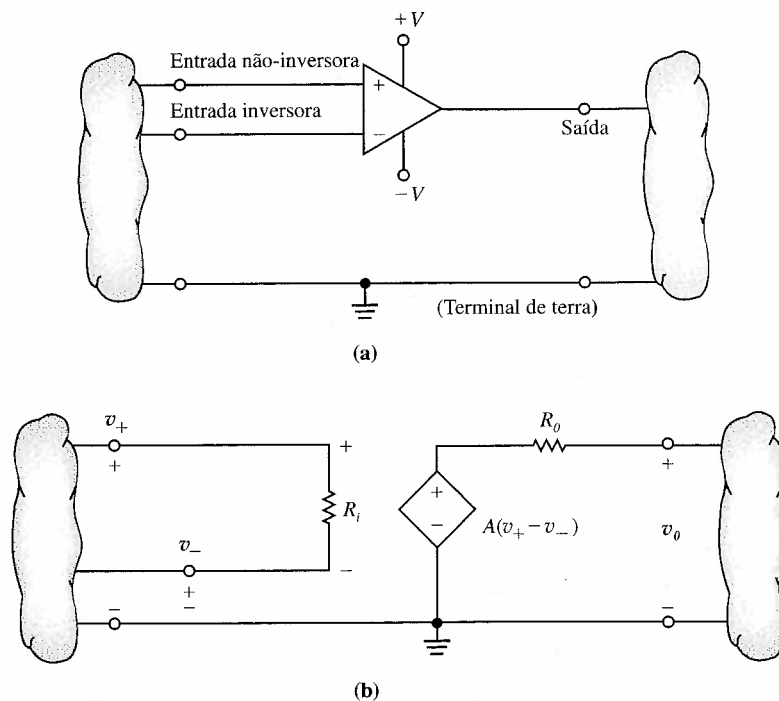
Diferindo dos elementos de circuito introduzidos até agora, o amp-op é modelado como um elemento com mais de um terminal. Ele surgiu por volta de 1940 para ser usado em computadores analógicos, e atualmente encontra vasta aplicação no projeto de circuitos, em consequência dos avanços na tecnologia de circuitos integrados. Apesar de modelarmos o amp-op como um elemento muito simples, sua construção na realidade envolve o uso de inúmeros componentes discretos, incluindo resistores, capacitores e transistores.

O símbolo de circuito para o amp-op é mostrado na Figura 3.33a. Somente os cinco terminais principais do componente são mostrados. O componente às vezes possui outros terminais para ajuste fino das características do componente; entretanto, discuti-los neste momento complicaria desnecessariamente a discussão. Os dois terminais de tensão são para o fornecimento de tensões de alimentação dc (tipicamente, 10 a 15 V) e também fornecem um caminho de retorno para o terra para a corrente ac. Os sinais + e - para os dois terminais de entrada indicam a polaridade da saída quando comparada com a entrada; isto é, uma en-



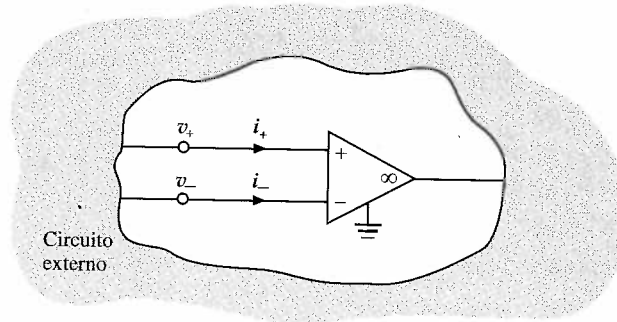
trada positiva no terminal de entrada *não-inversor* produz uma saída positiva, enquanto uma entrada positiva no terminal *inversor* produz uma saída negativa.

Nosso interesse no amp-op está confinado às suas características de entrada-saída e, portanto, nosso modelo ignora as tensões de alimentação. Funcionalmente, o amp-op opera como o circuito equivalente mostrado na Figura 3.33b. Esse circuito equivalente implica um componente unilateral; isto é, a saída é determinada pela diferença das tensões de entrada, mas a entrada não é afetada pelas tensões aplicadas à saída. A resistência  $R_i$  é muito grande, o ganho de  $A$  é muito alto e a resistência de saída  $R_o$  é muito baixa; valores típicos para esses parâmetros são  $10^5$  a  $10^{12} \Omega$ ,  $10^5$  a  $10^7$  V/V e 1 a  $50 \Omega$ , respectivamente. Os valores desses parâmetros nesse modelo sugerem um modelo ainda mais simples.  $R_i$  é muito grande e, portanto, pode ser assumido ser um circuito aberto.  $R_o$  é muito baixo em relação à conexão recomendada de saída carregada, e portanto pode ser assumida ser zero. Finalmente, o ganho  $A$  é um fator amplificador extremamente grande e pareceria representar essencialmente um ganho infinito ( $\infty$ ). A esta altura de nossa educação, entretanto, o termo “ganho infinito” causa alguma preocupação. Isto significa que se a entrada é  $1 \mu\text{V}$ , a saída é ilimitada? Nosso bom senso nos leva a questionar tal condição. Se não existe nenhum sinal de retorno da saída para a entrada invertida, a saída seria limitada somente pelo valor das tensões de alimentação. Obviamente, esta não é uma situação muito útil. Por essa razão, em aplicações típicas, o amp-op é conectado a componentes externos com um caminho de sinal da saída para a entrada invertida. Com o amp-op conectado a um circuito dessa maneira, veremos que o alto ganho serve para manter o relacionamento entrada-saída independente das mudanças das características carregadas. Contanto que o ganho do amplificador  $A$  seja muito grande, a funcionalidade do circuito será especificada pelos componentes conectados externamente.



**Figura 3.33** Representações de amplificadores operacionais.

Feitas as considerações acima, o modelo ideal para o amp-op é reduzido àquele mostrado na Figura 3.34. As características importantes do modelo são: (1) Desde que  $R_i$  seja extremamente grande, as correntes de entrada para o amp-op são aproximadamente zero (ou seja,  $i_+ \approx i_- \approx 0$ ); e (2) se a tensão de saída é para permanecer limitada, então quando o ganho se torna muito grande e se aproxima do infinito, a tensão sobre os terminais de entrada deve simultaneamente se tornar infinitesimalmente pequenas de modo que  $A \rightarrow \infty$ ,  $v_+ - v_- \rightarrow 0$  (ou seja,  $v_+ - v_- = 0$  ou  $v_+ = v_-$ ). A diferença entre essas tensões de entrada é frequentemente chamada de *signal de erro* para o amp-op (ou seja,  $v_+ - v_- = v_e$ ).



**Figura 3.34** Modelo ideal para um amplificador operacional. Parâmetros do modelo:  $i_+ - i_- = 0$ ,  $v_+ = v_-$ .

O terminal terra ( $\perp$ ) mostrado no amp-op é necessário para retorno de sinal de corrente e garante que a lei de Kirchhoff para corrente seja satisfeita tanto no amp-op como no terra do circuito.

Em resumo, o modelo ideal para o amp-op é simplesmente especificado pelas seguintes condições:

$$\begin{aligned} i_+ &= i_- = 0 \\ v_+ &= v_- \end{aligned} \quad (3.36)$$

Essas condições simples são extremamente importantes porque formam a base de nossa análise de circuitos com amp-op's.

O exemplo a seguir servirá para ilustrar a validade dos pressupostos acima quando analisamos circuitos com amp-op's.

### Exemplo 3.22

Considere o circuito amp-op mostrado na Figura 3.35a. O modelo para o amp-op é mostrado genericamente na Figura 3.35b e especificamente em termos dos parâmetros  $R_i$ ,  $A$  e  $R_o$  na Figura 3.35c. Se o modelo for inserido na rede da Figura 3.35a, obtém-se o circuito mostrado na Figura 3.35d, que pode ser redesenhado como mostrado na Figura 3.35e.

As equações nodais para a rede são

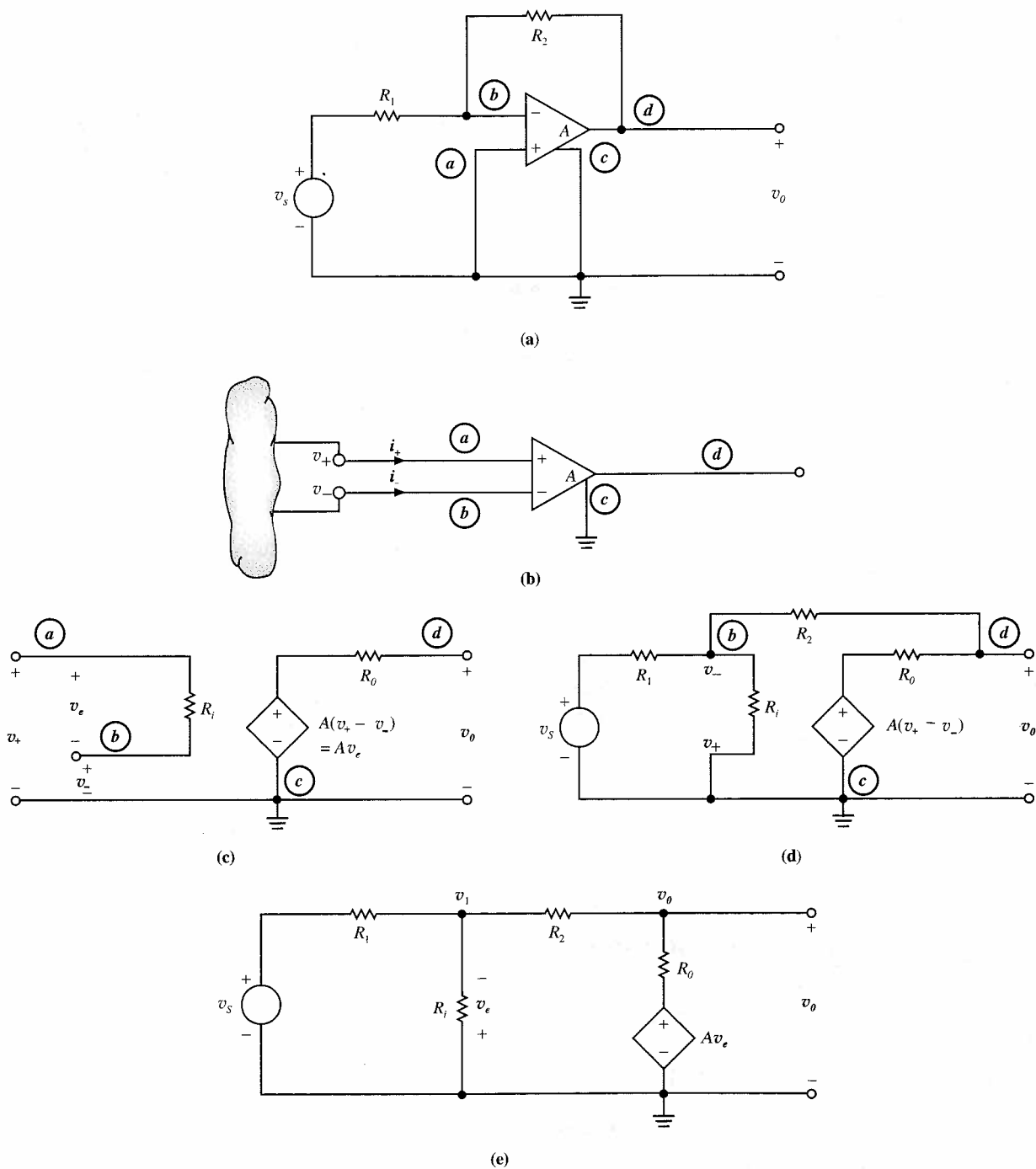
$$\begin{aligned} \frac{v_1 - v_s}{R_1} + \frac{v_1}{R_i} + \frac{v_1 - v_0}{R_2} &= 0 \\ \frac{v_0 - v_1}{R_2} + \frac{v_0 - Av_e}{R_o} &= 0 \end{aligned}$$

onde  $v_e = -v_1$ . As equações podem ser escritas em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} & -\left(\frac{1}{R_2}\right) \\ -\left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o}\right) & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se para as tensões nodais, obtém-se

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} & \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_o} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Figura 3.35** Circuito com amp-op.

onde

$$\Delta = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_0} \right) - \left( \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_0} \right)$$

Dessa forma,

$$v_0 = \frac{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_0}\right)\left(\frac{v_s}{R_1}\right)}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_0}\right) - \left(\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_0}\right)}$$

que pode ser escrita como

$$\frac{v_0}{v_s} = \frac{-(R_2/R_1)}{1 - \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_0}\right) / \left(\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{A}{R_0}\right)\right]}$$

Se empregarmos valores típicos para os parâmetros do circuito (por exemplo,  $A = 10^5$ ,  $R_i = 10^8 \Omega$ ,  $R_0 = 10 \Omega$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  e  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ ), o ganho de tensão da rede é

$$\frac{v_0}{v_s} = -4,9996994 \approx -5,000$$

Entretanto, um amp-op ideal tem um ganho infinito e, portanto, tomando-se o limite da equação de ganho quando  $A \rightarrow \infty$ , obtém-se

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{v_0}{v_s}\right) = -\frac{R_2}{R_1} = -5,000$$

Note que o amp-op ideal produziu um resultado com precisão de quatro dígitos significativos em relação àqueles obtidos a partir de uma solução exata de um modelo típico de amp-op. Esses resultados são facilmente repetidos para a vasta combinação de circuitos úteis com amp-op's.

Vamos agora analisar a rede da Figura 3.35a usando o modelo ideal do amp-op. Nesse modelo,

$$i_+ = i_- = 0$$

$$v_+ = v_-$$

Como mostrado na Figura 3.35a,  $v_+ = 0$  e, portanto,  $v_- = 0$ . Se escrevermos agora uma equação nodal no terminal negativo do amp-op, tem-se

$$\frac{v_s - 0}{R_1} + \frac{v_0 - 0}{R_2} = 0$$

ou

$$\frac{v_0}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1}$$

onde foi obtido o resultado derivado acima. Uma vez que é muito mais simples empregar o modelo ideal amp-op do que o modelo não-ideal, a menos que especificado de outro modo, usaremos os pressupostos de um amp-op ideal para analisar circuitos que contenham amplificadores operacionais. ■

### Exemplo 3.23

Consideremos o circuito amp-op mostrado na Figura 3.36. A equação nodal no terminal inversor é

$$\frac{v_1 - v_-}{R_1} + \frac{v_0 - v_-}{R_2} = i_-$$

No terminal não-inversor, a LKC produz

$$\frac{v_2 - v_+}{R_3} + \frac{v_+}{R_4} + i_+ = 0$$

Entretanto,  $i_+ = i_- = 0$  e  $v_+ = v_-$ . Substituindo esses valores nas duas equações acima, temos

$$\frac{v_1 - v_-}{R_1} + \frac{v_0 - v_-}{R_2} = 0$$

e

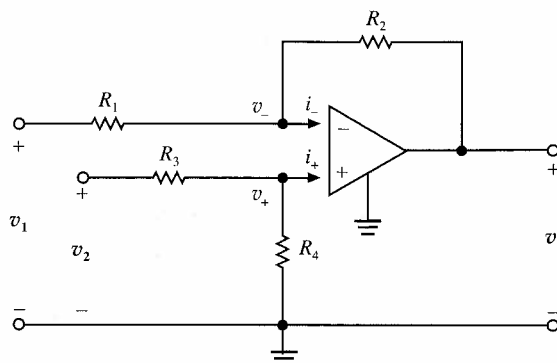
$$\frac{v_2 - v_-}{R_3} = \frac{v_-}{R_4}$$

Resolvendo-se essas equações para  $v_0$ , tem-se a seguinte expressão

$$v_0 = \frac{R_2}{R_1} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1$$

Repare que se  $R_4 = R_2$  e  $R_3 = R_1$ , a expressão se reduz a

$$v_0 = \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_1)$$



**Figura 3.36** Circuito diferencial amplificador operacional.

Portanto, esse circuito amp-op pode ser empregado para subtrair duas tensões de entrada. ■

### Exemplo 3.24

O circuito mostrado na Figura 3.37a é um amplificador diferencial de tensão de precisão. Ele é usado para fornecer uma entrada única para um conversor analógico-digital. Desejamos derivar uma expressão para a saída desse circuito em termos das duas entradas.

Para se conseguir isso, desenhemos o circuito equivalente mostrado na Figura 3.37b. Vamos relembrar que a tensão sobre os terminais de entrada do amp-op é aproximadamente zero e as correntes nos terminais de entrada são aproximadamente zero. Note que podemos escrever equações nodais para as tensões nodais  $v_1$  e  $v_2$  em termos de  $v_0$  e  $v_a$ . Já que estamos interessados em uma expressão para  $v_0$  em termos das tensões  $v_1$  e  $v_2$ , simplesmente eliminamos os termos  $v_a$  das duas equações nodais. As equações nodais são

$$\frac{v_1 - v_0}{R_2} + \frac{v_1 - v_a}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_G} = 0$$

$$\frac{v_2 - v_a}{R_1} + \frac{v_2 - v_1}{R_G} + \frac{v_2}{R_2} = 0$$

Somando as duas equações eliminaremos  $v_a$  e, dessa forma, se  $v_0$  está escrito em termos de  $v_1$  e  $v_2$ , obtém-se

$$v_0 = (v_1 - v_2) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{2R_2}{R_G} \right)$$

■

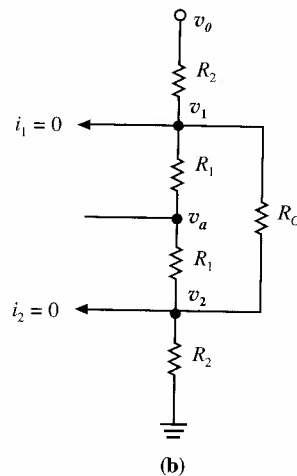
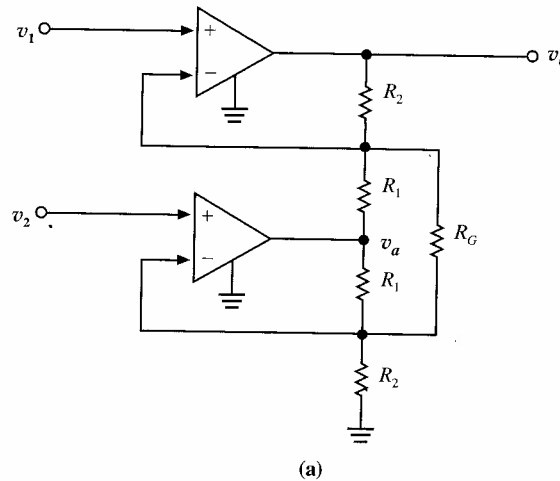


Figura 3.37 Circuito amplificador de instrumentação.

### Exemplo 3.25

Desejamos calcular a resistência de entrada do circuito amp-op mostrado na Figura 3.38 sem assumir qualquer tamanho dos parâmetros  $A$ ,  $R_i$  e  $R_o$ .

A resistência de entrada é a resistência vista pela entrada da fonte de tensão  $v_1$ . Usando-se o modelo amp-op mostrado na Figura 3.33b, obtém-se o circuito mostrado na Figura 3.38b. As equações de malha para esse circuito são

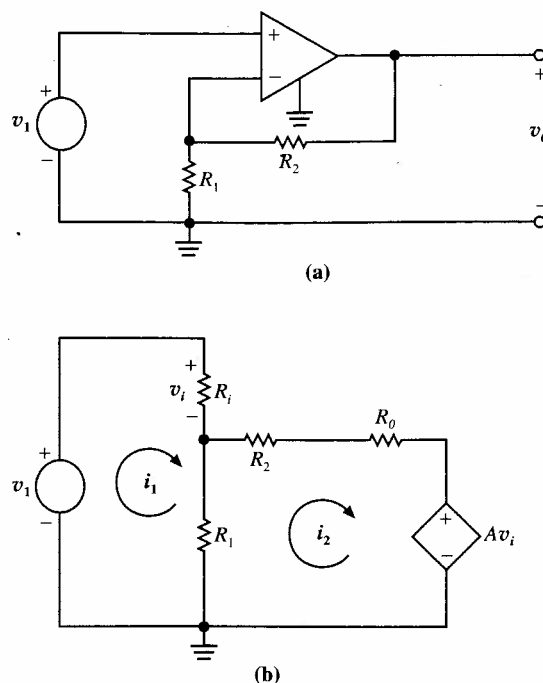
$$\begin{aligned} v_1 &= i_1(R_i + R_1) - i_2 R_1 \\ -A v_i &= -i_1 R_1 + i_2(R_1 + R_2 + R_0) \\ v_i &= R_i i_1 \end{aligned}$$

Resolvendo-se essas equações para  $i_1$ , tem-se

$$i_1 = \frac{v_1(R_1 + R_2 + R_0)}{(R_i + R_1)(R_1 + R_2 + R_0) + R_1(AR_i - R_1)}$$

A resistência de entrada é

$$\begin{aligned} R_{in} &= \frac{v_1}{i_1} = \frac{(R_i + R_1)(R_1 + R_2 + R_0) + R_1(AR_i - R_1)}{R_1 + R_2 + R_0} \\ &= R_i + \frac{R_1(R_2 + R_0 + AR_i)}{R_1 + R_2 + R_0} \end{aligned}$$



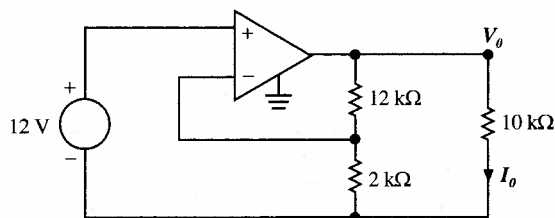
**Figura 3.38** Circuito e modelo para um amplificador operacional não-inversor.

Já que  $A$  e  $R_i$  são normalmente muito grandes e  $R_o$  é muito pequena, a expressão para  $R_{in}$  pode ser aproximada pela equação

$$R_{in} \approx \frac{AR_i}{1 + R_2/R_1}$$

### Exercícios

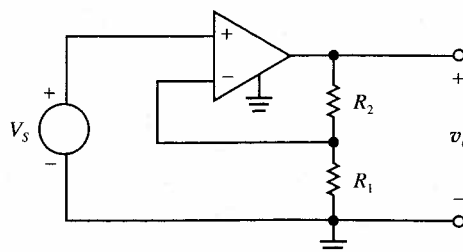
**E3.19** Determine  $I_o$  na rede da Figura E3.19.



**Figura E3.19**

**Resp.:**  $I_o = 8,4 \text{ mA}$ .

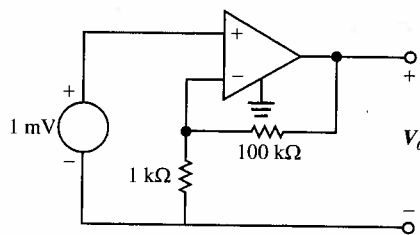
**E3.20** Determine o ganho do circuito amp-op da Figura 3.20.



**Figura E3.20**

**Resp.:**  $\frac{V_o}{V_s} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ .

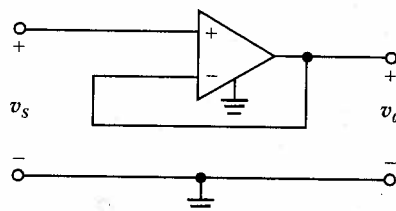
**E3.21** Determine tanto o ganho como a tensão de saída da configuração amp-op mostrada na Figura E3.21.



**Figura E3.21**

**Resp.:**  $V_o = 0,101 \text{ V}$ , ganho = 101.

Um caso importante de amplificador não-inversor é a configuração mostrada na Figura 3.39. Note que esse circuito é equivalente àquele mostrado na Figura E3.20 com  $R_1 = \infty$  (ou seja, circuito aberto) e  $R_2 = 0$  (ou seja, curto-circuitado). Sob tais condições, nota-se que o ganho do circuito é de  $1 + R_2/R_1 = 1$  (ou seja,  $v_o = v_S$ ). Uma vez que  $v_o$  segue  $v_S$ , o circuito é chamado de um *seguidor de tensão*.

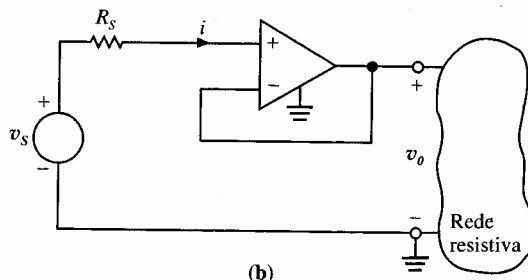
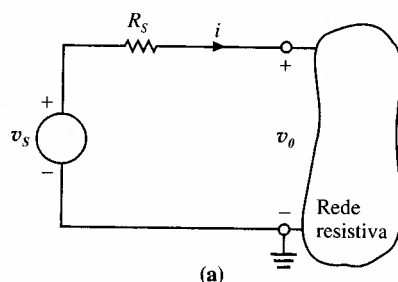


**Figura 3.39** Configuração do amplificador operacional seguidor de tensão.

Uma questão óbvia a esta altura é: Se  $v_o = v_S$ , por que simplesmente não conectamos  $v_S$  a  $v_o$  por dois fios paralelos; por que colocar um amp-op entre eles? A resposta para essa questão é fundamental e fornece subsídios que serão de auxílio na análise e projeto de circuitos.

Consideremos o circuito mostrado na Figura 3.40a. Nesse caso,  $v_o$  não é igual a  $v_S$  por causa da queda de tensão sobre  $R_S$ :

$$v_o = v_S - iR_S$$



**Figura 3.40** Ilustração da capacidade de isolamento do seguidor de tensão.



Entretanto, na Figura 3.40b, a corrente de entrada do amp-op é zero e, portanto,  $v_S$  aparece na entrada do amp-op. Desde que o ganho da configuração amp-op seja 1,  $v_o = v_S$ . Na Figura 3.40a, a interação da rede resistiva com a fonte fez com que a tensão  $v_o$  fosse bem menor que  $v_S$ . Em outras palavras, a rede resistiva carrega a fonte de tensão. Entretanto, na Figura 3.40b o amp-op isola a fonte da rede resistiva e, portanto, o seguidor de tensão é referido como um *amplificador buffer* porque ele pode ser usado para 'isolar' um circuito de outro. A energia fornecida à rede resistiva no primeiro caso deve vir da fonte  $v_S$ , enquanto no segundo caso ela vem do suprimento de potência que supre o amplificador, e pouca ou nenhuma energia é retirada de  $v_S$ .

### 3.5 Resumo

Duas técnicas importantes e extremamente úteis para análise de circuitos foram introduzidas. Tanto os métodos de tensão nodal quanto o de corrente de laço produzem um conjunto de equações simultâneas que quando resolvidas nos capacitam a determinar qualquer tensão ou corrente na rede. Procedimentos para simplificação da análise foram apresentados e técnicas para resolução das equações foram ressaltadas. Foram introduzidos conceitos de topologia bem como o amplificador operacional e seu circuito equivalente, dos quais faremos uso em uma variedade de circuitos no decorrer do livro.

#### Pontos-Chave

- Quando resolver um circuito de  $N$  nós utilizando análise nodal:
  1. Marque todos os nós, selecionando um como o nó de referência.
  2. Se o circuito contém somente fontes de corrente independentes, escreva  $N - 1$  equações independentes simultâneas usando a LKC para determinar as  $N - 1$  tensões nodais desconhecidas.
  3. Se o circuito contém uma fonte independente de tensão, um supernó englobando essa fonte é criado e uma equação de restrição para essa fonte pode ser escrita além das equações LKC para o supernó e os nós restantes.
  4. Se o circuito contém uma fonte dependente, trate a fonte dependente como se ela fosse independente na escrita das  $N - 1$  equações nodais independentes, e então escreva uma equação adicional para o parâmetro de controle da fonte dependente.
  5. Resolva as equações usando qualquer método conveniente.
- Quando resolver um circuito de  $N$  laços usando análise de laço:
  1. Marque  $N$  correntes de laços para  $N$  caminhos distintos através da rede.
  2. Se o circuito contém somente fontes independentes de tensão, escreva  $N$  equações linearmente independentes simultâneas usando a LKT para determinar as  $N$  correntes de laço desconhecidas.
  3. Se o circuito contém uma fonte independente de corrente, uma equação de restrição é escrita para a corrente que flui através dela; a fonte de corrente é então substituída por um circuito aberto e outra equação é escrita para o laço criado recentemente.
  4. Se o circuito contém uma fonte dependente, trate-a como se ela fosse uma fonte independente na escrita das  $N$  equações de laço e então escreva uma equação adicional para o parâmetro de controle da fonte dependente.
  5. Resolva as equações utilizando qualquer método conveniente, como regra de Cramer, matrizes ou substituição.
- Para um amp-op ideal,  $i_+ = i_- = 0$  e  $v_+ = v_-$ .

#### Problemas

3.1 Determine  $V_o$  na rede da Figura P3.1.

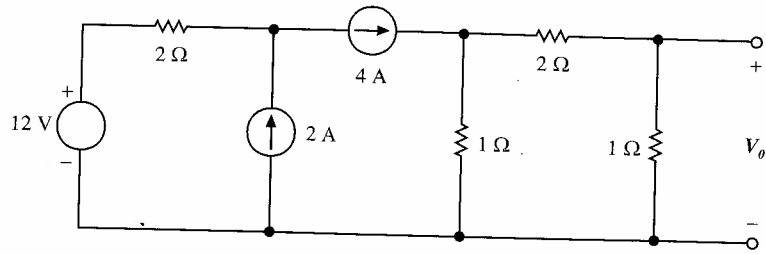


Figura P3.1

3.2 Determine  $V_o$  na rede da Figura P3.2.

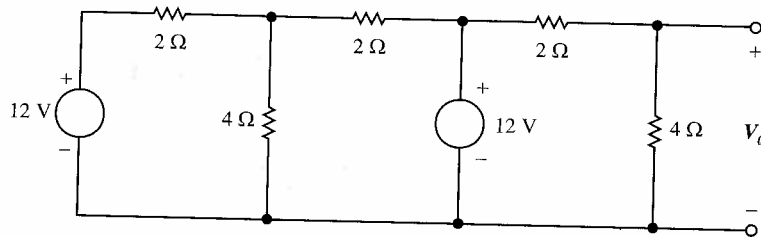


Figura P3.2

3.3 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.3.

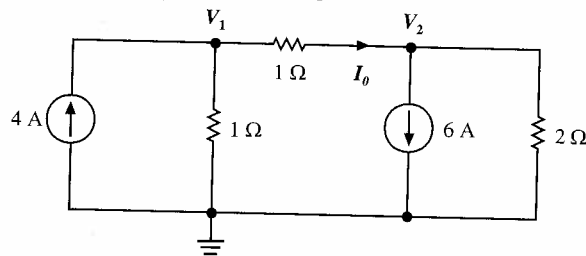


Figura P3.3

3.4 Determine  $I_o$  na rede da Figura P3.4 utilizando análise nodal.

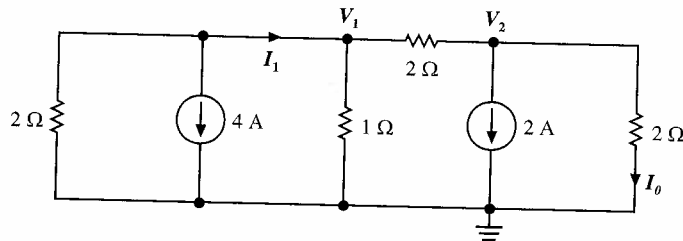


Figura P3.4

3.5 Determine  $I_1$  na rede da Figura P3.4 utilizando análise nodal.

3.6 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.6.

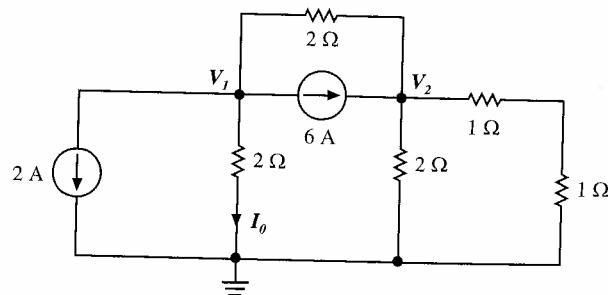


Figura P3.6

- 3.7 Utilize equações nodais para determinar  $V_o$  no circuito mostrado na Figura P3.7.

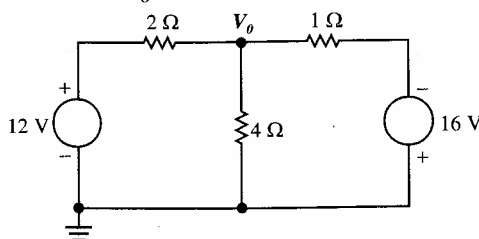


Figura P3.7

- 3.8 Utilize equações nodais para determinar  $V_2$  no circuito mostrado na Figura P3.8.

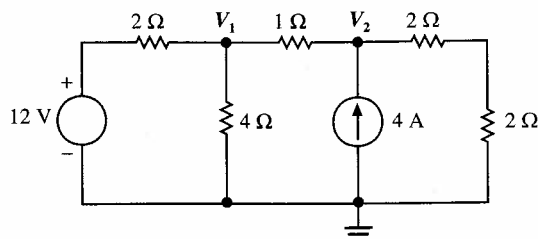


Figura P3.8

- 3.9 Determine  $I_o$  e  $I_x$  na rede da Figura P3.9 utilizando análise nodal.

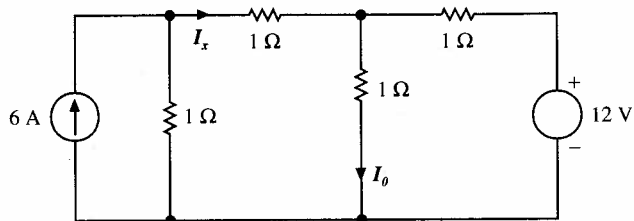


Figura P3.9

- 3.10 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.10.

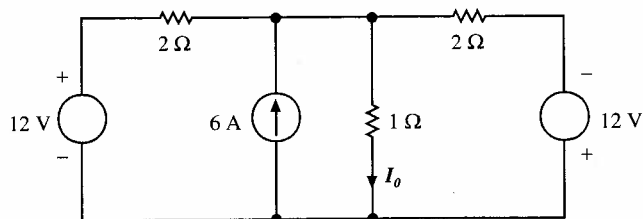


Figura P3.10

- 3.11 Utilize análise nodal para determinar  $V_o$  na rede da Figura P3.11.

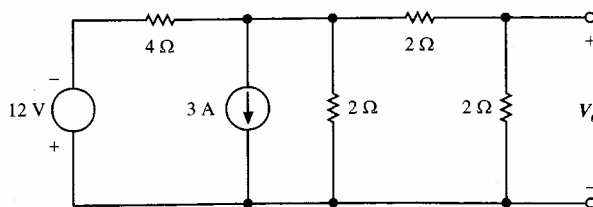


Figura P3.11

- 3.12 Utilize análise nodal para determinar  $V_2$  no circuito mostrado na Figura P3.12.

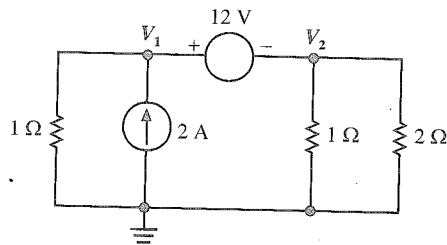


Figura P3.12

- 3.13 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.13.

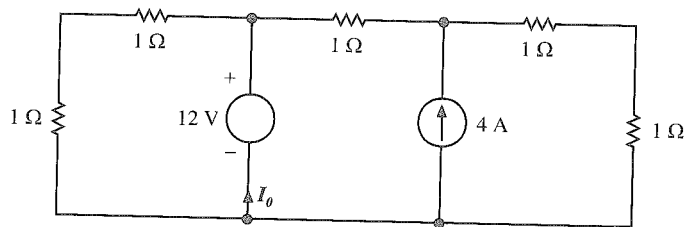


Figura P3.13

- 3.14 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.14.

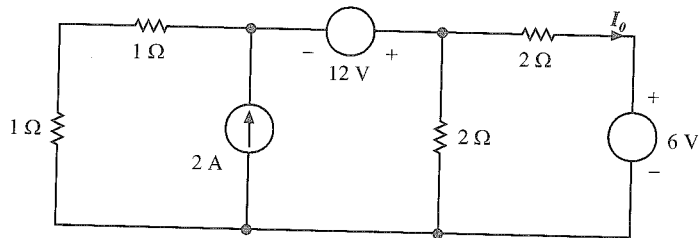


Figura P3.14

- 3.15 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.15.

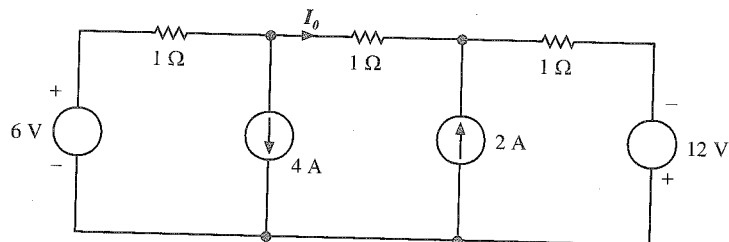


Figura P3.15

- 3.16 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.16.

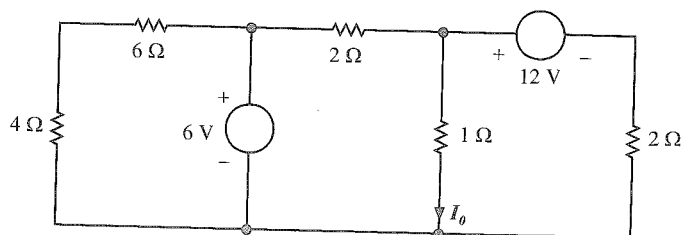


Figura P3.16

3.17 Utilize equações nodais para determinar  $I_o$  no circuito da Figura P3.17.

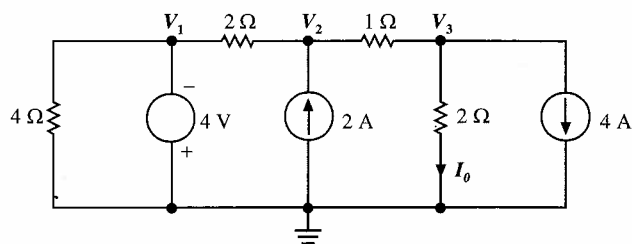


Figura P3.17

3.18 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.18.

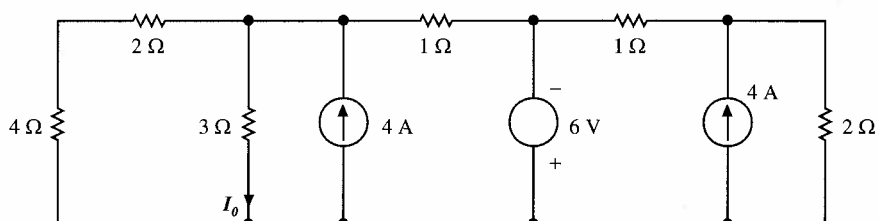


Figura P3.18

3.19 Utilize análise nodal para determinar  $V_o$  na rede da Figura P3.19.

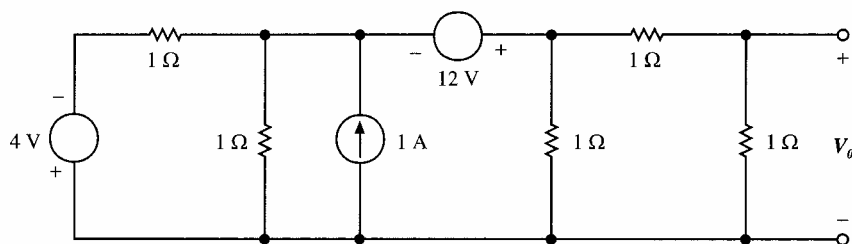


Figura P3.19

3.20 Determine todas as tensões nodais do circuito mostrado na Figura P3.20 utilizando equações nodais.

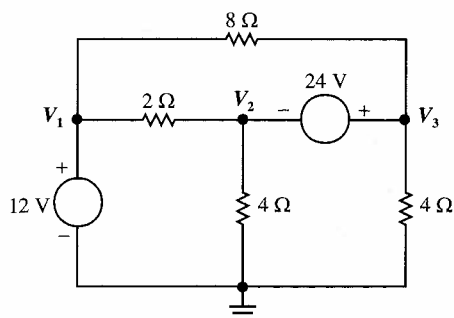


Figura P3.20

3.21 Determine  $I_o$  na rede da Figura P3.21 utilizando análise nodal.

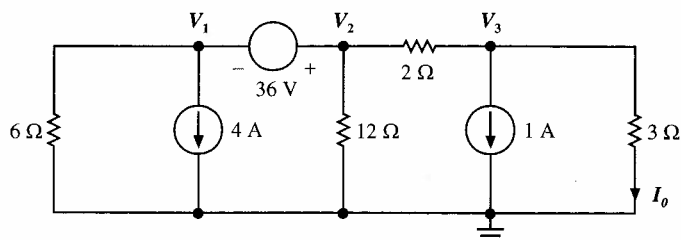


Figura P3.21

3.22 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.22.

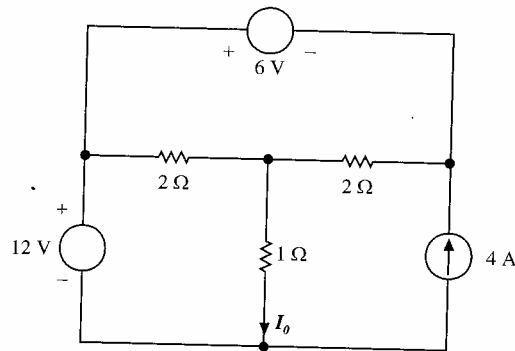


Figura P3.22

3.23 Utilize análise nodal para determinar  $V_o$  na rede da Figura P3.23.

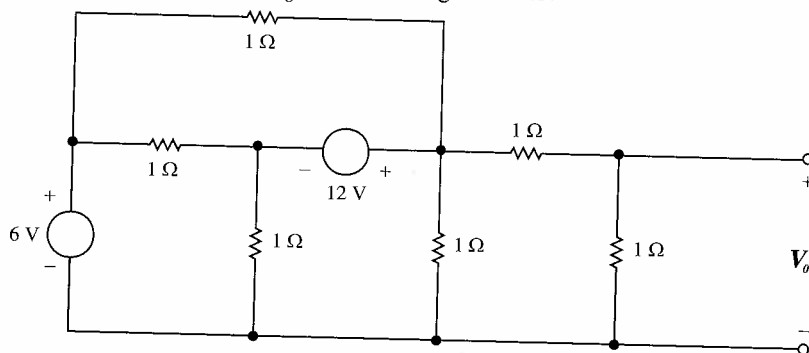


Figura P3.23

3.24 Utilize análise nodal para determinar  $V_o$  na rede da Figura P3.24.

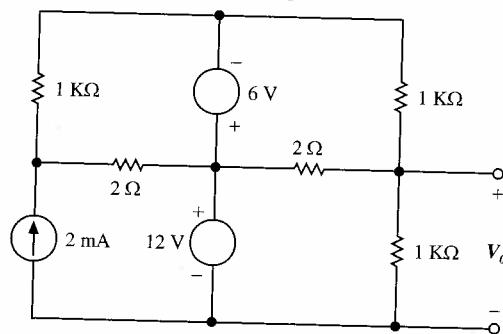


Figura P3.24

3.25 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.25.

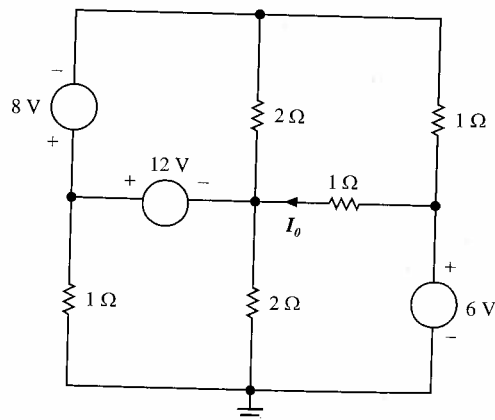
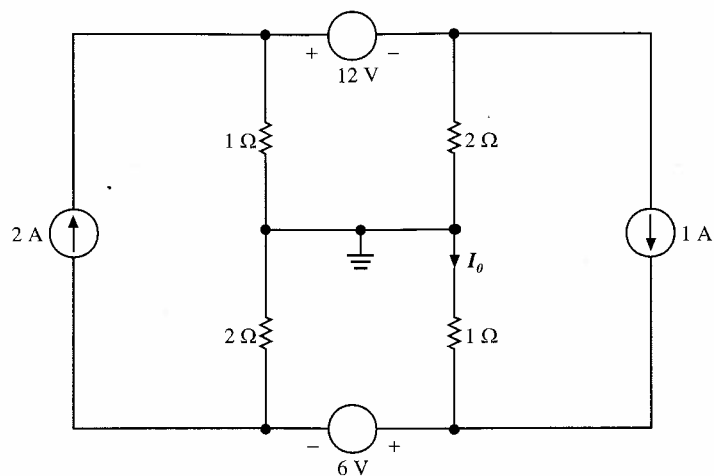


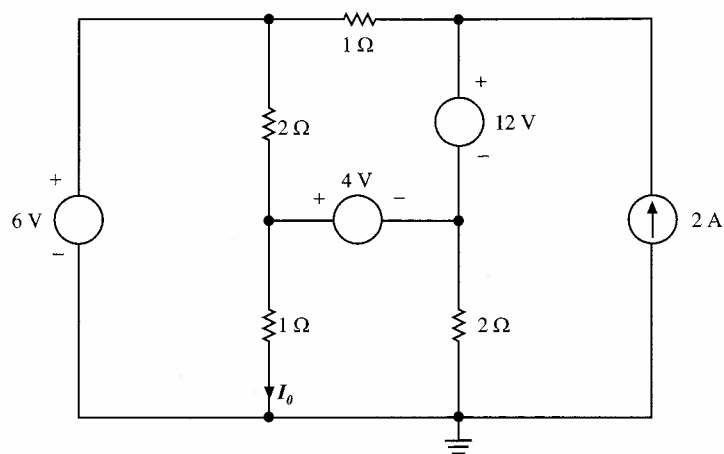
Figura P3.25

**3.26** Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.26.



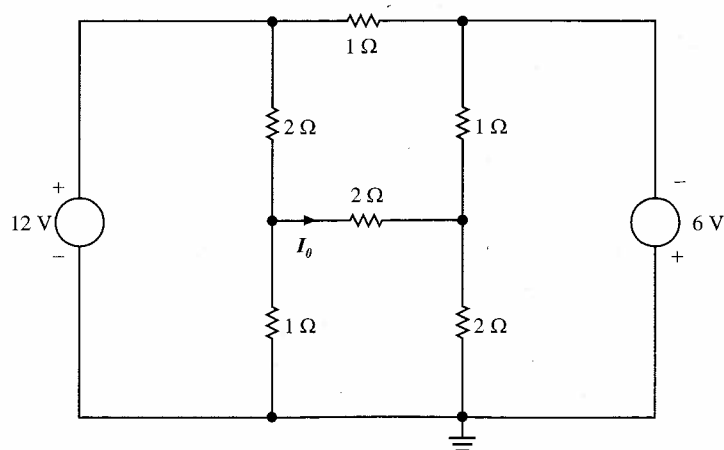
**Figura P3.26**

**3.27** Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.27.



**Figura P3.27**

**3.28** Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.28.



**Figura P3.28**

3.29 Determine  $V_o$  na rede da Figura P3.29 usando equações nodais.

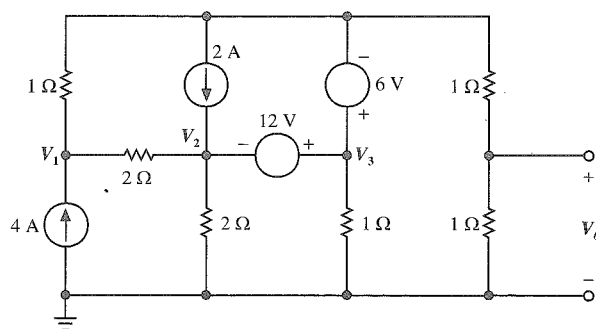


Figura P3.29

3.30 Determine  $I_o$  na rede da Figura P3.30 utilizando equações nodais.

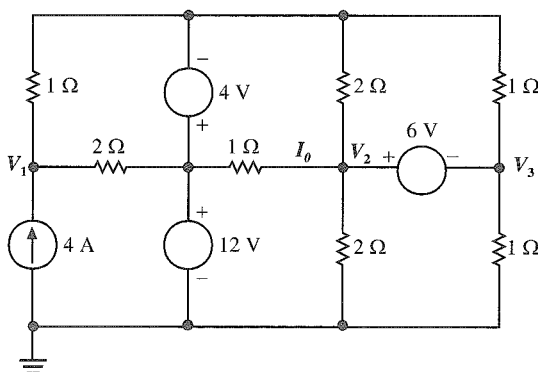


Figura P3.30

3.31 Utilize análise nodal para determinar  $V_o$  na rede da Figura P3.31.

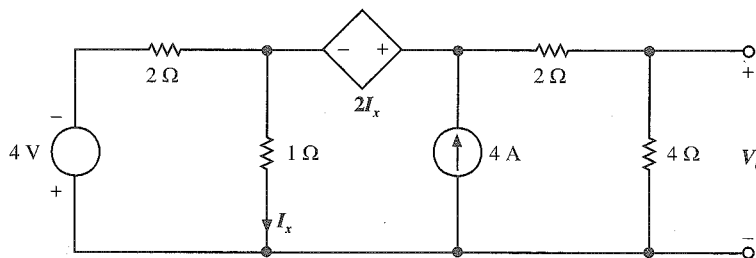


Figura P3.31

3.32 Utilize análise nodal para determinar  $V_o$  na rede da Figura P3.32.

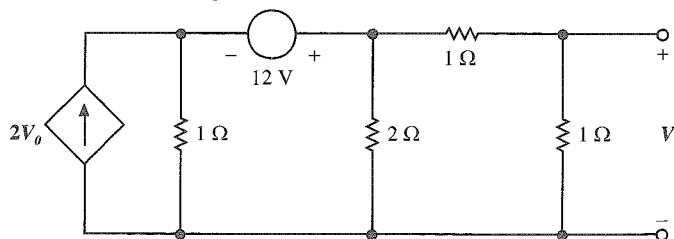


Figura P3.32



3.33 Determine  $V_o$  na rede da Figura P3.33 utilizando equações nodais.

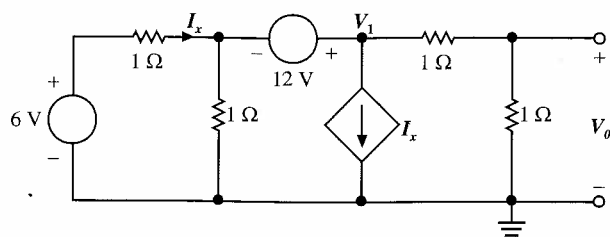


Figura P3.33

3.34 Calcule a tensão  $V_2$  na Figura P3.34 utilizando equações nodais.

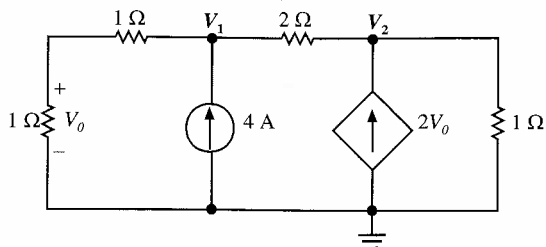


Figura P3.34

3.35 Determine  $V_o$  na Figura P3.35, usando equações nodais.

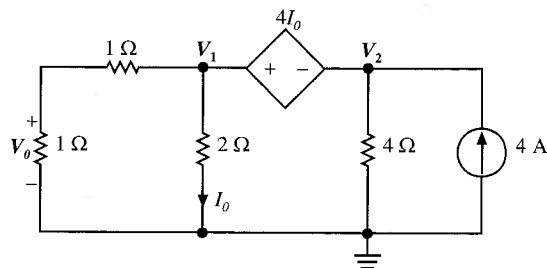


Figura P3.35

3.36 Determine  $V_o$  na rede da Figura P3.36 utilizando equações nodais.

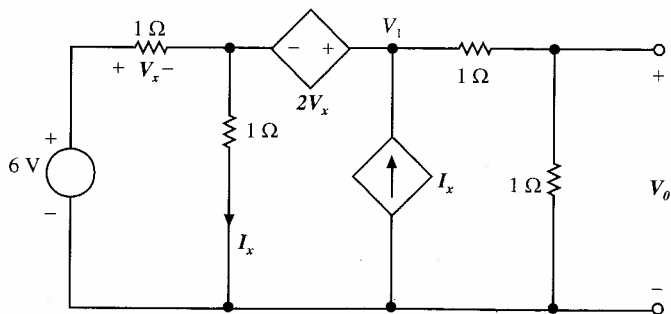


Figura P3.36

3.37 Determine  $I_o$  no circuito mostrado na Figura P3.37.

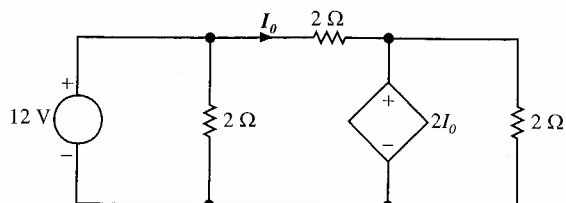


Figura P3.37

- 3.38 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.38.

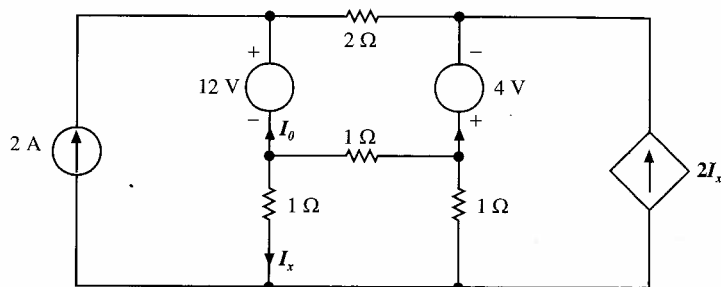


Figura P3.38

- 3.39 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.39.

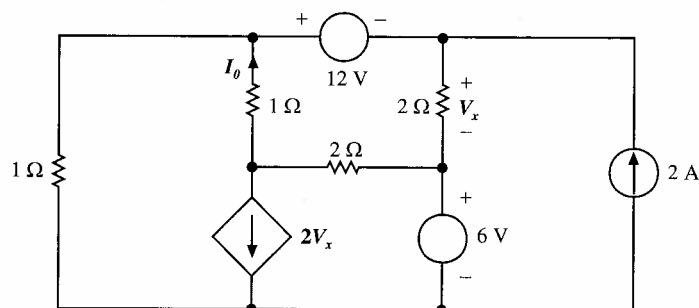


Figura P3.39

- 3.40 Utilize equações de malha para calcular a potência absorvida pelo resistor de 5 Ω da Figura P3.40.

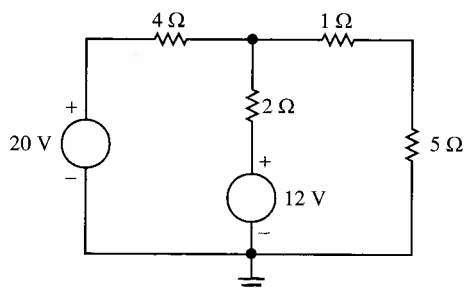


Figura P3.40

- 3.41 Utilize equações de malha para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P3.41.

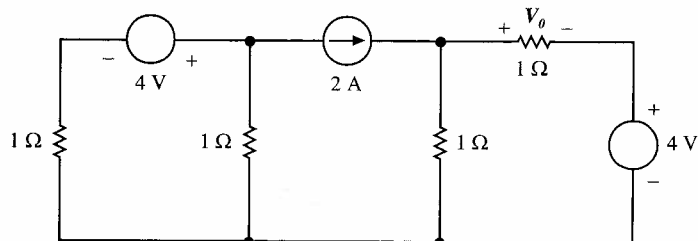


Figura P3.41

- 3.42 Utilize equações de malha para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.42.

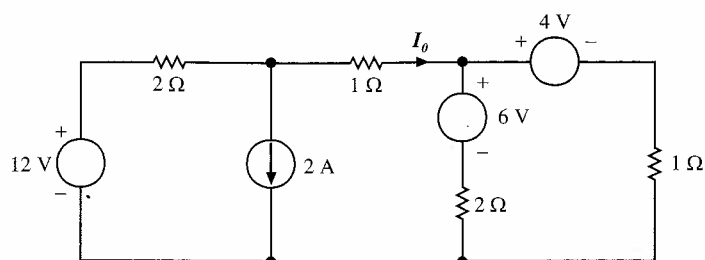


Figura P3.42

- 3.43 Utilize análise de laço para determinar  $I_o$  no circuito da Figura P3.43.

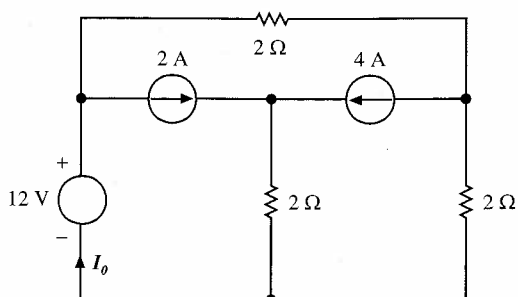


Figura P3.43

- 3.44 Utilize equações de malha para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.44.

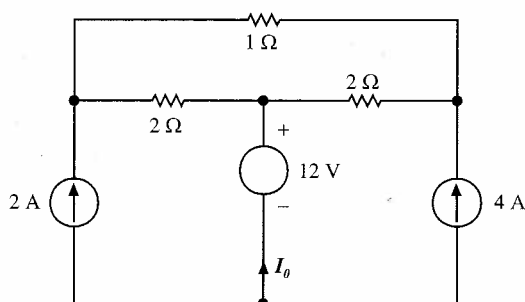


Figura P3.44

- 3.45 Utilize equações de malha para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.45.

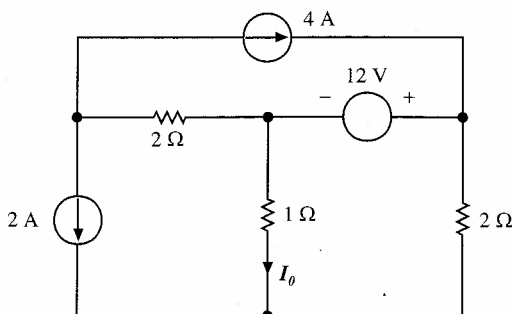


Figura P3.45

- 3.46 Utilize análise de laço para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P3.46.

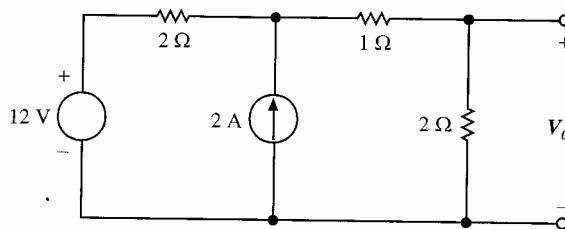


Figura P3.46

- 3.47 Utilize equações de malha para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P3.47.

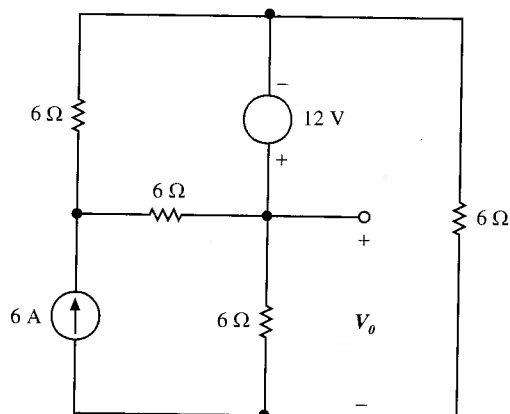


Figura P3.47

- 3.48 Utilize equações de malha para determinar  $V_o$  na rede da Figura P3.48.

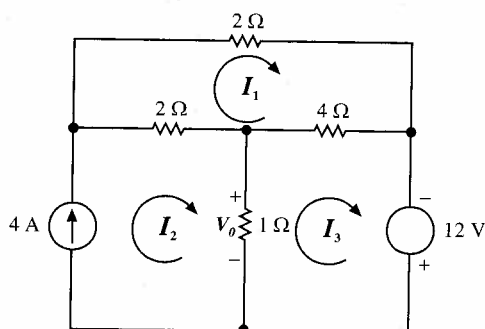


Figura P3.48

- 3.49 Utilize equações de malha para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P3.49.

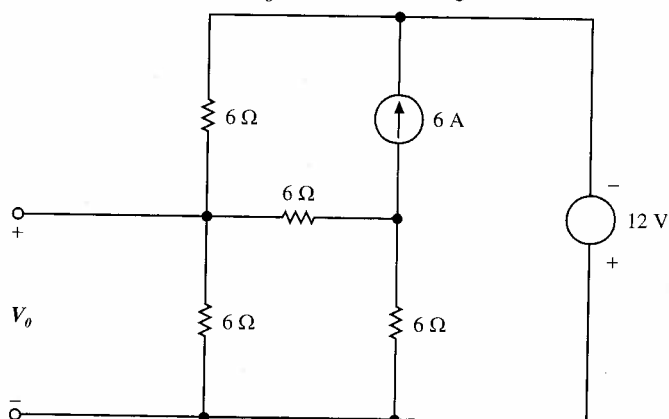


Figura P3.49

3.57 Utilize equações de laço para determinar  $V_o$  na rede da Figura P3.57.

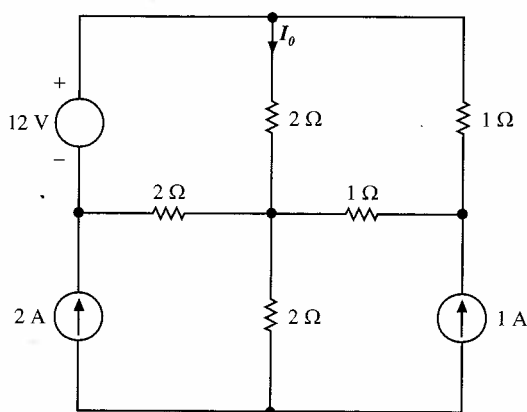


Figura P3.57

3.58 Determinar  $V_o$  no circuito da Figura P3.58 utilizando análise de laço.

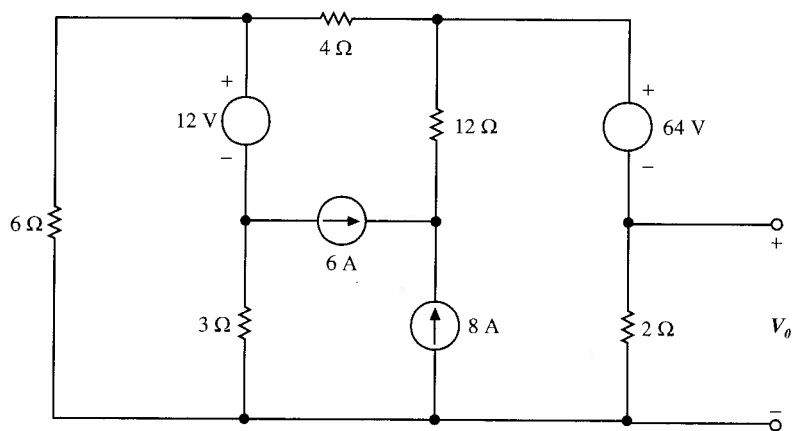


Figura P3.58

3.59 Utilize análise de laço para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P3.59.

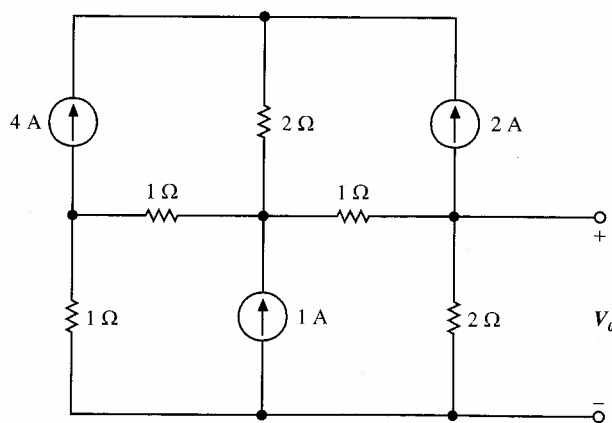


Figura P3.59

3.60 Utilize análise de laço para determinar  $I_o$  na rede da Figura P3.60.

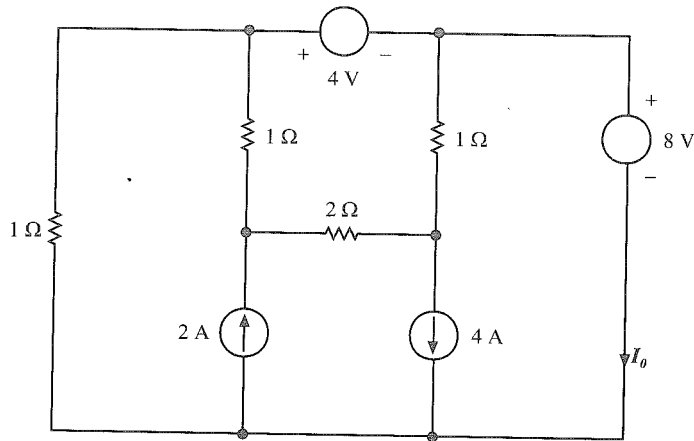


Figura P3.60

3.61 Utilize equações de malha para determinar  $V_o$  na rede da Figura P3.61.

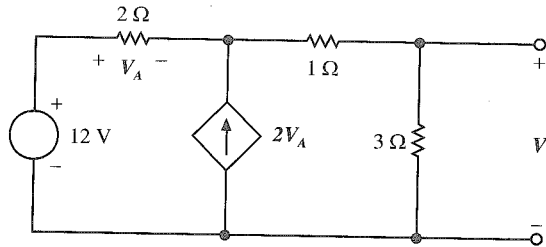


Figura P3.61

3.62 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P3.62.

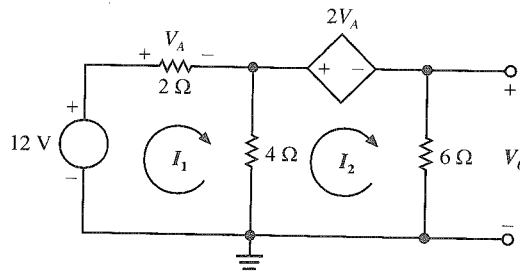


Figura P3.62

3.63 Determine a tensão sobre o resistor de 3 Ω na rede da Figura P3.63 utilizando análise de malha.

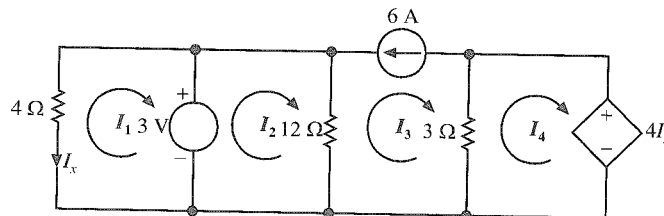


Figura P3.63

3.64 Determine  $V_o$  na rede da Figura P3.64.

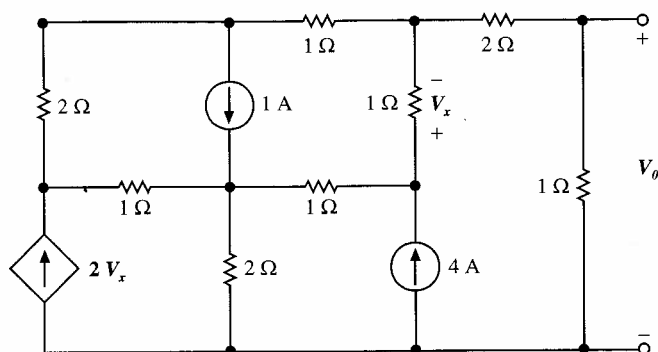


Figura P3.64

3.65 Utilize análise de laço para determinar  $V_o$  na rede da Figura P3.65.

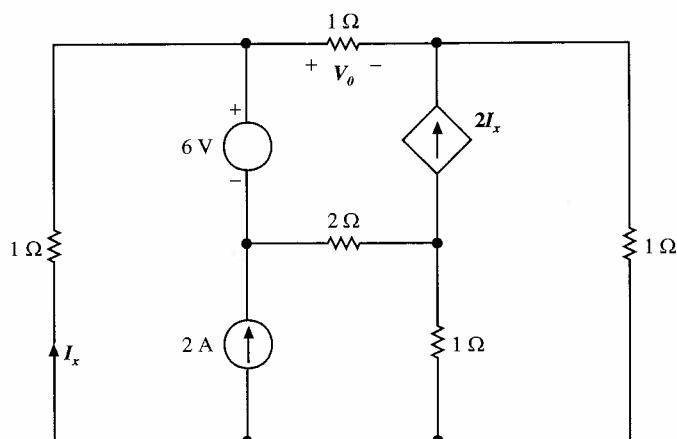


Figura P3.65

3.66 Desenhe uma rede definida pelas seguintes equações de malha.

$$(12 \text{ k}\Omega)I_1 - (4 \text{ k}\Omega)I_3 = -28 \text{ V}$$

$$(3 \text{ k}\Omega)I_2 - (2 \text{ k}\Omega)I_3 = 16 \text{ V}$$

$$I_3 = -\frac{4 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega}$$

3.67 Desenhe um circuito definido pelas seguintes equações de malha.

$$I_1 = -\frac{6 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega}$$

$$-(4 \text{ k}\Omega)I_1 + (12 \text{ k}\Omega)I_2 - (2 \text{ k}\Omega)I_4 = 0$$

$$(4 \text{ k}\Omega)I_3 - (1 \text{ k}\Omega)I_4 = -12 \text{ V}$$

$$I_4 = -\frac{4 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega}$$

3.68 Desenhe uma rede definida pelas seguintes equações nodais.

$$V_1 \left( \frac{1}{8 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} \right) - V_2 \left( \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} \right) = -\frac{2 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} - \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega}$$

$$-V_1 \left( \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} \right) + V_2 \left( \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} \right) = \frac{2 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} + \frac{4 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega}$$

3.69 Desenhe uma rede definida pelas seguintes equações nodais.

$$V_1 \left( \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} \right) - V_2 \left( \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} \right) = \frac{4 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} + \frac{2 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega}$$

$$-V_1 \left( \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} \right) + V_2 \left( \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{4 \text{ k}\Omega} \right) = -\frac{1 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega}$$

3.70 Desenhe uma rede definida pelas seguintes equações nodais.

$$V_1 \left( \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{4 \text{ k}\Omega} \right) - V_2 \left( \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} \right) - V_3 \left( \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} \right) = 0$$

$$V_2 = 6 \text{ V}$$

$$-V_1 \left( \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} \right) - V_2 \left( \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} \right) + V_3 \left( \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} \right) = 0$$

3.71 Para os grafos da Figura P3.71 determine o número de ramos de árvore e o número de elos.

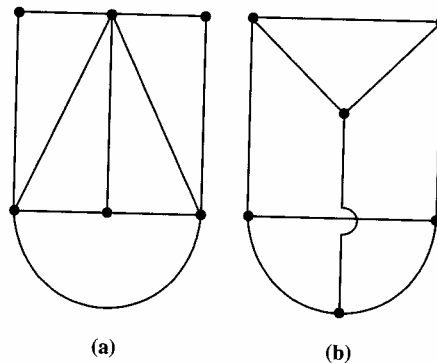


Figura P3.71

3.72 Para os grafos mostrados na Figura P3.72, com uma árvore especificada, encontre um conjunto independente de equações LKC utilizando os conjuntos de corte.

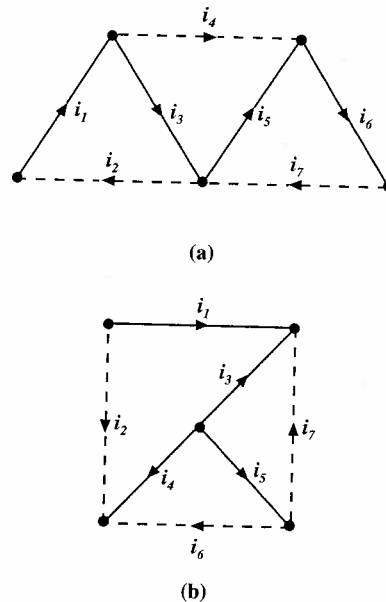


Figura P3.72



- 3.73 Para o grafo mostrado na Figura P3.73, com uma árvore especificada, determine um conjunto independente de equações LKC usando os conjuntos de corte.

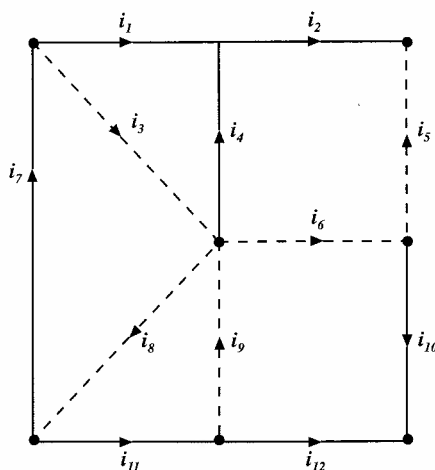
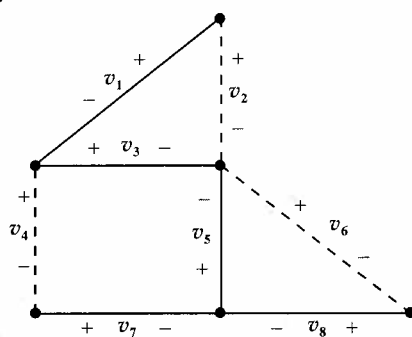
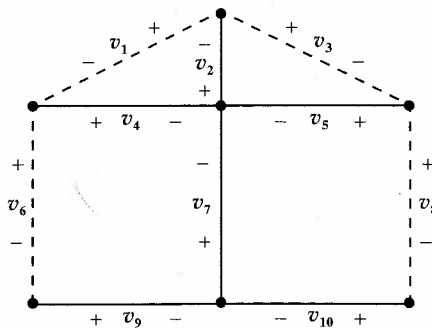


Figura P3.73

- 3.74 Para os grafos mostrados na Figura P3.74, com uma árvore especificada, determine um conjunto de equações LKT independentes utilizando os laços fundamentais.



(a)



(b)

Figura P3.74

- 3.75 Para os grafos mostrados na Figura P3.75, com uma árvore especificada, determine um conjunto de equações LKT utilizando os laços fundamentais.

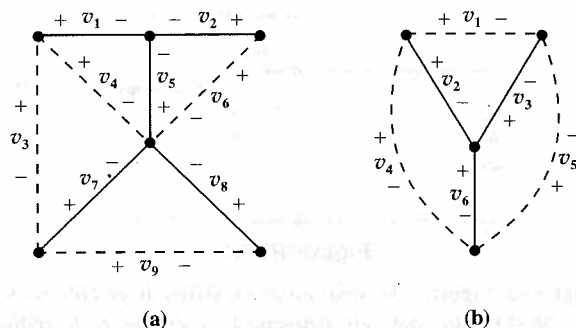


Figura P3.75

- 3.76 A árvore para a rede da Figura P3.76a é dada na Figura P3.76b. Escreva as equações LKC em termos das tensões nodais desconhecidas.

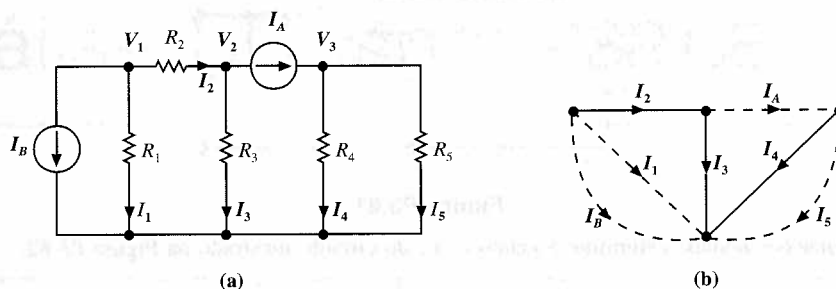


Figura P3.76

- 3.77 Dada a árvore da Figura P3.77b para a rede da Figura P3.77a, escreva as equações de laço necessárias para se resolver todas as tensões desconhecidas.

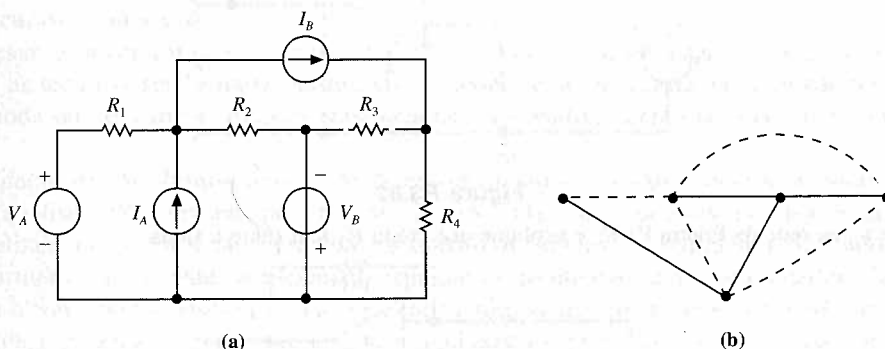


Figura P3.77

- 3.78 Dada uma caixa de resistores de  $10 \text{ k}\Omega$  e um amp-op, projete um circuito que terá uma tensão de saída de  $v_o = -2v_1 - 4v_2$ .

- 3.79 Determine a expressão para a tensão de saída no circuito amp-op mostrado na Figura P3.79.

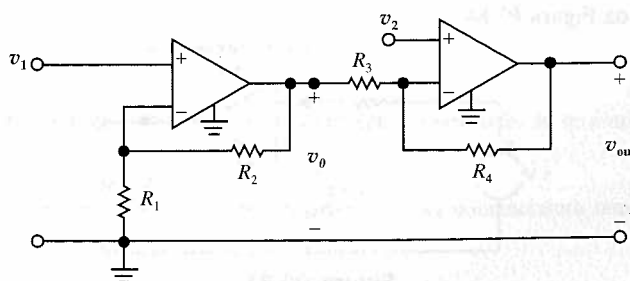


Figura P3.79

- 3.80 A rede da Figura P3.80 é um conversor corrente-tensão ou amplificador de transcondutância. Determine  $v_o/i_S$  para essa rede.

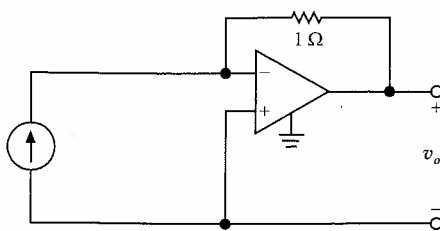


Figura P3.80

- 3.81 Usando o circuito equivalente da Figura 3.33, determine a resistência de entrada  $R_i = v_1/i_1$  para o circuito amp-op mostrado na Figura P3.81. Mostre que, para um pequeno  $R_o$  e grande  $A$ ,  $R_i$  reduz-se à  $R_1$ .

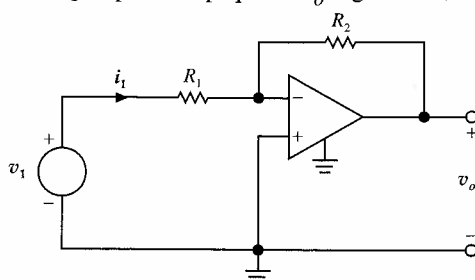


Figura P3.81

- 3.82 Utilizando equações nodais, determine o ganho  $v_o/v_1$  do circuito mostrado na Figura P3.82.

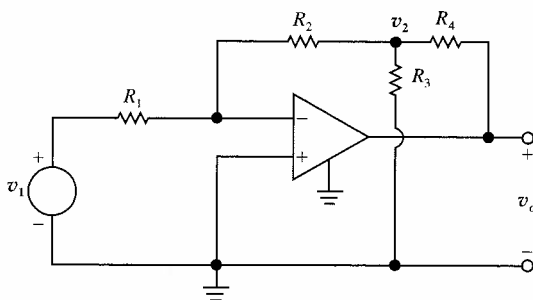


Figura P3.82

- 3.83 Determine  $v_o$  na rede da Figura P3.83 e explique que efeito  $R_1$  tem sobre a saída.

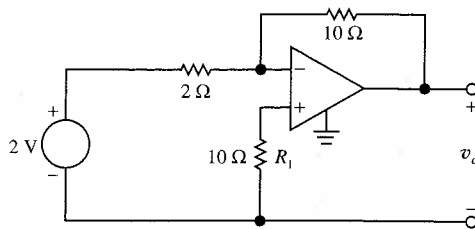


Figura P3.83

- 3.84 Determine  $v_o$  na rede da Figura P3.84.

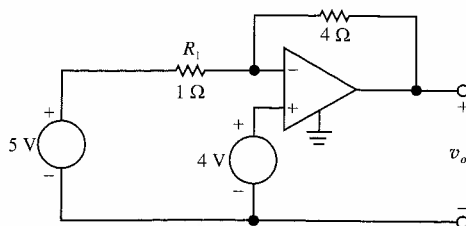


Figura P3.84

# Análise DC<sup>1</sup> com PSPICE

## 4.1 Introdução

O SPICE foi desenvolvido no Departamento de Engenharia Elétrica e Ciência da Computação da Universidade da Califórnia em Berkeley. Esse programa aplica o potencial computacional dos computadores digitais na análise de circuitos complexos.

Apesar de ilustrarmos o seu uso através de exemplos simples que o leitor pode facilmente utilizar para verificar as técnicas apresentadas neste livro, o poder desse programa na realidade reside na facilidade com que ele pode ser aplicado a circuitos complicados, cuja análise pareceria impossível sem o auxílio dessa ferramenta.

No decorrer dos últimos anos, o SPICE tem-se tornado o padrão industrial e empresas usam rotineiramente uma análise SPICE em seus projetos de circuitos antes de colocá-los na linha de produção.

Infelizmente, o SPICE não é remédio ou substituto para um entendimento profundo sobre análise de circuitos e, portanto, não se pode simplesmente repassar os problemas para o computador. Talvez seja esta filosofia “deixe o computador descobrir” que tenha resultado no dito *garbage in, garbage out* (ou “GIGO”).<sup>2</sup>

O SPICE é capaz de processar ac<sup>3</sup>, dc e análise transiente. No caso da análise dc, um conjunto de equações simultâneas lineares ou não-lineares com coeficientes reais é resolvido; no caso da análise ac, um conjunto de equações simultâneas lineares complexas é resolvido e, no caso da análise transiente, a solução é obtida através da resolução de um conjunto de equações simultâneas não-lineares integrodiferenciais.

O PSPICE é uma versão do SPICE que pode ser executado em um computador PC ou compatível. A versão 4.05 do PSPICE é empregada no texto deste livro, e o procedimento para a instalação no computador é detalhado no Apêndice B.

1. N.T.: DC ou dc representa *direct current* (corrente contínua). A representação dc será mantida ao longo do livro devido ao seu freqüente uso.
2. N.T.: Lixo na entrada resulta em lixo na saída.
3. N.T.: AC ou ac denota *alternating current* (corrente alternada). Essa nomenclatura também será mantida ao longo do livro.

## 4.2 Elementos do Programa

Em geral, o uso do PSPICE na análise de um circuito elétrico requer os seguintes passos:

1. Selecionar o tipo de análise a ser executada: dc, ac ou análise transiente.
2. Desenhar o circuito no formato PSPICE usando somente blocos que são permitidos no tipo da análise desejada.
3. Escrever os comandos PSPICE descrevendo o circuito.
4. Escrever os comandos PSPICE que informam ao programa como analisar o circuito e descrever o tipo de solução desejada.

Os comandos PSPICE podem ser subdivididos nas seguintes categorias:

1. Comandos de título e comentários.
2. Comandos de dados.
3. Comandos de controle de solução.
4. Comandos de especificação de saída.
5. Comando de fim.

### Comandos de Título e Comentários

O *comando título* é o primeiro comando em qualquer programa PSPICE e tipicamente contém um título descritivo o bastante para identificar o problema particular em questão. O computador fará a impressão dessa descrição como um cabeçalho para a saída. O comando título *deve* estar presente, já que o PSPICE faz uso dessa primeira linha como um título.

O *comando comentário* é basicamente um auxílio ao programador e aparece como parte da listagem impressa. Ele é caracterizado por um asterisco como o primeiro caractere, com os demais caracteres contendo a informação que descreve o que o programa está fazendo naquele ponto. Tais comandos são de extrema utilidade ao se fazer uma referência a um programa que não tenha sido examinado por algum tempo.

### Comandos de Dados

Descrever um circuito verbalmente para alguém, sem recorrer a um diagrama, pareceria uma tarefa difícil e intransponível se o circuito fosse muito complicado. Portanto, para se descrever o circuito para um computador, deve ser empregada uma metodologia sistemática que defina por itens a maneira exata pela qual os elementos dos circuitos estão interconectados.

O bloco fundamental de montagem em uma análise PSPICE é um ramo do circuito, e o ramo padrão em PSPICE é mostrado na Figura 4.1. Note que um subíndice duplo é empregado para descrever as tensões nos ramos. Assume-se que o primeiro subíndice é do nó positivo para a tensão do ramo. As tensões nodais são denotadas por  $V(n, 0)$  ou, para simplificar,  $V(n)$ . A corrente de ramo é referenciada de forma que uma corrente positiva em um resistor produza uma tensão positiva no ramo e, portanto, a direção de referência para a corrente é do primeiro subíndice listado na tensão de ramo para o segundo.

Cada ramo pode conter qualquer elemento de dois terminais, tal como um resistor, fonte de corrente ou fonte de tensão. Os valores das fontes de tensão ou corrente podem ser zero, mas o valor do resistor deve ser diferente de zero.

Os ramos são conectados aos nós e identificados por números. Os números dos nós devem ser não-negativos, mas não necessariamente sequenciais. O nó de referência deve ser o número zero. O circuito não pode conter um laço de fontes de tensão ou um conjunto de corte (ver Capítulo 3) de fontes de corrente. Cada nó do circuito deve ter um caminho dc para o terra, e todo nó deve ter pelo menos dois ramos de conexão.

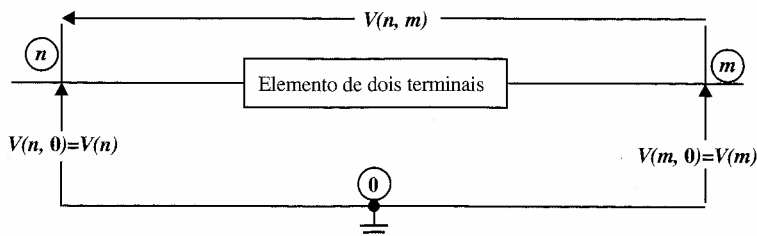


Figura 4.1 Ramo de circuito padrão PSPICE.

Um dos maiores problemas encontrados ao descrever um circuito e sua solução desejada é guardar todas as direções de referência de todas as tensões e correntes. Todas as direções no PSPICE são fixadas pelo programador e especificadas pela ordem em que as conexões dos nós são listadas nos comandos de dados.

Um formato livre é utilizado em todos os comandos de dados. Os campos devem ser separados por um ou mais espaços em branco, um sinal igual ou um abre- ou fecha- parênteses. Um comando pode ser continuado colocando-se um sinal 'mais' como o primeiro caracter do comando de continuação e o PSPICE continuará a leitura a partir do segundo caracter.

Cada segmento de dado é composto de três campos:

1. O nome do elemento.
2. Os nós do circuito aos quais o elemento está conectado.
3. O valor dos parâmetros que determinam a característica elétrica do elemento.

O campo do nome do elemento deve iniciar-se com uma letra do alfabeto e não pode conter qualquer delimitador. A primeira letra do nome especifica o tipo do elemento:

|   |                                           |
|---|-------------------------------------------|
| R | resistor                                  |
| V | fonte independente de tensão              |
| I | fonte independente de corrente            |
| G | fonte de corrente com tensão controlada   |
| E | fonte de tensão com tensão controlada     |
| F | fonte de corrente com corrente controlada |
| H | fonte de tensão com corrente controlada   |

Um nome pode conter de um a oito caracteres. Por exemplo, um nome de resistor deve iniciar-se com a letra R e pode ser seguido de um a sete caracteres adicionais. Dessa forma, R, R1348, RINPUT, ROUT3 e RAIB66DG são nomes válidos de resistores. Na discussão a seguir, XXXXXXXX, YYYYYYYY e ZZZZZZZZ denotarão cadeias alfanuméricas.

O campo do número pode ser um campo inteiro tal como 12 ou -44, um campo com ponto flutuante tal como 3.142 ou 1.4146<sup>4</sup>, um inteiro ou ponto flutuante seguido de um expoente tal como 1E-14 ou 2.65E3 ou um inteiro ou ponto flutuante seguido por um dos seguintes fatores de escala:

$$\begin{aligned} T &= 1E12 & G &= 1E9 & MEG &= 1E6 \\ K &= 1E3 & M &= 1E-3 & U &= 1E-6 \\ N &= 1E-9 & P &= 1E-12 & F &= 1E-15 \end{aligned}$$

Letras que seguem imediatamente um número que não sejam fatores de escala são ignoradas, e letras seguindo imediatamente um fator de escala são ignoradas. Dessa forma, 10, 10V, 10VOLTS e 10HZ representam todos o mesmo fator de escala. Observe também que 1000, 1000.0, 1000HZ, 1E3, 1.0E3, 1KHZ e 1K representam todos o mesmo número. Note, entretanto, que

1. Vírgulas não são permitidas.
2. Sinais faltando são assumidos ser + pelo computador.
3. Um ponto decimal faltando é colocado no final de uma série de números.

A seguir temos uma descrição detalhada do formato de comandos de dados que são utilizados para descrever cada tipo de ramo em uma rede.

**Comandos de Ramo para Elementos Resistivos.** A forma geral para elementos resistivos é

RXXXXXXX N1 N2 VALUE

Aqui XXXXXXXX denota uma cadeia alfanumérica que identifica unicamente o elemento em particular. N1 e N2 são os nós do circuito aos quais o elemento está conectado. VALUE é o valor da resistência em ohms. O valor de um resistor pode ser positivo ou negativo, mas não pode ser zero.

#### Exemplo 4.1

Os comandos de ramo para os dois resistores mostrados na Figura 4.2a são

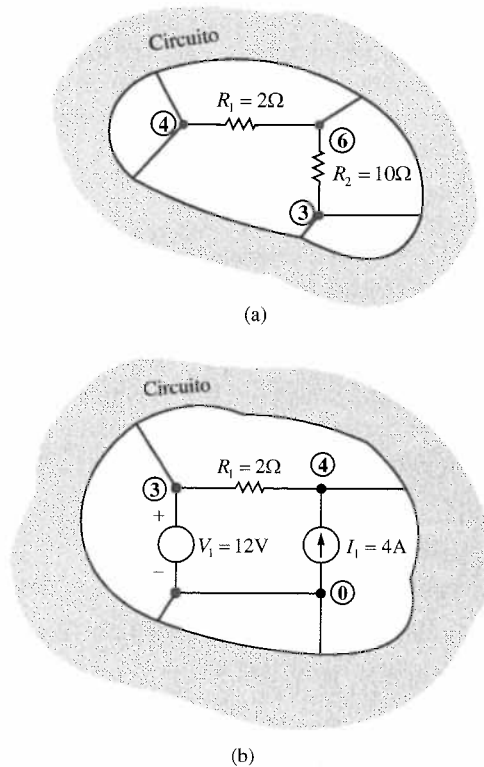
```
R1 4 6 2
R2 6 3 10
```

4. N.T.: Note que em se tratando do PSPICE o ponto decimal deve ser usado no lugar da vírgula decimal.

**Comandos de Ramo para Fontes Independentes.** Comandos de ramo para fontes independentes têm a forma

BXXXXXXX N+ N- DC (DC VALUE)

B é a letra V para as fontes de tensão ou I para as fontes de corrente. N+ e N- são os nós positivos e negativos, respectivamente. Corrente positiva, para fontes de tensão ou de corrente, é assumida fluir do nó positivo para o negativo através da fonte. DC VALUE é o valor dc da corrente. Se o valor dc é zero, esse valor pode ser omitido.



**Figura 4.2** Circuitos usados para explicar os comandos de ramo.

### Exemplo 4.2

Os comandos de ramo para os elementos mostrados na Figura 4.2b são

```
R1 4 3 2
V1 3 0 DC 12
I1 0 4 DC 4
```

**Comandos de Ramo para Fontes Lineares Dependentes.** Uma fonte linear dependente no PSPICE é definida como uma fonte de tensão ou fonte de corrente cuja tensão ou corrente seja igual a uma constante vezes uma tensão de ramo ou a corrente que flui através de uma fonte de tensão. Esse último ponto mencionado introduz uma sutileza interessante do PSPICE. Para se empregar a corrente em um ramo em particular, devemos introduzir uma falsa fonte de tensão em série com esse ramo em particular para que o programa possa calcular a corrente nessa fonte de tensão.

Comandos de ramo para fontes lineares de tensão controlada têm a forma geral

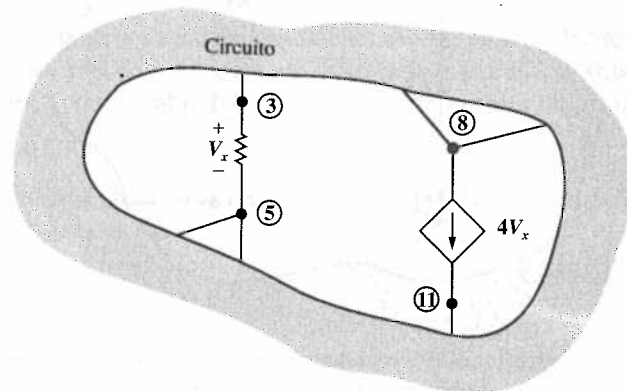
BXXXXXXX N+ N- NC+ NC- VALUE

B é a letra G ou a letra E, onde  $I_S = GV$  para fontes de corrente com tensão controlada e  $V_S = EV$  para as fontes de tensão com tensão controlada. N+ e N- são os nós negativos e positivos, respectivamente. O fluxo de corrente vai do nó positivo, através da fonte, em direção ao nó negativo. NC+ e NC- são os nós controladores positivo e negativo, respectivamente. VALUE é o valor do ganho de tensão E ou a transcondutância G.

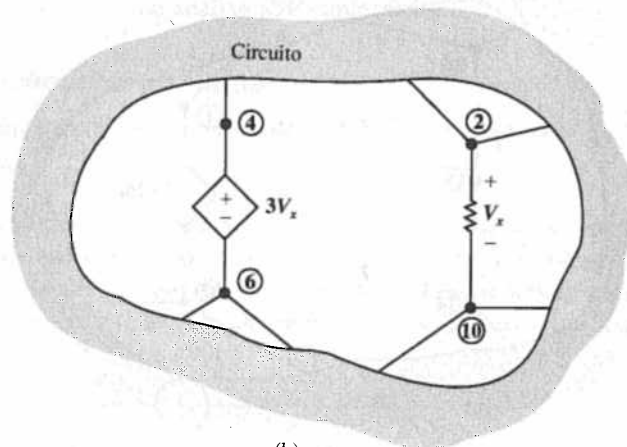
**Exemplo 4.3**

O comando de ramo para a fonte dependente na Figura 4.3 é

G1 8 11 3 5 4



(a)



(b)

**Figura 4.3** Circuitos usados para explicar comandos de ramo para fontes dependentes.

**Exemplo 4.4**

O comando de ramo para a fonte dependente na Figura 4.3b é

E1 4 6 2 10 3

Comandos de ramo para fontes lineares com corrente controlada têm a forma

BXXXXXXX N+ N- VNAME VALUE

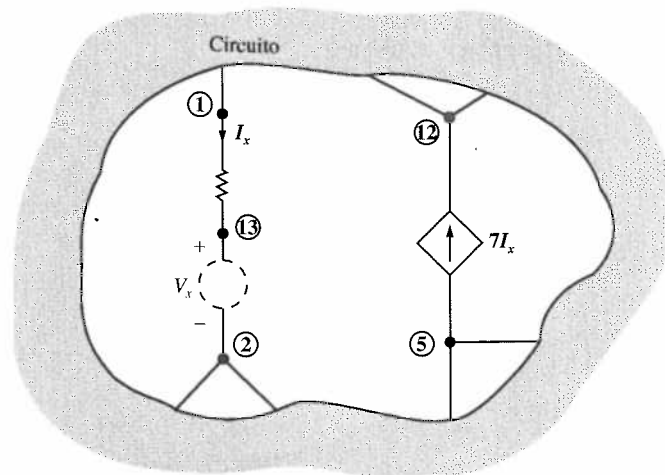
B é a letra F ou H, onde  $I_S = FI$  para fontes de corrente com corrente controlada e  $V_S = HI$  para fontes de tensão com corrente controlada. N+ e N- são os nós positivo e negativo, respectivamente. O fluxo de corrente é do nó positivo, através da fonte, para o nó negativo. VNAME é o nome da fonte de tensão através da qual a corrente controlada flui. Uma corrente positiva controlada flui para o nó positivo, através da fonte VNAME, e sai do nó negativo. VALUE é o valor do ganho de corrente F ou da transresistência H.

**Exemplo 4.5**

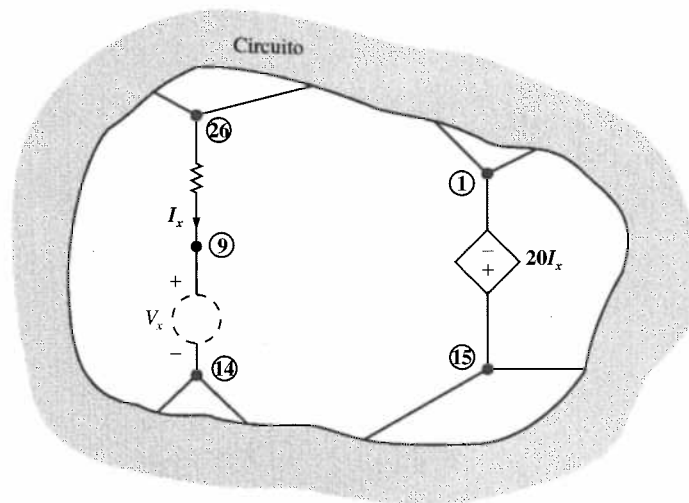
O comando de ramo para a fonte dependente da Figura 4.4a é

F1 5 12 VX 7





(a)



(b)

**Figura 4.4** Circuitos usados para explicar os comandos de ramo para fontes dependentes.

### Exemplo 4.6

O comando de ramo para a fonte dependente da Figura 4.4b é

```
H1 15 1 VX 20
```

Nos exemplos 4.5 e 4.6, repare que  $V_x$  é a falsa fonte de tensão inserida na rede para se obter a corrente de controle  $I_x$ .

### Comandos de Controle de Solução

Três das opções de análise dc são especificadas pelos comandos .OP, .DC e .TF. O comando .OP fará com que todas as tensões e correntes nodais dc em fontes de tensão sejam listadas como parte da saída.

A análise dc pode ser executada para uma variedade de tensões ou correntes em fontes usando o comando .DC. A forma geral desse comando é

```
.DC SCRNAM VSTART VSTOP VINCR
```

SCRNAM é o nome de uma fonte independente de tensão ou corrente a ser variada. VSTART, VSTOP e VINCR são os valores inicial, final e de incremento, respectivamente. Uma segunda fonte pode ser especificada opcionalmente com parâmetros de varredura associados. A forma desse comando é

```
.DC SCRNAM VSTART VSTOP VINCR SCR2 START2 STOP2 INCR2
```

Nesse caso, a primeira fonte será varrida em toda a sua faixa para cada valor da segunda fonte. Alguns exemplos típicos do comando `.DC` são

```
.DC V1 1.25 10.50 0.25
.DC V0 0 50 1 I1 1M 10M 1M
```

A opção análise dc pode ser também usada para avaliar as funções de transferência sinal pequeno dc, isto é, a razão de uma variável de saída para uma variável de entrada. A resistência de entrada e a resistência de saída serão também computadas automaticamente como parte da solução:

```
.TF OUTVAR INSRC
```

OUTVAR é a variável de saída do sinal pequeno. INSRC é a fonte de entrada do sinal pequeno. Dois exemplos de comandos típicos são

```
.TF V(4, 1) VIN
.TF I(VOUT) VIN
```

Lembre-se que a tensão entre quaisquer dois nós  $n$  e  $m$  é referida como  $V(n,m)$ . Se o segundo nó é zero, ele pode ser omitido. Para as equações acima, o PSPICE computaria o valor do sinal pequeno dc da razão de  $V(4, 1)$  para VIN, a resistência de entrada em VIN, e a resistência de saída em VOUT. Se nenhuma análise é especificada, o PSPICE executará uma análise `.OP` como *default*.

### Comandos de Especificação de Saída

A saída impressa é requerida usando-se o comando `.PRINT` com o formato

```
.PRINT DC OV1 OV2 ... OV8
```

OV1, OV2, ..., OV8 são as variáveis de corrente ou tensão de saída desejadas com um máximo de oito variáveis de saída por comando. No entanto, em uma análise dc, um comando de impressão não é mais necessário com PSPICE. Todas as tensões e correntes nodais em fontes de tensão são automaticamente impressas. Para correntes, a direção de referência é do nó positivo, através da fonte, para o nó negativo, como mostrado na Figura 4.5.

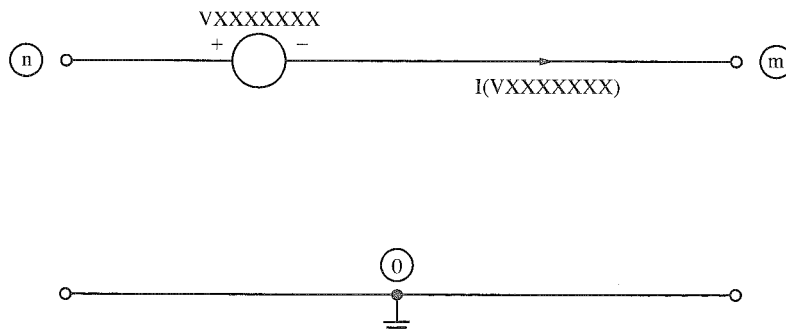


Figura 4.5 Corrente referenciada a uma fonte independente de tensão.

O Probe é um recurso adicional do PSPICE que permite aos usuários exibir resultados gráficos em um PC e numa impressora conectada. Incluindo-se o comando `.PROBE` em um arquivo PSPICE, o PSPICE automaticamente executará o programa Probe logo após a análise.

A tela inicial do Probe mostra um gráfico em branco acima de uma linha de menu contendo várias opções. A opção *default* é "Add\_trace". Pressione a tecla 'Enter'. O gráfico em branco permanece na tela, mas a linha de menu é substituída por um pedido de entrada das variáveis a serem traçadas em gráfico. O usuário pode agora entrar em uma variável ou uma lista de variáveis separadas por espaços. Por exemplo, "V(1) V(2) V(2,3) I(VS)" traçarão os gráficos das tensões nodais para os nós 1 e 2, a tensão nodal entre 2 e 3 e a corrente de ramo no ramo contendo VS. "V(1) \* I(VS)" também traçarão os gráficos com o produto da tensão no nó 1 e a corrente através do ramo contendo VS. Pressione a tecla 'Enter' após digitar as variáveis a serem traçadas no gráfico. A opção "Hard-copy" traçará o gráfico na impressora em anexo. A opção "Exit" deve ser escolhida para se sair do programa Probe. As setas são usadas para selecionar a opção desejada da linha de menu.

## Comando de Fim

O programador deve informar ao PSPICE a chegada do fim dos dados de entrada (o programa). Isto é feito colocando-se um comando no fim do programa com o formato .END.

Os exemplos a seguir servirão para ilustrar tais técnicas.

## 4.3 Aplicações

### Circuitos Contendo Somente Fontes Independentes

#### Exemplo 4.7

Vamos determinar as tensões nodais no circuito mostrado na Figura 4.6. Nesse primeiro exemplo PSPICE, descreveremos em detalhes os passos empregados no uso do PSPICE para obter uma solução.

Para uso do PSPICE, digite 'PS' quando surgir o sinal 'C:\>'. A tela exibirá o "PSPICE Control Shell"<sup>5</sup> com a linha de menu no alto e a linha de informação embaixo. A opção "Files" estará em realce. Pressione a tecla 'Enter'. Essa operação ativa o submenu "Files". A opção "Current File"<sup>6</sup> estará em realce. Pressione a tecla 'Enter'. Digite o nome do seu arquivo PSPICE. Se este é um novo arquivo, selecione um nome para ele. O "PSPICE Control Shell" aparece mais uma vez. Pressione 'Enter' para mostrar o submenu "Files". A opção "Edit" estará em realce. Pressione a tecla 'Enter'. Esse editor estará ativado após esse procedimento.

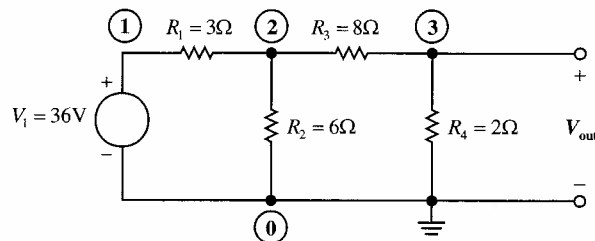


Figura 4.6 Circuito dc do Exemplo 4.7.

O programa PSPICE é

```
FIRST PSPICE EXAMPLE
V1 1 0 DC 36
R1 1 2 3
R2 2 0 6
R3 2 3 8
R4 3 0 2
* NODE VOLTAGES V1, V2, AND V3 AS VOUT
.END
```

Ao término do programa, pressione a tecla 'Esc'. Então pressione a tecla 'S' para salvar o seu arquivo. A tela "PSPICE Control Shell" é novamente exibida. Pressione a tecla de seta à direita para realçar a opção "Analysis".<sup>7</sup> Tecle 'Enter' para ativar o submenu "Analysis". A opção "Run PSPICE" estará em realce. Pressione 'Enter' para executar o circuito PSPICE recém-criado. Ao término da análise PSPICE, a tela "PSPICE Control Shell" é exibida. Pressione 'Enter' para exibir o submenu "Files". Use a seta para baixo para realçar a opção "Browse Output".<sup>8</sup> Tecle 'Enter'. As primeiras 20 linhas do seu arquivo de saída serão mostradas. Utilize as teclas de seta 'Page Up' e 'Page Down' para exibir as demais porções do seu arquivo. Pressione 'Esc' para retornar ao submenu "Files". Para sair do PSPICE, utilize as teclas de seta para realçar a opção

5. N.T.: Tela do Núcleo de Controle do PSPICE.

6. N.T.: Arquivo em uso.

7. N.T.: Análise.

8. N.T.: Veja a saída.

“Quit” do menu. Selecione a opção “Exit to DOS”<sup>9</sup> do submenu “Quit”. Para salvar o seu arquivo recém-criado, pressione S.

A saída dada pelo computador inclui o seguinte:

| NODE | VOLTAGE | NODE | VOLTAGE | NODE | VOLTAGE |
|------|---------|------|---------|------|---------|
| (1)  | 36.0000 | (2)  | 20.0000 | (3)  | 4.0000  |

A tensão de saída é sempre impressa em volts, e todas as tensões nodais são impressas automaticamente. ■

### Exemplo 4.8

Vamos determinar a tensão de saída  $V_o$  na rede da Figura 4.7a. O circuito está redesenhado na Figura 4.7b e numerado para facilitar a análise PSPICE. Note que nesse caso  $V(4)$  é  $V_o$ .

O programa PSPICE para esse circuito é o seguinte:

SECOND PSPICE EXAMPLE

V1 1 0 DC 12

I1 2 1 DC 2

I2 0 3 DC 4

R1 1 3 2

R2 2 0 2

R3 2 3 1

R4 3 4 1

R5 4 0 2

\*  $V_o$  IS THE SAME AS NODE VOLTAGE V(4)

.END

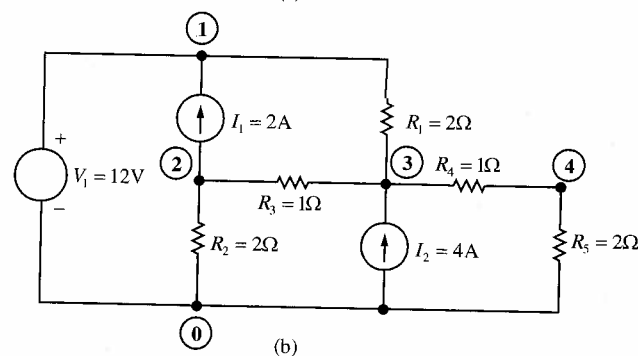
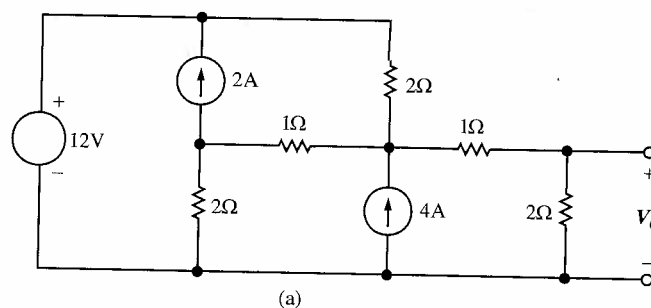


Figura 4.7 Circuito usado no Exemplo 4.8.

A saída fornecida pelo computador inclui o seguinte:

| NODE | VOLTAGE | NODE | VOLTAGE | NODE | VOLTAGE | NODE | VOLTAGE |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| (1)  | 12.0000 | (2)  | 3.6190  | (3)  | 7.4286  | (4)  | 4.9524  |

9. N.T.: Saída para o DOS.

```

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
V1        -2.857D-01

```

Note que, além das tensões nodais, a saída mostra as correntes em todas as fontes de tensão. Lembre-se que a direção de referência da corrente é do nó positivo através da fonte de tensão para o nó negativo.

#### Exemplo 4.9

Deseja-se determinar a corrente  $I_o$  na rede da Figura 4.8a. A rede está numerada para a análise PSPICE na Figura 4.8b e a falsa fonte de tensão foi inserida para obter  $I_o$ .

O programa PSPICE para o circuito é

```

THIRD PSPICE EXAMPLE

```

```

V1  1  0  DC 12

```

```

VT  5  0  DC  0 ;DUMMY SOURCE USED TO CALCULATE I_o.

```

```

I1  0  3  DC  4

```

```

I2  2  4  DC  2

```

```

R1  1  2  2

```

```

R2  2  3  1

```

```

R3  3  4  2

```

```

R4  4  0  1

```

```

R5  2  5  2

```

```

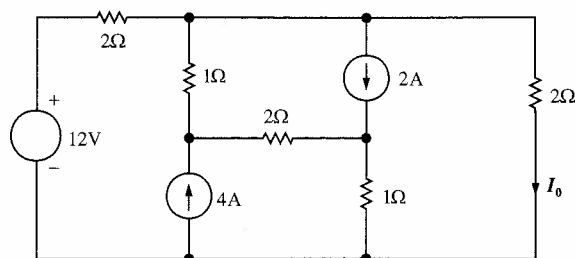
* I_o IS THE SAME AS I(VT)

```

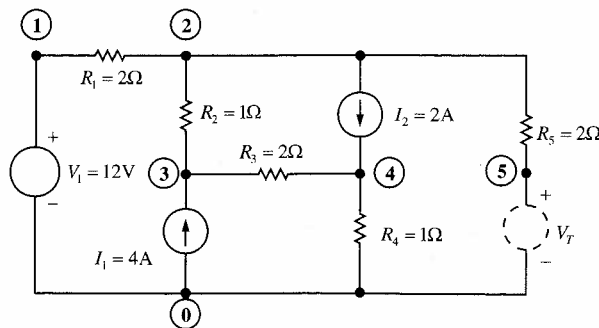
```

.END

```



(a)



(b)

Figura 4.8 Circuito usado no Exemplo 4.9.

A saída fornecida pelo computador inclui o seguinte:

```

NODE VOLTAGE  NODE VOLTAGE  NODE VOLTAGE  NODE VOLTAGE
(1) 12.0000  (2) 6.0000   (3) 8.0000   (4) 4.0000
(5)  0.0000

```

```

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

```

```

NAME      CURRENT
V1        -3.000E+00
VT         3.000E+00

```

### Exercício

E4.1 Dado o circuito da Figura E4.1, use PSPICE para determinar todas as tensões nodais e a corrente no resistor de  $1\ \Omega$ .

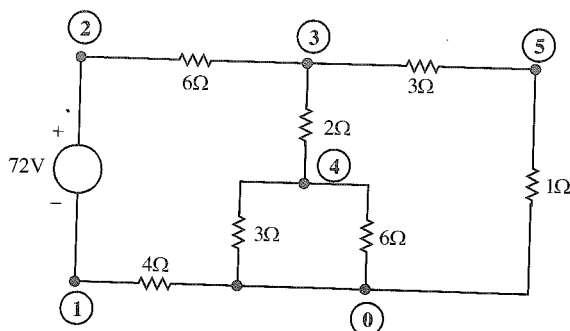


Figura E4.1

Resp.:  $V_1 = -24\text{ V}$ ,  $V_2 = 48\text{ V}$ ,  $V_3 = 12\text{ V}$ ,  $V_4 = 6\text{ V}$ ,  $V_5 = 3\text{ V}$ ,  $I_{1\Omega} = 3\text{ A}$ .

### Circuitos Contendo Fontes Dependentes

Os exemplos a seguir ilustram o uso do PSPICE para problemas contendo fontes dependentes.

#### Exemplo 4.10

Vamos calcular a tensão  $V_o$  na rede da Figura 4.9a. A rede está redesenhada para a análise PSPICE na Figura 4.9b. Nesse caso,  $V(3) = V_o$ .

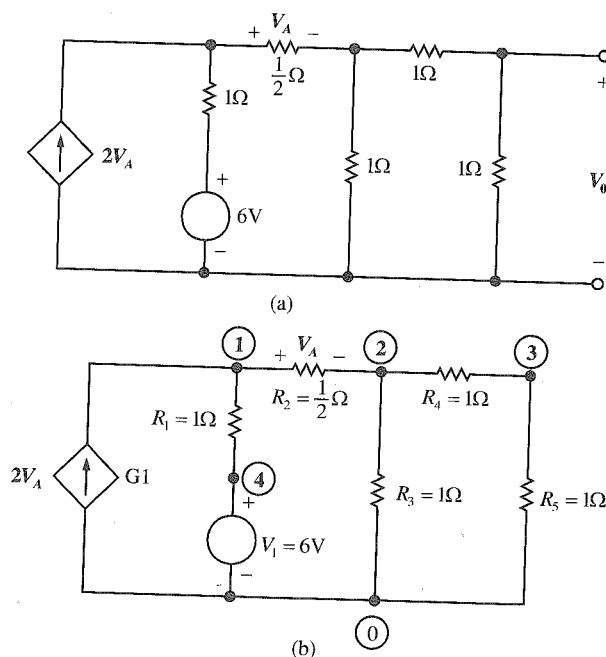


Figura 4.9 Circuito usado no Exemplo 4.10.

O programa PSPICE é

```
FOURTH PSPICE EXAMPLE
V1 4 0 DC 6
G1 0 1 1 2 2
R1 1 4 1
R2 1 2 .5
```

```
R3 2 0 1
```

```
R4 2 3 1
```

```
R5 3 0 1
```

```
* VO IS THE SAME AS NODE VOLTAGE V(3)
```

```
.END
```

A saída fornecida pelo computador inclui o seguinte:

```
V1          V(3)
```

```
6.000E+00  1.714E+00
```

### Exemplo 4.11

Vamos determinar a tensão  $V_o$  na rede da Figura 4.10a. A rede, redesenhada na Figura 4.10b, ilustra que  $V_o = V(4)$ .

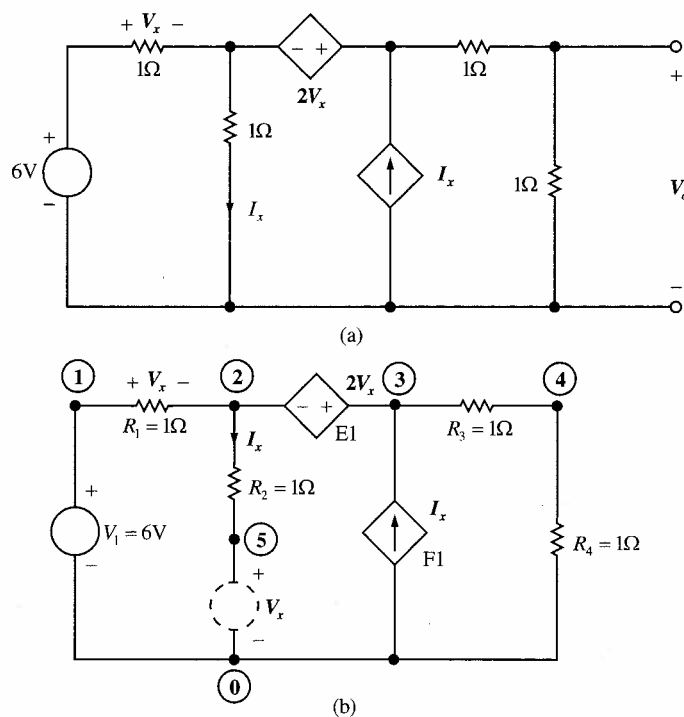


Figura 4.10 Circuito usado no Exemplo 4.11.

O programa PSPICE é

```
FIFTH PSPICE EXAMPLE
```

```
V1 1 0 DC 6
```

```
VX 5 0 DC 0 ;DUMMY SOURCE USED TO CALCULATE Ix FOR F1
```

```
E1 3 2 1 2 2
```

```
F1 0 3 VX 1
```

```
R1 1 2 1
```

```
R2 2 5 1
```

```
R3 3 4 1
```

```
R4 4 0 1
```

```
* VO IS THE SAME AS NODE VOLTAGE V(4)
```

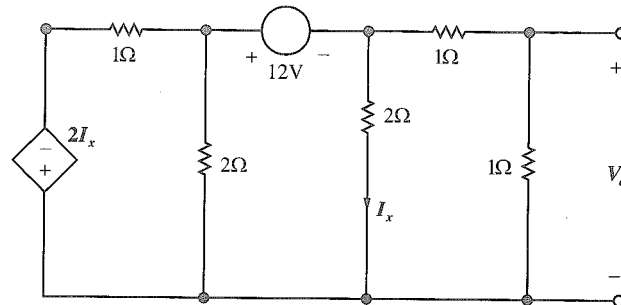
```
.END
```

A saída fornecida pelo computador inclui o seguinte:

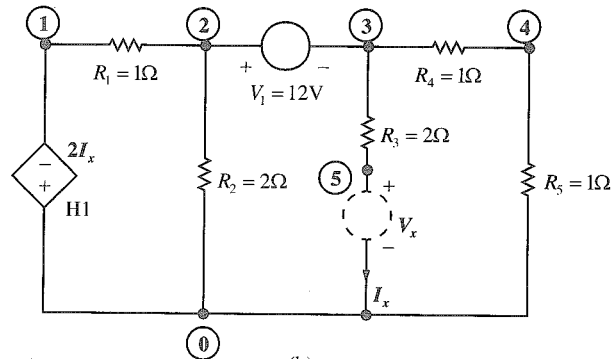
```
V1          V(4)
6.000E+00   6.000E+00
```

### Exemplo 4.12

Deseja-se determinar a tensão  $V_o$  na rede da Figura 4.11a. A rede numerada para PSPICE é mostrada na Figura 4.11b.



(a)



(b)

Figura 4.11 Circuito usado no Exemplo 4.12.

O programa PSPICE é

```
SIXTH PSPICE EXAMPLE
V1 2 3 DC 12
VX 5 0 DC 0 ;DUMMY SOURCE USED TO CALCULATE Ix FOR H1
H1 0 1 VX 2
R1 1 2 1
R2 2 0 2
R3 3 5 2
R4 3 4 1
R5 4 0 1
* Vo IS THE SAME AS NODE VOLTAGE V(4)
.END
```

A saída fornecida pelo computador inclui

```
NODE    VOLTAGE
(4)      -2.5714
```

### Exemplo 4.13

Vamos determinar a tensão  $V_o$  na rede da Figura 4.12a. A rede está redesenhada para análise PSPICE na Figura 4.12 b.

O programa PSPICE é

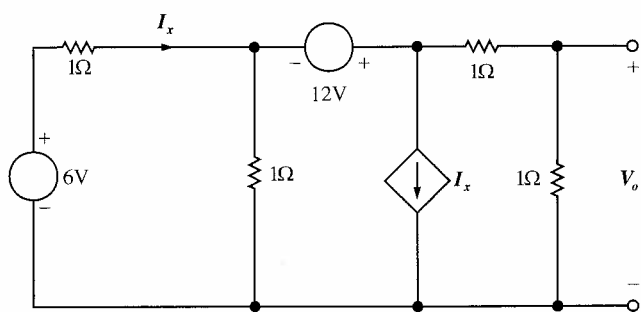


## SEVENTH PSPICE EXAMPLE

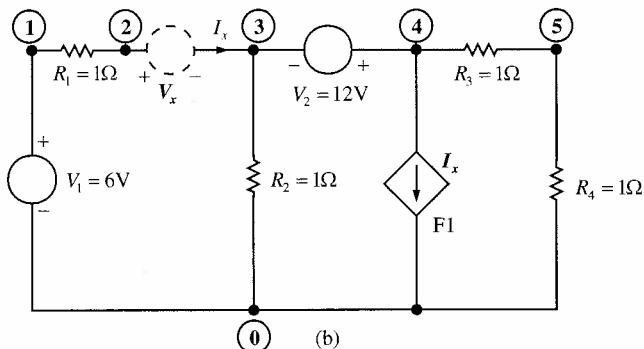
```

V1 1 0 DC 6
V2 4 3 DC 12
VX 2 3 DC 0 ;DUMMY SOURCE USED TO CALCULATE Ix FOR F1
F1 4 0 VX 1
R1 1 2 1
R2 3 0 1
R3 4 5 1
R4 5 0 1
* VO IS THE SAME AS NODE VOLTAGE V(5)
.END

```



(a)



(b)

Figura 4.12 Circuito usado no Exemplo 4.13.

A saída fornecida pelo computador inclui

|           |           |
|-----------|-----------|
| V1        | v (5)     |
| 6.000E+00 | 4.000E+00 |

## Exercícios

**E4.2** Calcule as tensões nodais no circuito da Figura E4.2.

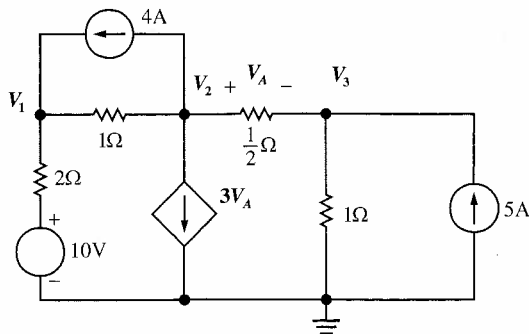
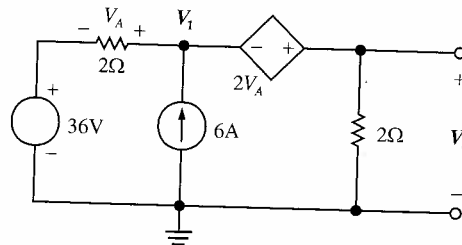


Figura E4.2

**Resp.:**  $V_1 = 9,44 \text{ V}$ ,  $V_2 = 5,17 \text{ V}$ ,  $V_3 = 5,11 \text{ V}$ .

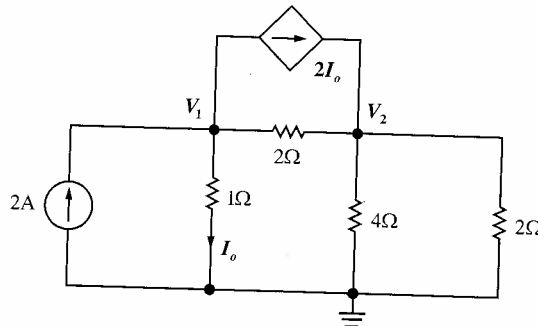
**E4.3** Calcule as tensões nodais no circuito da Figura E4.3.



**Figura E4.3**

**Resp.:**  $V_1 = 30 \text{ V}$ ,  $V_o = 18 \text{ V}$ .

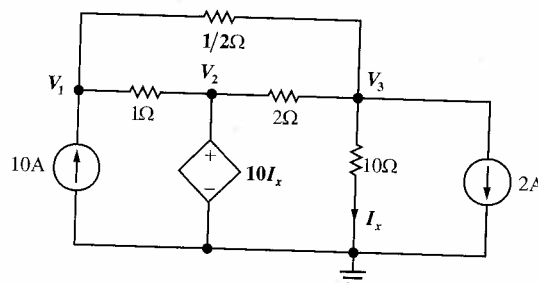
**E4.4** Calcule as tensões nodais no circuito da Figura E4.4.



**Figura E4.4**

**Resp.:**  $V_1 = 0,8 \text{ V}$ ,  $V_2 = 1,6 \text{ V}$ .

**E4.5** Dada a rede da Figura E4.5, calcule as tensões nodais e a corrente  $I_x$ .



**Figura E4.5**

**Resp.:**  $V_1 = 50 \text{ V}$ ,  $V_2 = 46,67 \text{ V}$ ,  $V_3 = 46,67 \text{ V}$ ,  $I_x = 4,67 \text{ A}$ .

## Circuitos Contendo Amplificadores Operacionais

Aplicaremos agora PSPICE às redes contendo amp-op's. O modelo que empregaremos é mostrado na Figura 3.33b. Os valores parâmetros típicos que usaremos são  $R_i = 1 \text{ MEG}\Omega$ ,  $A = 10^5$  e  $R_o = 50\Omega$ .

### Exemplo 4.14

Vamos determinar a tensão de saída do circuito amp-op mostrado na Figura 4.13a. A rede está redesenhada na Figura 4.13b. O programa PSPICE e a saída impressa são

```
BASIC INVERTING CONFIGURATION OF AN OP-AMP
V1 1 0 DC 10M
E1 4 0 0 2 1E5
R1 1 2 10K
```

```

R2  2  0  1MEG
R3  2  3  50K
R4  3  4  50
* VO IS THE SAME AS NODE VOLTAGE V(3)
.END

```

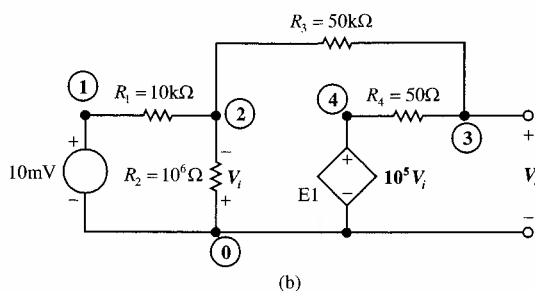
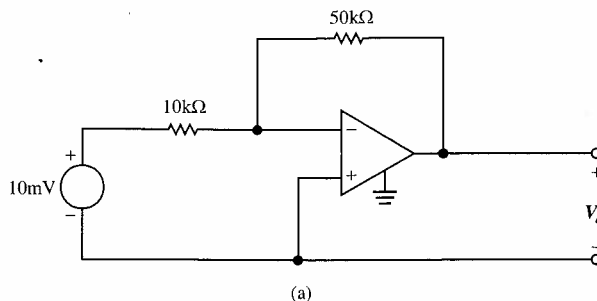


Figura 4.13 Circuito usado nos exemplos 4.14 e 4.15.

A saída do programa inclui

```

V1          V(3)
1.000E-02   -5.000E-02

```

#### Exemplo 4.15

Dada a rede amp-op do Exemplo 4.14, vamos trocar a fonte de tensão para 1 V e calcular a tensão de saída, o ganho do circuito e a resistência de entrada e a de saída da rede.

O programa PSPICE e a saída exibida são os seguintes:

```

USE OF .TF ON INVERTING OP-AMP
V1  1  0  DC  1
E1  4  0  0  2  1E5
R1  1  2  10K
R2  2  0  1MEG
R3  2  3  50K
R4  3  4  50
* .TF GIVES THE GAIN, INPUT RESISTANCE, AND
* OUTPUT RESISTANCE
.TF V(3) V1
* VO IS THE SAME AS NODE VOLTAGE V(3)
.END

```

A saída do programa inclui:

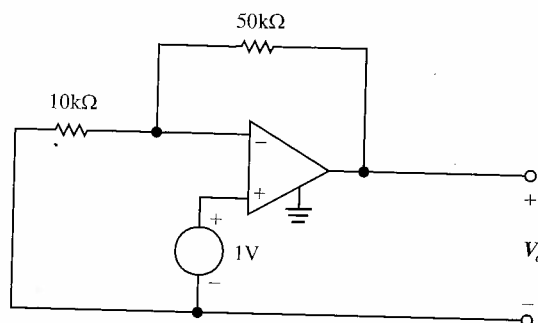
```

V1          V(3)
1.000E+00   -5.000E+00
V(3)/V1 = -5.000E+00
INPUT RESISTANCE AT V1 = 1.000E+04
OUTPUT RESISTANCE AT V(3) = 3.025E-03

```

**Exercício**

**E4.6** Calcule a tensão de saída, ganho e resistências de entrada e saída da rede da Figura E4.6.



**Figura E4.6**

*Resp.:*  $V_o = 6 \text{ V}$ , ganho = 6,  $R_i = 1,67 \times 10^{11} \Omega$ ,  $R_o = 3 \times 10^{-4} \Omega$ .

## 4.4 Resumo

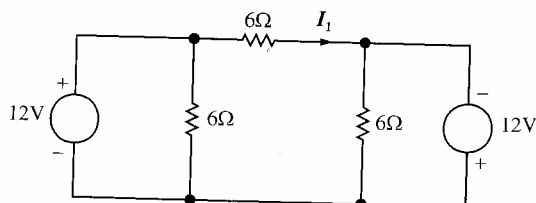
Neste capítulo foi introduzido o programa PSPICE para a análise por computador. Foram apresentados e explicados os vários comandos utilizados para entrar dados, descrever o tipo de solução desejada e especificar a saída. Finalmente, aplicamos o PSPICE a circuitos que contêm fontes independentes, fontes dependentes e amp-op's.

### Pontos-Chave

- O programa PSPICE consiste das seguintes categorias de comandos:
  1. Comandos de título e comentários.
  2. Comandos de dados.
  3. Comandos de controle da solução.
  4. Comandos de especificação da saída.
  5. Comando de fim.
- Dicas que auxiliam na programação com PSPICE:
  1. A primeira linha do programa é dedicada ao título. Se você saltar uma linha antes de digitar o título, o título será considerado um comando de dado e o programa não será executado.
  2. O número "zero" e a letra "o" são caracteres diferentes. Se você inadvertidamente digitou "o" em vez de "zero", seus programas não serão executados e você terá grande dificuldade em localizar o erro.
  3. A falta de entendimento da convenção da direção de referência da corrente e tensão causa mais erros na programação e interpretação de resultados do que qualquer outro fator. Considere-se avisado!

### Problemas

**4.1** Determine  $I_1$  no circuito da Figura P4.1.



**Figura P4.1**

- 4.2 Determine  $V_o$  na rede da Figura P4.2.

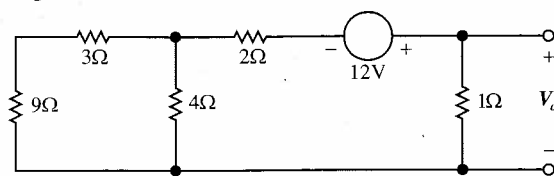


Figura P4.2

- 4.3 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P4.3.

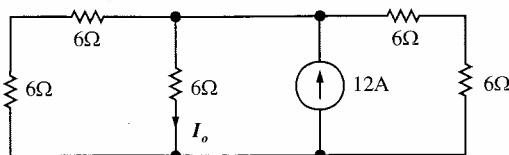


Figura P4.3

- 4.4 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P4.4.

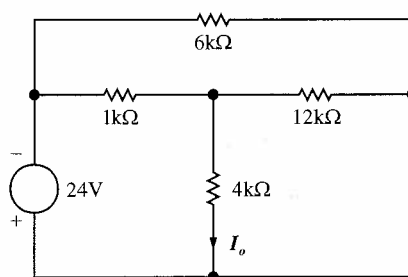


Figura P4.4

- 4.5 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P4.5.

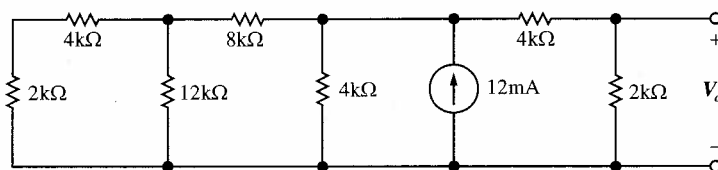


Figura P4.5

- 4.6 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P4.6.

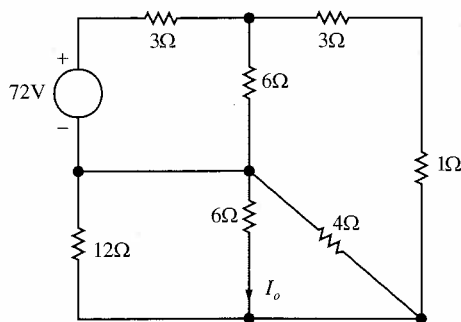


Figura P4.6

4.7 Determine  $I_o$  na rede da Figura P4.7.

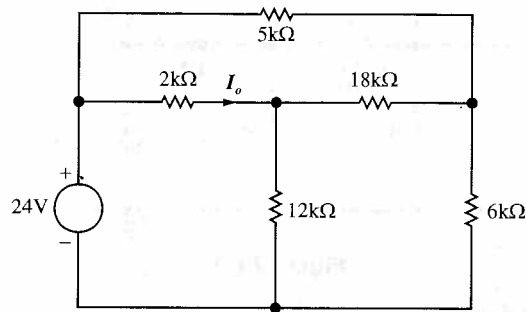


Figura P4.7

4.8 Determine  $I_o$  na rede da Figura P4.8.

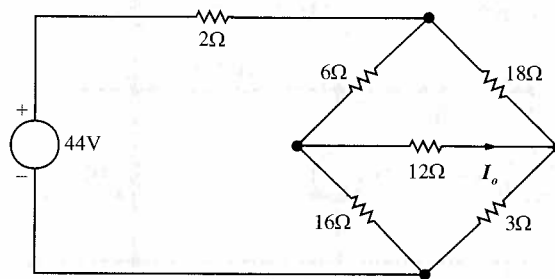


Figura P4.8

4.9 Determine  $I_o$  na rede da Figura P4.9.

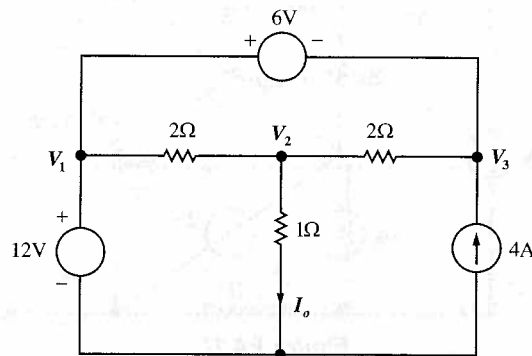


Figura P4.9

4.10 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P4.10.

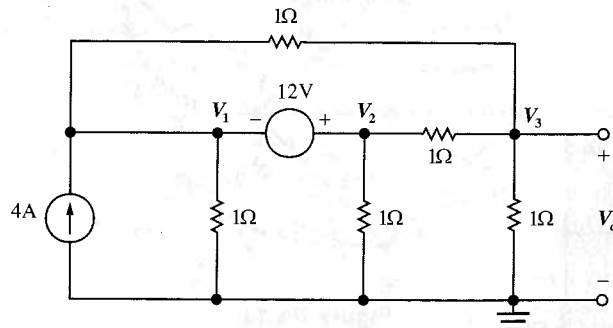


Figura P4.10

4.11 Determine  $I_o$  na rede da Figura P4.11.

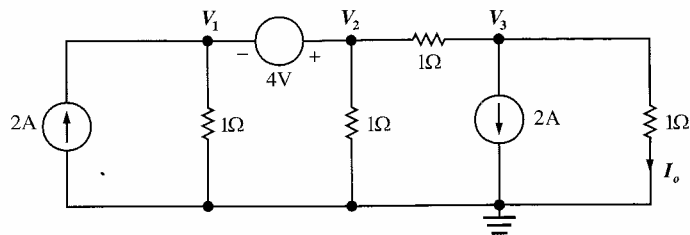


Figura P4.11

4.12 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P4.12.

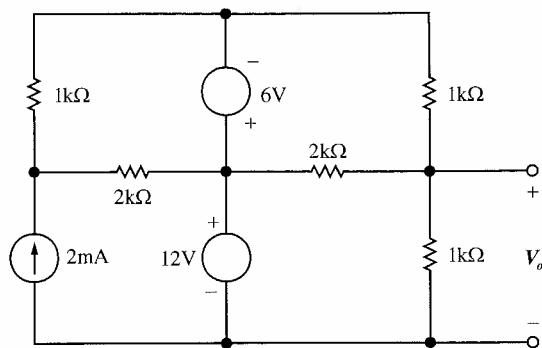


Figura P4.12

4.13 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.13.

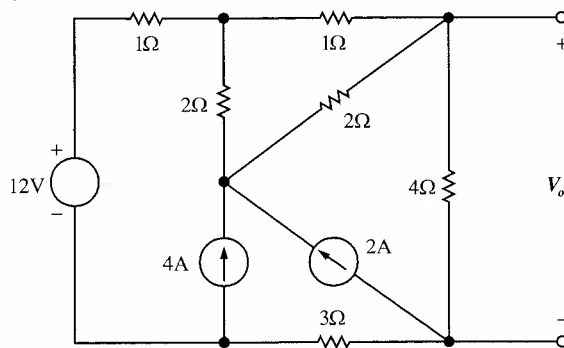


Figura P4.13

4.14 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P4.14.

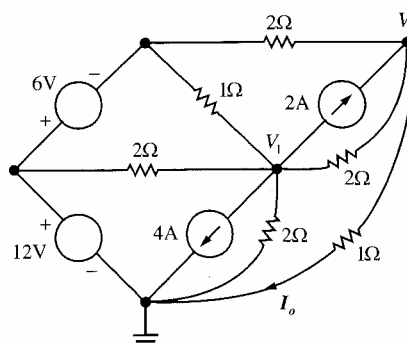


Figura P4.14

4.15 Determine  $V_o$  na rede da Figura P4.15.

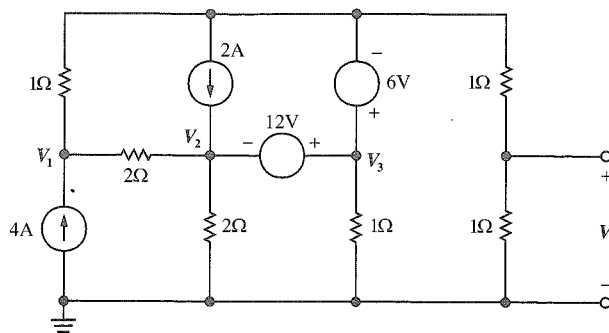


Figura P4.15

4.16 Determine a corrente em cada ramo da rede da Figura P4.16.

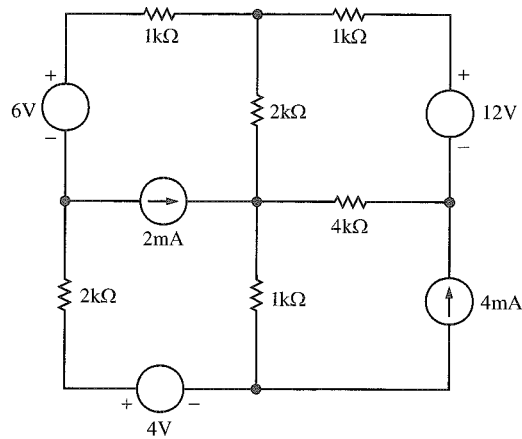


Figura P4.16

4.17 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.17.

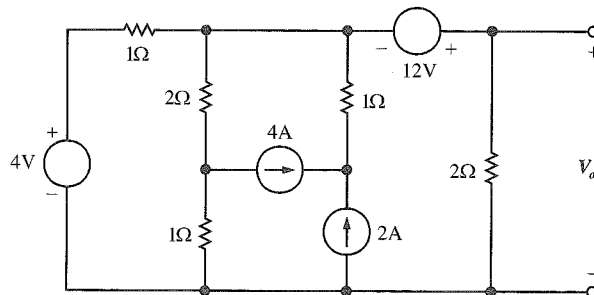


Figura P4.17

4.18 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.18.

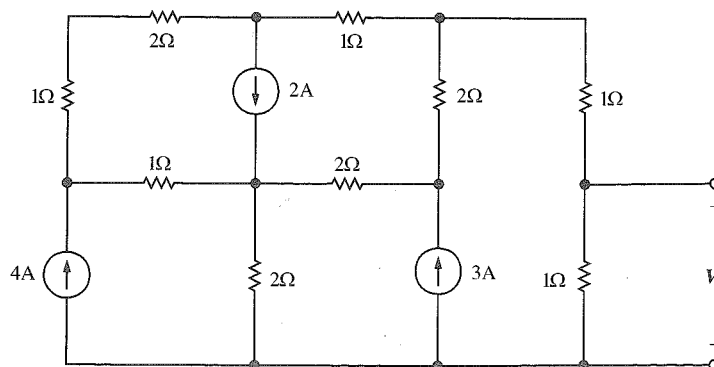


Figura P4.18



- 4.19 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P4.19.

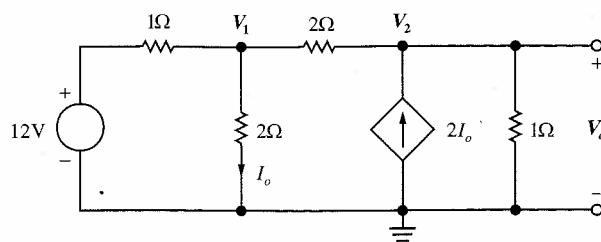


Figura P4.19

- 4.20 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.20.

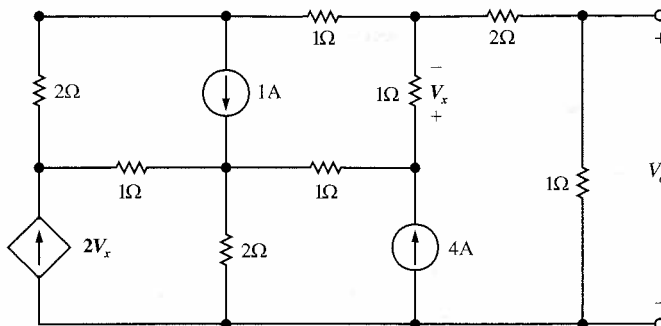


Figura P4.20

- 4.21 Calcule todas as tensões nodais, a corrente  $I_x$  e a corrente na fonte de 10 V na rede da Figura P4.21.

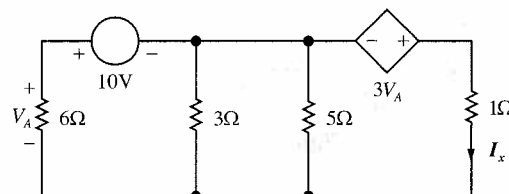


Figura P4.21

- 4.22 Calcule todas as tensões nodais, as correntes  $I_x$  e  $I_a$  e a corrente na fonte de 10 V na rede da Figura P4.22.

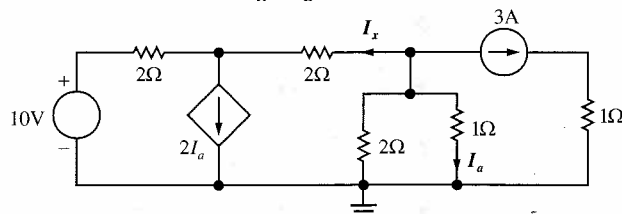


Figura P4.22

- 4.23 Calcule a tensão  $V_o$  na rede da Figura P4.23.

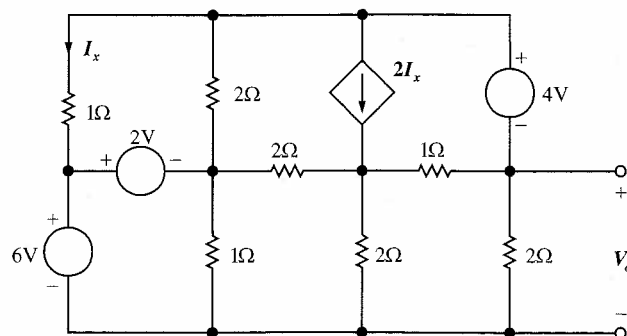


Figura P4.23

4.24 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.24.

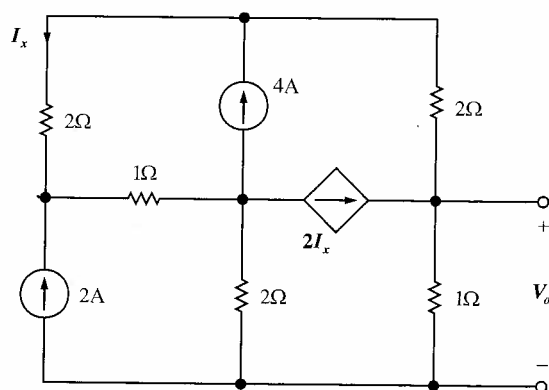


Figura P4.24

4.25 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.25.

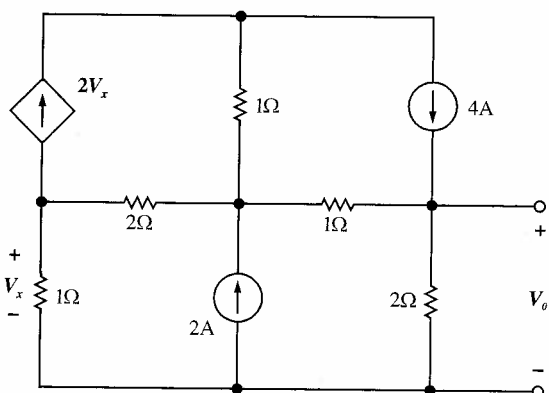


Figura P4.25

4.26 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.26.

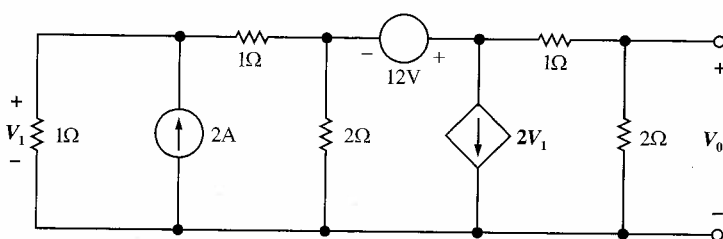


Figura P4.26

4.27 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.27.

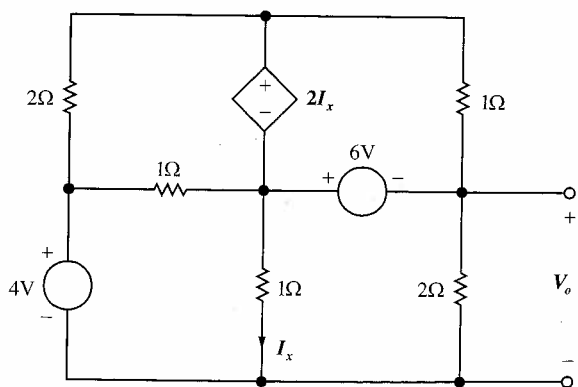


Figura P4.27

4.28 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.28.

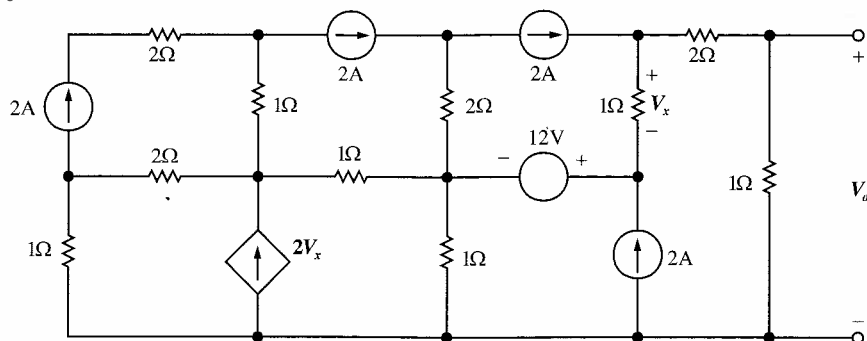


Figura P4.28

4.29 Calcule  $I_1$ ,  $I_2$  e  $V_o$  na rede mostrada na Figura P4.29.

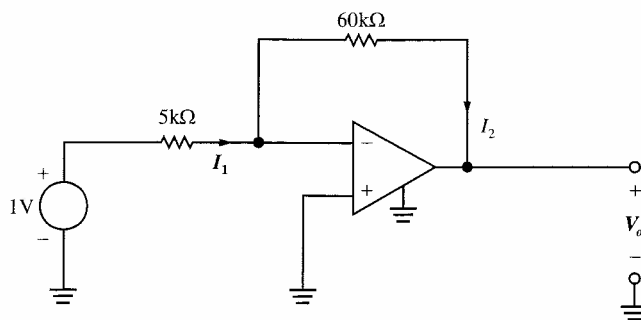


Figura P4.29

4.30 Dada a rede da Figura P4.30, (a) calcule a tensão de saída  $V_o$  e (b) determine que resistor único  $R_2$  poderia ser usado para substituir a rede T no laço de retorno.

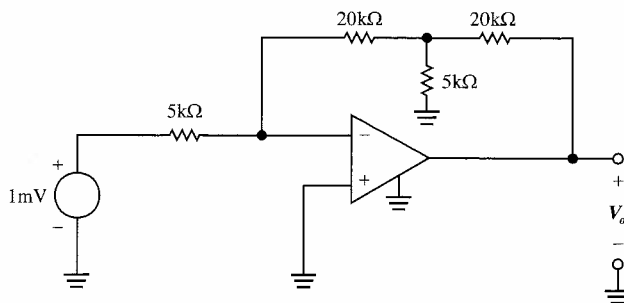


Figura P4.30

4.31 Dada a rede da Figura P4.31, calcule  $V_o$  e o ganho do circuito.

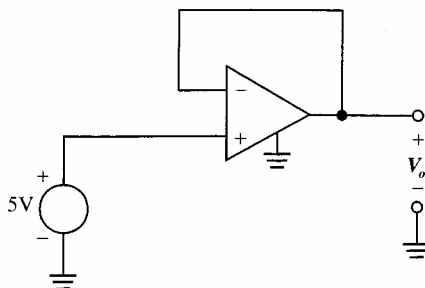


Figura P4.31

4.32 A rede da Figura P4.32 é um amplificador de diferença. Calcule a tensão  $V_o$ .

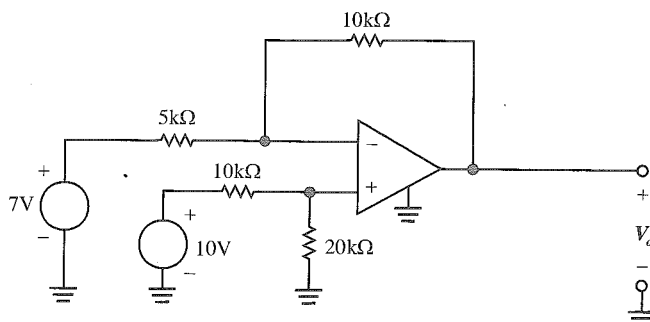


Figura P4.32

4.33 Dada a rede da Figura P4.33, calcule  $V_1$ ,  $V_o$ , o ganho e as resistências de entrada e saída.

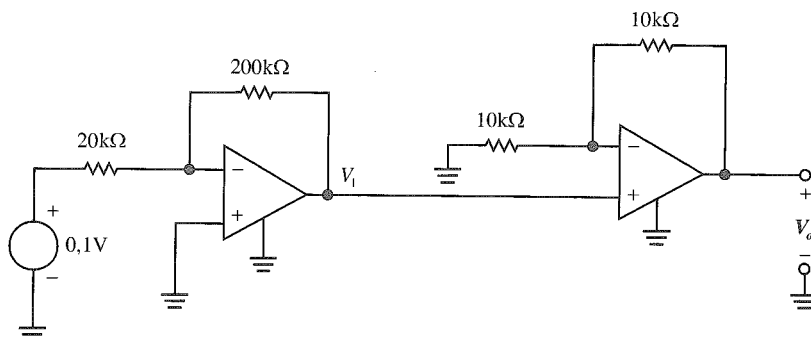


Figura P4.33

4.34 Dada a rede da Figura P4.34, calcule  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_o$ , o ganho do circuito e a resistência de entrada e saída.

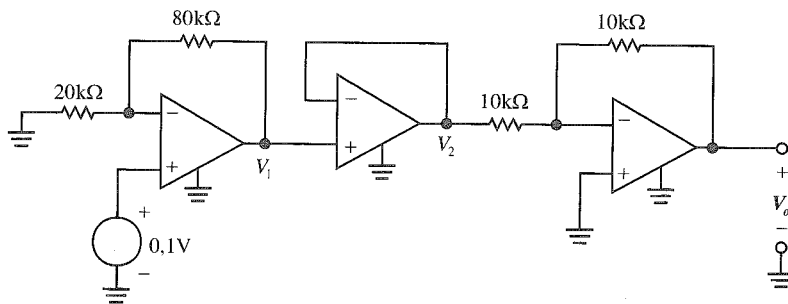


Figura P4.34

4.35 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.35.

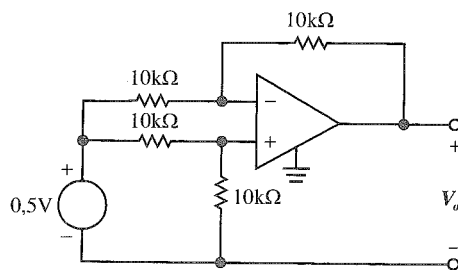


Figura P4.35

4.36 Calcule as tensões  $V_2$  e  $V_o$  na rede da Figura P4.36.

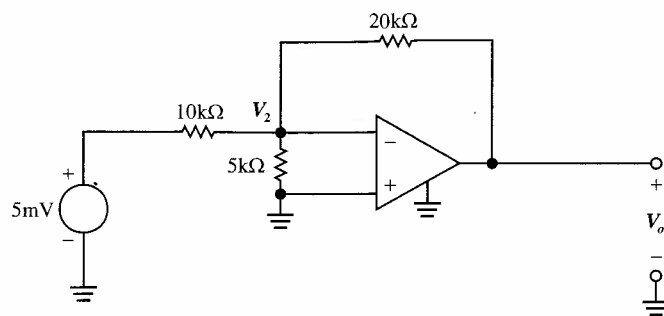


Figura P4.36

4.37 Calcule a tensão de saída  $V_o$  na rede da Figura P4.37 e use o resultado para calcular o ganho da rede.

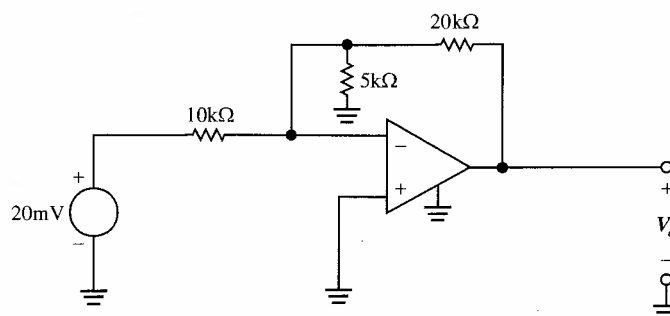


Figura P4.37

4.38 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.38.

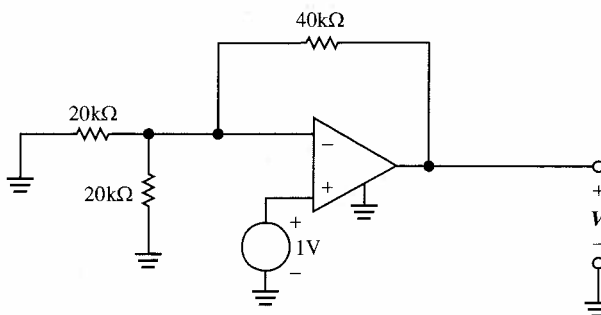


Figura P4.38

4.39 Calcule  $V_o$  na rede da Figura P4.39.

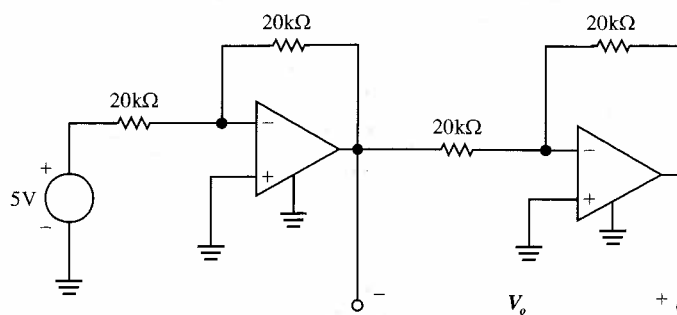


Figura P4.39

4.40 Dada a seguinte listagem de um programa PSPICE, desenhe a rede nele definida.

```
VSI 3 2 DC 8
VS2 5 4 DC 4
IS 0 1 DC 2
R1 1 0 2
R2 1 2 1
R3 1 4 5
R4 2 0 4
R5 3 5 3
R6 5 0 1
.END
```

4.41 Dada a seguinte listagem de um programa PSPICE, desenhe a rede nele definida.

```
VS1 1 3 DC 4
VS2 2 0 DC 12
IS 2 4 DC 6
VDUM 4 5 DC 0
R1 1 0 2
R2 1 2 3
R3 3 2 4
R4 3 4 2
R5 2 4 1
R6 5 0 3
R7 2 0 6
.END
```

4.42 Dada a seguinte listagem de um programa PSPICE, desenhe a rede nele definida.

```
VS 3 2 DC 15
VDUM 4 5 DC 0
IS 0 2 DC 5
HS 1 0 VDUM 3
R1 1 0 2
R2 1 2 5
R3 2 0 4
R4 3 0 3
R5 3 4 4
R6 5 0 1
.END
```

4.43 Dada a seguinte listagem de um programa PSPICE, desenhe a rede nele definida.

```
VS 2 1 DC 10
IS 3 0 DC 3
GS 1 4 4 3 3
R1 1 0 2
R2 2 0 1
R3 2 3 4
R4 3 4 1
R5 4 0 3
.END
```

**4.44** Dada a seguinte listagem de um programa PSPICE, desenhe a rede nele definida.

```
VS1 5 2 DC 26
VS2 0 4 DC 6
VDUM 2 3 DC 0
FS 5 6 VDUM 4
R1 1 0 1
R2 1 2 2
R3 2 0 4
R4 3 4 2
R5 6 4 1
R6 4 0 1
.END
```

**4.45** Dada a seguinte listagem de um programa PSPICE, desenhe a rede nele definida.

```
VS1 1 0 DC 14
VS2 0 2 DC 7
IS 2 0 DC 6
GS 1 3 5 0 5
ES 2 1 5 0 2
R1 3 4 3
R2 4 1 1
R3 4 5 2
R4 1 0 4
R5 5 2 2
R6 5 0 1
.END
```

# Técnicas Adicionais de Análise

Neste capítulo, introduziremos alguns teoremas e conceitos que servirão de base à medida que expandimos nosso conhecimento sobre análise de circuitos. Apesar de cada teorema ser em si uma nova ferramenta, e portanto um método alternativo, isto não significa necessariamente que o uso de tais teoremas resulte em uma solução mais simples ou curta. Tais teoremas, no entanto, permitirão ver o procedimento da análise de uma perspectiva diferente.

De modo geral, tais teoremas serão úteis na simplificação de redes para obter um número menor de equações e variáveis. Por exemplo, ao combinar dois resistores em série, elimina-se uma equação nodal e, ao combinar dois resistores em paralelo, elimina-se uma equação de laço.

O conceito de transferência máxima de potência será apresentado. Além disso, também será discutido como ajustar uma carga a fim de conseguir máxima transferência de potência.

A análise de sensibilidade será também introduzida. Tal análise revela como a variação de determinado componente afeta uma das variáveis da rede.

## 5.1 Teoremas de Rede

### Linearidade

Todos os circuitos que analisamos até agora e todos os que trataremos neste livro são lineares. Mostramos anteriormente que o resistor é um elemento linear porque seu relacionamento tensão-corrente é linear; isto é,

$$v(t) = Ri(t) \quad (5.1)$$

A linearidade exige tanto aditividade como homogeneidade (mudança de escala). No caso de um elemento resistivo, se  $i_1(t)$  for aplicada, a tensão sobre o resistor é

$$v_1(t) = Ri_1(t) \quad (5.2)$$

Similarmente, se  $i_2(t)$  for aplicada, então

$$v_2(t) = Ri_2(t) \quad (5.3)$$



Além disso, se  $i_1(t) + i_2(t)$  for aplicada, a tensão sobre o resistor é

$$v(t) = R[i_1(t) + i_2(t)] = Ri_1(t) + Ri_2(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (5.4)$$

Isto demonstra a propriedade aditiva. Além disso, se a corrente é multiplicada por uma constante  $K_1$ , a tensão também será multiplicada pela constante  $K_1$ , já que

$$RK_1 i(t) = K_1 Ri(t) = K_1 v(t) \quad (5.5)$$

Isto demonstra a homogeneidade.

Fontes dependentes são lineares se sua tensão ou corrente de saída é proporcional à soma da primeira potência das variáveis de tensão e corrente no circuito. Em outras palavras,  $v(t)$  ou  $i(t)$  podem estar na forma  $a_1 i_1(t)$  ou  $a_2 v_2(t)$  ou  $a_1 i_1(t) + a_2 v_2(t)$ . Entretanto, se  $v(t)$  ou  $i(t)$  for dada por uma expressão da forma  $a_1 i_1^2(t)$  ou  $a_2 i_1(t) v_2(t)$ , a fonte dependente é não-linear.

Mostramos nos capítulos anteriores que um circuito que contenha somente fontes independentes, fontes lineares dependentes e resistores é descrito por equações da forma

$$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) + \dots + a_n v_n(t) = i(t) \quad (5.6)$$

ou

$$b_1 i_1(t) + b_2 i_2(t) + \dots + b_n i_n(t) = v(t)$$

Note que se fontes independentes forem multiplicadas por uma constante, as tensões nodais ou correntes de laço são também multiplicadas pela mesma constante. Também definimos um circuito linear como aquele composto somente de fontes dependentes, fontes lineares dependentes e elementos lineares. Capacitores e indutores, que serão examinados no Capítulo 6, são também elementos de circuito que têm uma relação linear de entrada-saída desde que sua energia inicial armazenada seja zero.

### Exemplo 5.1

Desejamos ilustrar a propriedade de linearidade para o circuito dado na Figura 5.1.

Vamos supor que desejamos calcular  $I_1$  para as fontes de tensão dadas e também para o caso em que elas tenham seus valores dobrados. As duas equações de laço são

$$6I_1 - 3I_2 = 30$$

$$-3I_1 + 9I_2 = -15$$

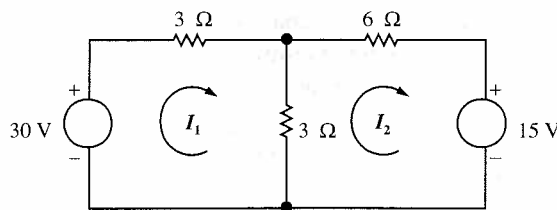


Figura 5.1 Circuito para o Exemplo 5.1.

Usando um enfoque matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Se o valor de cada fonte é dobrado, então

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 60 \\ -30 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30 \\ -15 \end{bmatrix}$$

e, portanto, quando os valores da fonte são dobrados, os valores de  $I_1$  e  $I_2$  são também dobrados. ■

### Exemplo 5.2

Calcule o valor da corrente  $I$  na Figura 5.2 caso  $V_S = 6$  V e  $V_S = 30$  V.

Aplicando a LKT, tem-se

$$V_S + 2V_x = 6I$$

onde

$$V_x = 2I$$

Portanto,

$$\frac{V_S}{2} = I$$

Se  $V_S = 6$  V, então  $I = 3$  A e  $V_S = 30$  V = (5)(6) V, então  $I = (5)(3)$  A = 15 A. ■

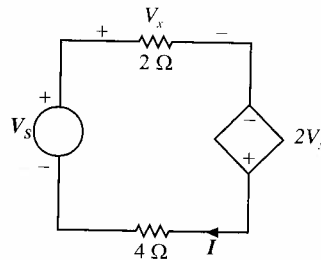


Figura 5.2 Circuito para o Exemplo 5.2.

### Exemplo 5.3

Para o circuito mostrado na Figura 5.3, desejamos determinar a tensão de saída  $V_{out}$ .<sup>1</sup> Entretanto, em vez de abordarmos o problema de maneira direta e calcular  $I_o$ , e então  $I_1$ , e então  $I_2$ , e assim por diante, usaremos linearidade e assumiremos que a tensão de saída seja  $V_{out} = 1$  V. Essa consideração resultará em um valor para a fonte de tensão. Usaremos então o valor real da fonte de tensão e linearidade para calcular o valor real de  $V_{out}$ .

Se assumirmos que  $V_{out} = V_3 = 1$  V, então

$$I_4 = \frac{V_3}{2} = 0,5 \text{ A}$$

$V_2$  pode então ser calculado como

$$\begin{aligned} V_2 &= 4I_4 + V_3 \\ &= 3 \text{ V} \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$I_3 = \frac{V_2}{3} = 1 \text{ A}$$

Usando-se a LKC, tem-se

$$\begin{aligned} I_2 &= I_3 + I_4 \\ &= 1,5 \text{ A} \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} V_1 &= 2I_2 + V_2 \\ &= 6 \text{ V} \end{aligned}$$

$I_1$  é então calculada como

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1}{4} \\ &= 1,5 \text{ A} \end{aligned}$$

1. N.T. Devido ao uso comum em meios técnicos do índice 'out' significando 'saída' e 'in' - 'entrada', as variáveis que levam tais índices serão mantidas neste livro.

Aplicando-se a LKC novamente, temos

$$\begin{aligned} I_0 &= I_1 + I_2 \\ &= 3 \text{ A} \end{aligned}$$

e finalmente

$$\begin{aligned} V_0 &= 2I_0 + V_1 \\ &= 12 \text{ V} \end{aligned}$$

Portanto, assumindo que  $V_{\text{out}} = 1 \text{ V}$  produz uma fonte de tensão de 12 V. Entretanto, a tensão real da fonte é 48 V e dessa forma a tensão real é 1 V ( $48/12$ ) = 4 V. ■

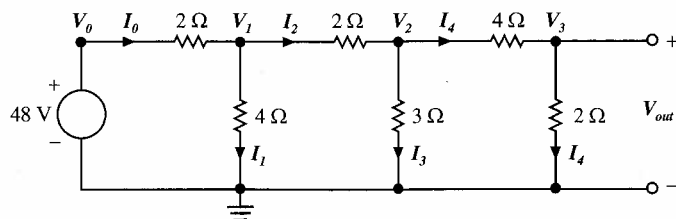


Figura 5.3 Circuito para o Exemplo 5.3.

### Exercícios

- E5.1** Use linearidade e a suposição de que  $V_o = 1 \text{ V}$  para calcular a tensão  $V_o$  na rede da Figura E5.1 se  $I_o = 4 \text{ A}$ .

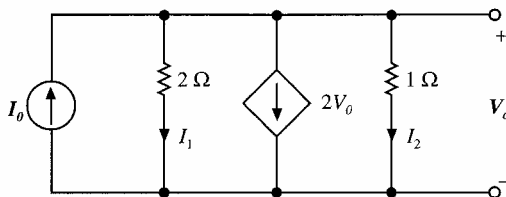


Figura E5.1

**Resp.:**  $V_o = 8/7 \text{ V}$ .

- E5.2** Use linearidade e a suposição de que  $I_o = 1 \text{ A}$  para calcular a corrente correta  $I_o$  na rede da Figura E5.2 se  $I = 12 \text{ A}$ .

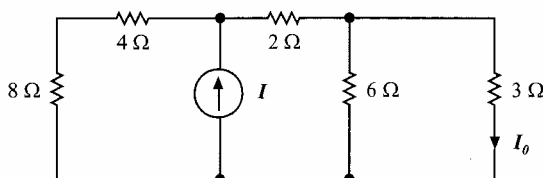


Figura E5.2

**Resp.:**  $I_o = 6 \text{ A}$ .

- E5.3** Use linearidade e a suposição de que  $I_o = 1 \text{ A}$  para calcular o valor de  $I_o$  na rede da Figura E5.3 se  $V = 24 \text{ V}$ .

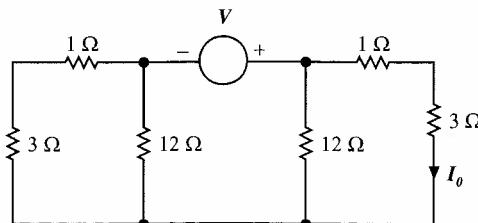


Figura E5.3

**Resp.:**  $I_o = 3 \text{ A}$ .

## Superposição

A fim de motivar este assunto, é didático reexaminar um problema que já consideramos anteriormente.

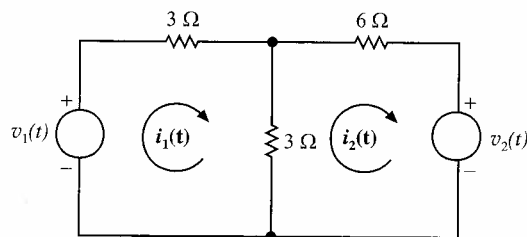
### Exemplo 5.4

O circuito dado na Figura 5.1 está redesenhado na Figura 5.4, onde os valores das fontes de tensão não estão especificados. O valor da corrente  $i_1(t)$  pode ser calculado usando-se a LKT, como mostrado no Exemplo 5.1 como

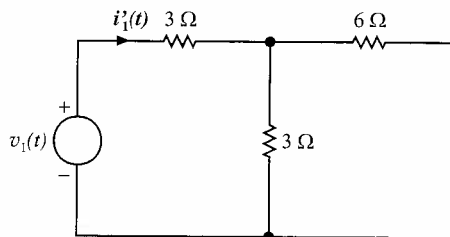
$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ -v_2(t) \end{bmatrix}$$

$$i_1(t) = \frac{1}{45} [9v_1(t) - 3v_2(t)]$$

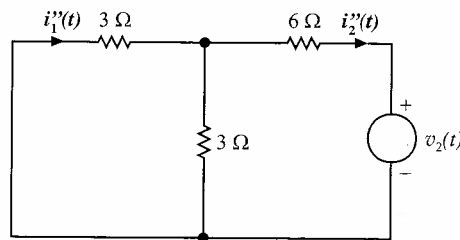
$$= \frac{v_1(t)}{5} - \frac{v_2(t)}{15}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.4 Ilustração de superposição através de um exemplo.

Em outras palavras, a corrente  $i_1(t)$  tem uma componente devida a  $v_1(t)$  e uma componente devida a  $v_2(t)$ . Tendo em vista que  $i_1(t)$  tem duas componentes, uma devida a cada fonte independente, seria interessante examinar que cada fonte agindo independentemente contribuiria com  $i_1(t)$ . Para que  $v_1(t)$  atue sozinha,  $v_2(t)$  deve ser zero. Como foi mencionado no Capítulo 2,  $v_2(t) = 0$  significa que a fonte  $v_2(t)$  é substituída por um curto-circuito. Portanto, para determinar o valor de  $i_1(t)$  devida somente a  $v_1(t)$ , empregamos o circuito da Figura 5.4b e nos referimos a esse valor de  $i_1(t)$  como  $i_1'(t)$ .

$$i_1'(t) = \frac{v_1(t)}{3 + \frac{(3)(6)}{3+6}}$$

$$= \frac{v_1(t)}{5}$$

Vamos determinar o valor de  $i_1(t)$  devido a  $v_2(t)$  agindo sozinha e nos referir a esse valor como  $i_1''(t)$ . Empregamos o circuito mostrado na Figura 5.4c e calculamos esse valor tal como

$$i_2''(t) = -\frac{v_2(t)}{6 + \frac{(3)(3)}{3+3}} = -\frac{2v_2(t)}{15}$$

Então, usando a divisão de corrente, obtém-se

$$i_1''(t) = -\frac{2v_2(t)}{15} \left( \frac{3}{3+3} \right)$$

$$= -\frac{v_2(t)}{15}$$

Se agora somarmos os valores de  $i_1'(t)$  e  $i_1''(t)$ , obtemos o valor calculado diretamente:

$$i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t)$$

$$= \frac{v_1(t)}{5} - \frac{v_2(t)}{15}$$

Note que *sobrepomos* o valor de  $i_1'(t)$  em  $i_1''(t)$ , ou vice-versa, para determinar o valor total da corrente desconhecida. ■

O que demonstramos no Exemplo 5.4 é verdade em geral para circuitos lineares e é um resultado direto da propriedade de linearidade. O princípio da superposição, que nos fornece essa habilidade de reduzir um problema complexo a vários problemas mais simples – cada um contendo uma única fonte independente –, afirma que:

Em qualquer circuito linear contendo múltiplas fontes independentes, a corrente ou tensão em qualquer ponto da rede pode ser calculada como a soma algébrica das contribuições individuais de cada fonte atuando isoladamente.

Quando se determina a contribuição devido a uma fonte independente, quaisquer fontes de tensão remanescentes são feitas iguais a zero, isto é, elas são substituídas por curtos-circuitos, e quaisquer fontes de corrente remanescentes são feitas iguais a zero, isto é, elas são substituídas por circuitos abertos; no entanto, fontes dependentes não são feitas iguais a zero e permanecem no circuito. Desse modo, a superposição nem sempre nos conduzirá a uma solução mais simples. Os exemplos a seguir ilustram a técnica.

### Exemplo 5.5

Desejamos determinar a tensão  $V_o$  mostrada na Figura 5.5a.

Resolveremos o problema utilizando superposição. Se permitirmos que  $V_o'$  seja a componente de  $V_o$  devida à fonte de 64 V, então as fontes de 12 V e 2 A são feitas iguais a zero, e a rede se reduz ao que é mostrado na Figura 5.5b. Combinando resistores, a rede é reduzida ainda mais, como mostrado na Figura 5.5c. Portanto,

$$V' = \frac{64}{4 + \frac{12}{5}} \left( \frac{12}{5} \right)$$

$$= 24 \text{ V}$$

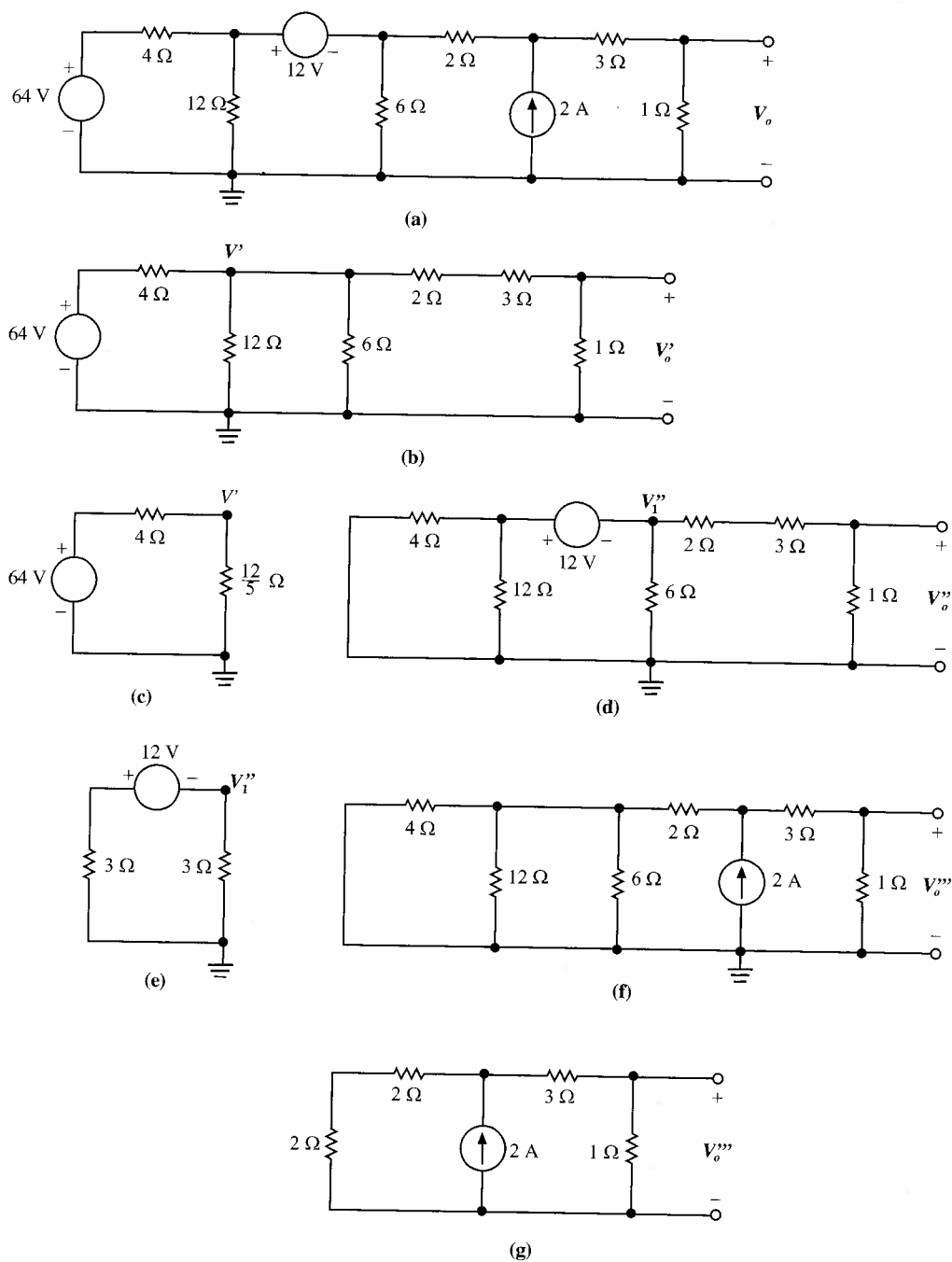


Figura 5.5 Circuitos empregados no Exemplo 5.5.

Da Figura 5.5b vemos agora que

$$V'_o = \frac{24}{2 + 3 + 1} \quad (1)$$

$$= 4 \text{ V}$$

A contribuição da fonte de 12 V para  $V_o$ , que chamaremos de  $V''_o$ , é calculada a partir da Figura 5.5d. Combinando os resistores nessa rede, reduz-se a mesma ao que é mostrado na Figura 5.5e.  $V''_1$  é claramente  $-6 \text{ V}$ . Utilizando esse valor de  $V''_1$  na Figura 5.5d, podemos imediatamente obter  $V''_o = -1 \text{ V}$ .

$V_0''$ , a componente de  $V_0$  devida à fonte de corrente de 2 A, é calculada da Figura 5.5f. Mais uma vez, combinando resistores, a rede é reduzida à mostrada na Figura 5.5g. Usando-se divisão de corrente, achamos que  $V_0'' = 1$  V.

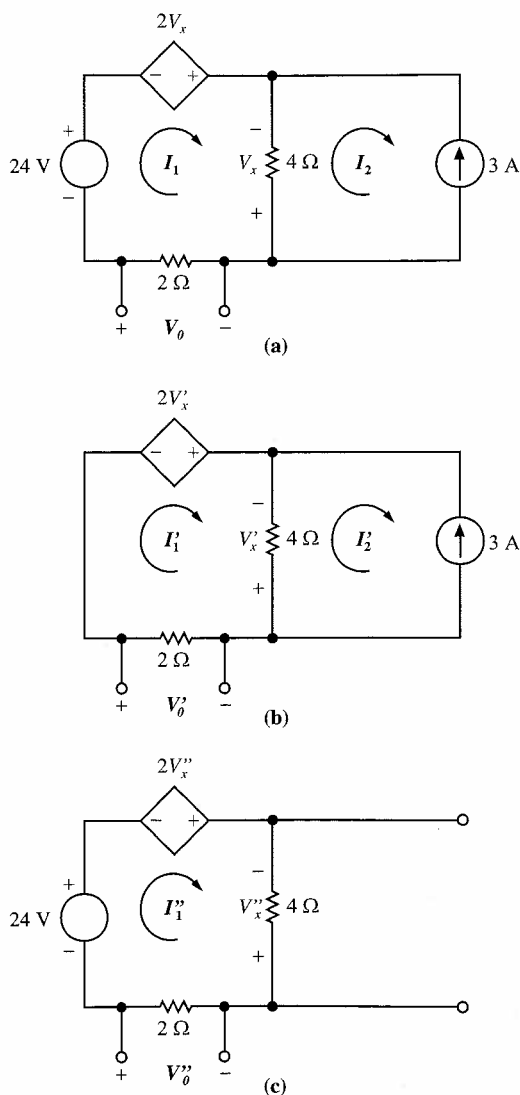
Aplicando o princípio da superposição, obtém-se

$$\begin{aligned} V_0 &= V_0' + V_0'' + V_0''' \\ &= 4 \text{ V} \end{aligned}$$

É interessante notar que resolver esse problema por superposição nos permite ver realmente a contribuição que cada fonte tem na tensão de saída. ■

### Exemplo 5.6

Vamos determinar a tensão  $V_0$  na rede da Figura 5.6a.



**Figura 5.6** Ilustração de superposição para um circuito contendo uma fonte dependente.

Empregando o princípio da superposição, resolvemos primeiramente o circuito da Figura 5.6b. As equações para esse circuito são

$$\begin{aligned} 2V_x' &= 4(I_1' - I_2') + 2I_1' \\ V_x' &= -4(I_1' - I_2') \\ I_2' &= -3 \text{ A} \end{aligned}$$

Essas equações produzem  $I_1' = -36/14$  A, e portanto

$$V_0' = \frac{72}{14} \text{ V}$$

Para o circuito da Figura 5.6c, as equações são

$$24 + 2V_x'' = 6I_1''$$

$$V_x'' = -4I_1''$$

Dessas equações obtemos  $I_1'' = 24/14$  A, desse modo

$$V_0'' = -\frac{48}{14} \text{ V}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V_0 &= V_0' + V_0'' \\ &= \frac{24}{14} \text{ V} \end{aligned}$$

Note que, apesar de termos obtido a resposta correta, o problema poderia ter sido resolvido mais facilmente por equações de malha.

### Exemplo 5.7

Considere o circuito do amplificador amp-op diferencial mostrado na Figura 5.7. Empregando superposição, primeiramente fazemos  $v_2 = 0$ . Notamos que uma vez que  $i_+ = 0$ , não pode existir corrente alguma em  $R_1$  ou  $R_2$  e, portanto,  $v_+ = 0$ . O circuito é, portanto, um amplificador inversor e, desse modo,

$$v_0' = -\frac{R_2}{R_1} v_1$$

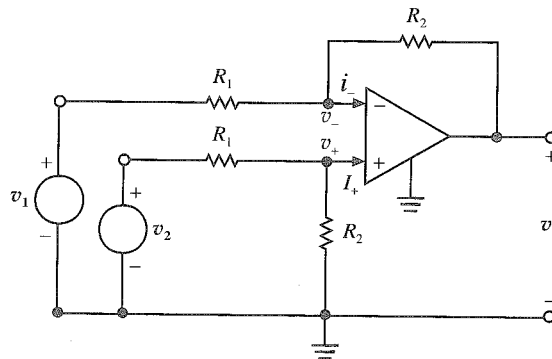


Figura 5.7 Circuito amplificador operacional para um amplificador diferencial.

Então, fazendo  $v_1 = 0$ , as equações do circuito são

$$\frac{v_2 - v_+}{R_1} = \frac{v_+}{R_2} + i_+$$

$$\frac{v_0'' - v_-}{R_2} = \frac{v_-}{R_1} + i_-$$

Entretanto,  $i_- = i_+ = 0$  e  $v_+ = v_-$ . Substituindo tais valores nas equações, tem-se

$$v_0'' = -\frac{R_2}{R_1} v_2$$



Portanto,

$$\begin{aligned} v_o &= v'_o + v''_o \\ &= \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1) \end{aligned}$$

que é o mesmo valor que foi obtido no Capítulo 3. ■

A superposição pode ser aplicada a um circuito com qualquer número de fontes dependentes e independentes. Na realidade, a superposição pode ser aplicada a uma rede de variadas maneiras. Por exemplo, um circuito com três fontes independentes pode ser resolvido usando-se cada fonte atuando sozinha, como demonstrado acima, ou poderíamos considerar duas de cada vez e somar o resultado com aquele obtido da terceira agindo sozinha. Além disso, as fontes independentes não têm de assumir seu valor real ou zero. No entanto, é imprescindível que a soma dos diferentes valores escolhidos seja adicionada ao valor total da fonte.

A superposição é uma propriedade fundamental das equações lineares, e portanto pode ser aplicada a qualquer efeito que esteja linearmente associado à sua causa. A esse respeito, é importante notar que apesar de a superposição se aplicar à corrente e tensão em um circuito linear, ela não pode ser aplicada para determinar potência, porque potência é uma função não-linear. Como uma rápida ilustração, veja que a potência no resistor de  $2\Omega$  no Exemplo 5.6 é  $P = I^2 R = (-6/7)^2 = 1,47 \text{ W}$ . No entanto, pela superposição,  $P = (-18/7)^2(2) + (12/7)^2(2) = 19,1 \text{ W}$ , o que está incorreto.

### Exercícios

**E5.4** Calcule  $V_o$  na rede da Figura E5.4 usando o princípio da superposição.

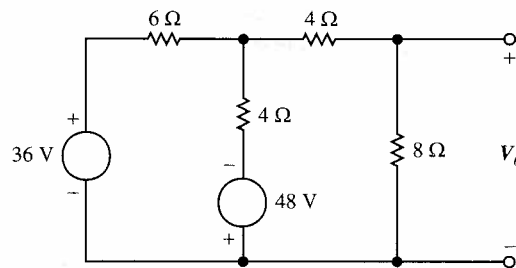


Figura E5.4

*Resp.:*  $V_o = -8 \text{ V}$ .

**E5.5** Calcule  $V_o$  na rede da Figura E5.5 usando o princípio da superposição.

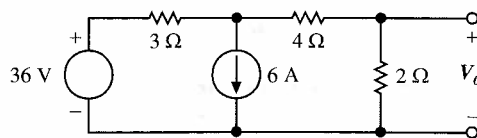


Figura E5.5

*Resp.:*  $V_o = 4 \text{ V}$ .

**E5.6** Calcule  $V_o$  na rede da Figura E5.6 usando o princípio da superposição.

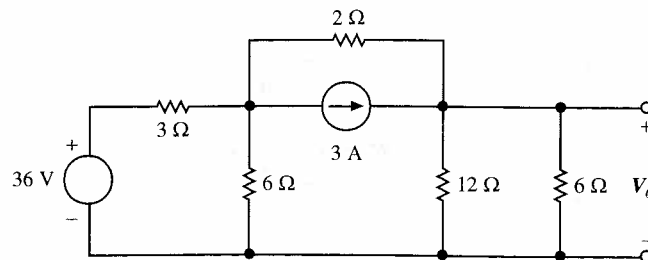


Figura E5.6

*Resp.:*  $V_o = 15 \text{ V}$ .

## Transformação de Fonte

Antes de começar a discutir transformação de fonte, é necessário ressaltar que as fontes reais diferem dos modelos ideais que apresentamos até agora. Em geral, uma fonte de tensão prática não produz uma tensão constante independente da carga ou da corrente que ela fornece, e uma fonte de corrente prática não fornece uma corrente constante independente da carga ou da tensão sobre seus terminais. Fontes práticas possuem resistências internas, e portanto os modelos mostrados na Figura 5.8a e b representam de forma mais adequada as fontes reais. Note que a potência fornecida pela fonte prática de tensão é dada pela expressão

$$\begin{aligned} P_L &= i_L^2 R_L \\ &= \left( \frac{v}{R_v + R_L} \right)^2 R_L \end{aligned}$$

que pode ser escrita como

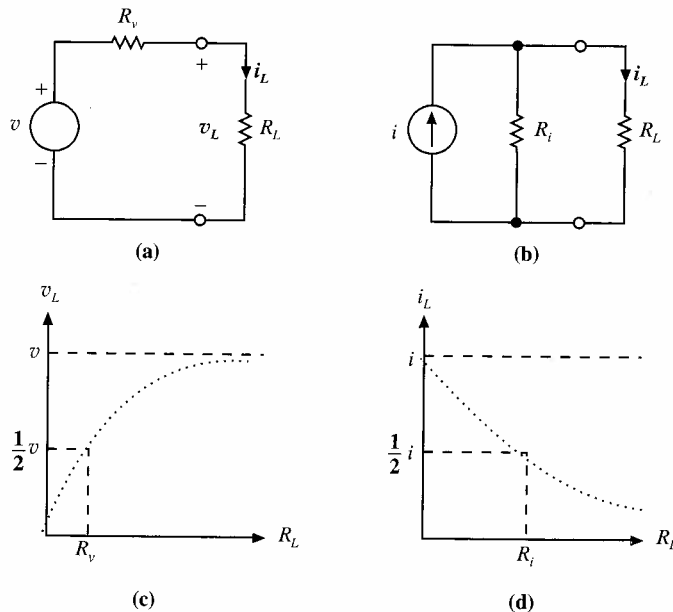
$$P_L = \frac{v^2}{R_L} \left( \frac{1}{1 + R_v/R_L} \right)^2$$

e portanto se  $R_L \gg R_v$ , então

$$P_L = \frac{v^2}{R_L}$$

que é a potência fornecida pela fonte de tensão ideal. Do mesmo modo, a potência fornecida pela fonte prática de corrente é determinada usando-se divisão de corrente tal como

$$\begin{aligned} P_L &= i_L^2 R_L \\ &= \left( \frac{i R_i}{R_i + R_L} \right)^2 R_L \end{aligned}$$



**Figura 5.8** Efeito da resistência interna em fontes reais de tensão e corrente.

que pode ser escrita como

$$P_L = i^2 R_L \left( \frac{1}{1 + R_L/R_i} \right)^2$$

e da mesma forma se  $R_i \gg R_L$ , então

$$P_L = i^2 R_L$$

que é a potência fornecida pela fonte de corrente ideal.

Os gráficos mostrados na Figura 5.8c e d ilustram o efeito da resistência interna nas fontes de tensão e corrente, respectivamente. Os gráficos indicam que a tensão de saída se aproxima da tensão da fonte ideal somente para valores grandes de carga de resistência e, portanto, pequenos valores de corrente. Da mesma forma, a carga de corrente é aproximadamente igual à corrente da fonte ideal somente para valores da carga de resistência  $R_L$  que são pequenos em comparação à resistência interna  $R_i$ .

Com esse material de fontes práticas em mãos como informação básica, podemos agora perguntar se é possível trocar uma fonte modelo por outra; isto é, trocar uma fonte de tensão modelo por uma fonte de corrente modelo, ou vice-versa. Poderíamos trocar uma fonte por outra desde que elas sejam equivalentes; isto é, cada fonte produz exatamente a mesma tensão e corrente para qualquer carga que esteja conectada sobre seus terminais.

Vamos examinar os dois circuitos mostrados na Figura 5.9. Para determinar as condições exigidas para que as duas fontes sejam equivalentes, vamos examinar as condições terminais de cada uma. Para a rede da Figura 5.9a,

$$i = i_L + \frac{v_L}{R_i}$$

ou

$$iR_i = R_i i_L + v_L$$

Para a rede da Figura 5.9b,

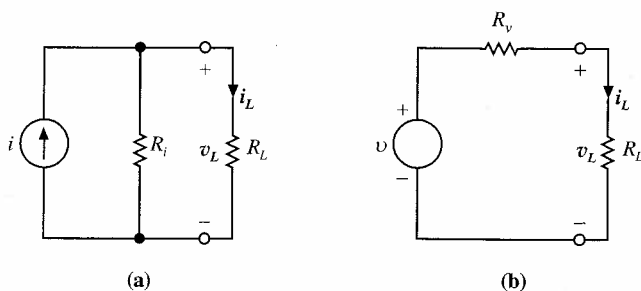
$$v = i_L R_v + v_L$$

Para que as duas redes sejam equivalentes, suas características terminais devem ser idênticas; isto é,

$$v = iR_i \text{ e } R_i = R_v \quad (5.7)$$

As relações especificadas na Equação 5.7 e Figura 5.9 são extremamente importantes, e o leitor não deve deixar de entender seu significado. O que essas relações nos dizem é que se colocamos dentro de uma rede uma fonte de corrente  $i$  em paralelo com um resistor  $R$ , podemos trocar essa combinação por uma fonte de tensão de valor  $v = iR$  em série com o resistor  $R$ . O inverso também é verdade; isto é, uma fonte de tensão  $v$  em série com um resistor  $R$  pode ser trocado com uma fonte de corrente de valor  $i = v/R$  em paralelo com o resistor  $R$ . Os parâmetros dentro do circuito (por exemplo, uma tensão de saída) ficam inalterados após tais transformações.

Os exemplos a seguir demonstram a utilidade de uma troca de fontes.



**Figura 5.9** Circuitos usados para determinar condições para uma troca de fontes.

### Exemplo 5.8

Dada a fonte de tensão não-ideal da Figura 5.10a, determine a fonte de corrente não-ideal equivalente.

A fonte de corrente pode ser obtida usando-se as expressões da Equação 5.7 e está mostrada na Figura 5.10b. O leitor deve estar atento para manter a polaridade da fonte de tensão e a direção da fonte de corrente em acordo, como mostrado na Figura 5.10. ■

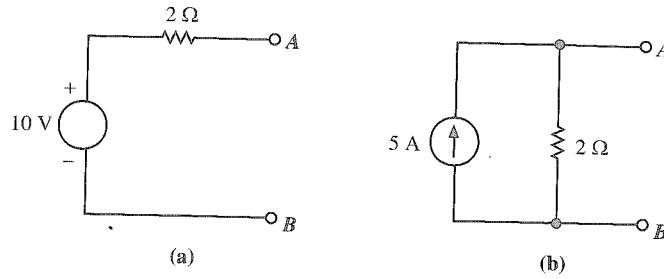


Figura 5.10 Duas fontes equivalentes.

**Exemplo 5.9**

Considere a rede da Figura 5.11a. Desejamos calcular a corrente  $I_o$ . Note que já que as tensões nodais  $V_1$  e  $V_3$  são conhecidas, uma equação LKC no nó central produzirá  $V_2$  e, portanto,  $I_o$ . No entanto, duas equações de malha são necessárias para se determinar  $I_o$  e dois circuitos separados devem ser analisados para se determinar  $I_o$  usando-se superposição.

Para se resolver o problema utilizando-se transformação de fontes, transformamos primeiramente a fonte de 60 V e o resistor de  $6\ \Omega$  em uma fonte de corrente de 10 A em paralelo com o resistor de  $6\ \Omega$ , como mostrado na Figura 5.11b. Depois disso, o resistor de  $3\ \Omega$  em série com a fonte de 15 V são transformados em uma fonte de 5 A em paralelo com o resistor de  $3\ \Omega$ , como mostrado na Figura 5.11c. Combinando os resistores e fontes de corrente, resulta a rede da Figura 5.11d. Empregando agora divisão de corrente, obtemos  $I_o = 2\text{ A}$ .

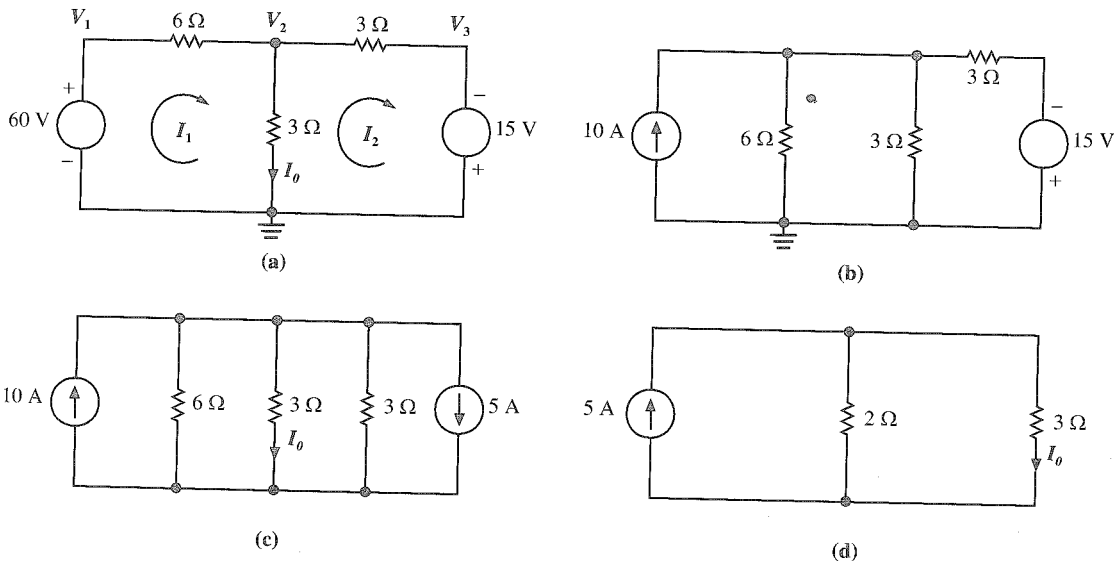


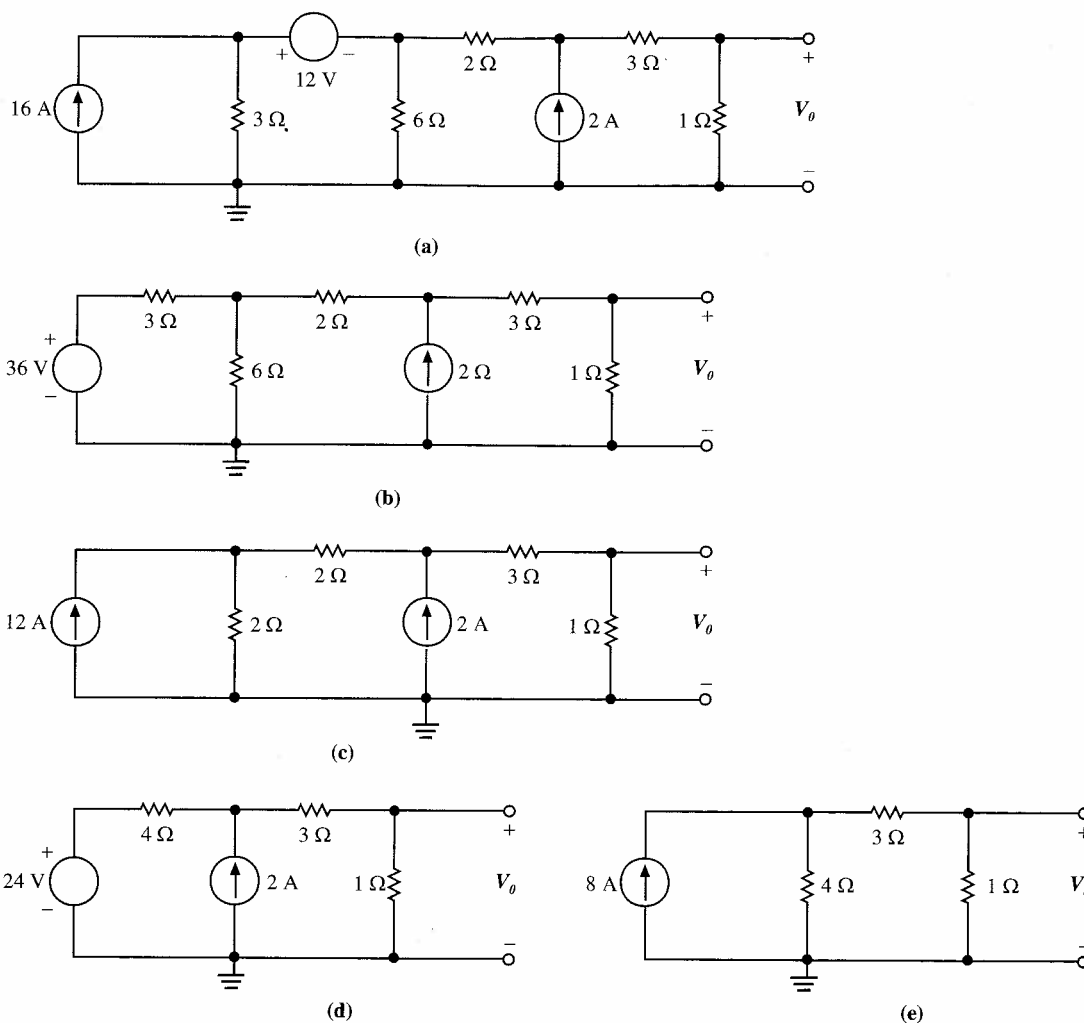
Figura 5.11 Circuitos empregados no Exemplo 5.9.

**Exemplo 5.10**

Vamos demonstrar como achar  $V_o$  na rede da Figura 5.5a utilizando repetidas aplicações de transformação de fontes.

Se começarmos do lado esquerdo da rede da Figura 5.5a, a combinação em série da fonte de 64 V e o resistor de  $4\ \Omega$  é convertida para uma fonte de 16 A em paralelo com o resistor de  $4\ \Omega$ . Se também combinarmos os resistores de  $4\ \Omega$  e  $12\ \Omega$  que estão agora em paralelo, obtemos o circuito da Figura 5.12a. Continuando a redução do circuito, a combinação em paralelo da fonte de corrente de 16 A e o resistor de  $3\ \Omega$  é convertida para uma fonte de 48 V em série com um resistor de  $3\ \Omega$ , e esses elementos são então combinados com uma fonte de 12 V para produzir a rede da Figura 5.12b. A fonte de 36 V em série com o resistor de  $3\ \Omega$  é convertida para uma fonte de corrente de 12 A e o resistor de  $3\ \Omega$  em paralelo, que quando combinados com o resistor de  $6\ \Omega$  produzem a rede da Figura 5.12c. Quando a fonte de corrente de 12 A é transformada em uma fonte de tensão e os dois resistores em série são adicionados, obtemos a rede da Figura 5.12d. Final-

mente, transformando a fonte de 24 V e o resistor de  $4\ \Omega$  em uma fonte de corrente e o resistor em paralelo, e então combinando as fontes de corrente em paralelo, tem-se o circuito mostrado na Figura 5.12e. Empregando a divisão de corrente nessa última rede, achamos que  $V_o = 4\text{ V}$ . ■



**Figura 5.12** Aplicação da transformação de fontes na rede da Figura 5.5a.

Note que nessa sistemática, às vezes cansativa, a transformação nos permite reduzir a rede metodicamente a uma forma equivalente mais simples em relação a algum outro elemento do circuito.

### Exercícios

- E5.7** Ache  $V_o$  no circuito da Figura E5.4 utilizando transformação de fontes.  
**Resp.:**  $V_o = -8\text{ V}$ .
- E5.8** Ache  $V_o$  no circuito da Figura E5.5 utilizando transformação de fontes.  
**Resp.:**  $V_o = 4\text{ V}$ .
- E5.9** Ache  $V_o$  no circuito da Figura E5.6 utilizando transformação de fontes.  
**Resp.:**  $V_o = 15\text{ V}$ .

### Teoremas de Thévenin e Norton

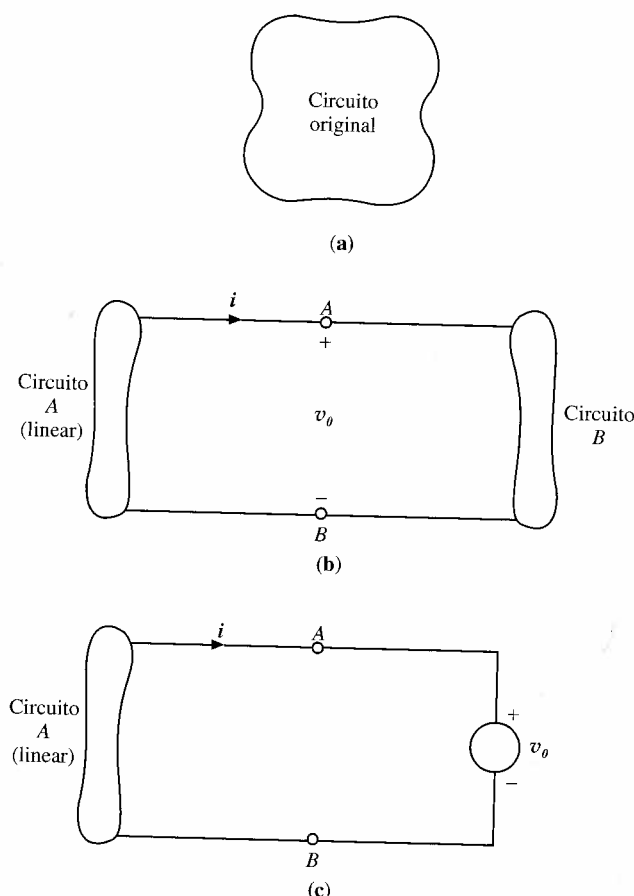
Apresentamos até agora um número de técnicas para análise de circuitos. Neste ponto, acrescentaremos dois teoremas à nossa coleção de ferramentas que serão extremamente úteis. Os teoremas levam os nomes de seus

autores, M. L. Thévenin, um engenheiro francês, e E. L. Norton, um cientista que trabalhou no Bell Telephone Laboratories.

Suponhamos que nos tenha sido dado um circuito e desejamos encontrar a corrente, tensão ou potência que é fornecida a algum resistor da rede, o qual chamaremos de carga. O *teorema de Thévenin* nos diz que podemos substituir toda a rede, com exceção da carga, por um circuito equivalente que contenha somente uma fonte de tensão independente em série com um resistor de modo tal que a relação corrente-tensão na carga não seja alterada. O *teorema de Norton* é idêntico ao postulado acima, exceto que o circuito equivalente é uma fonte de corrente independente em paralelo com um resistor.

Note que este é um resultado muito importante. Ele nos diz que, ao examinar qualquer rede de um par de terminais, toda a rede é equivalente a um circuito simples consistindo de uma fonte de tensão independente em série com um resistor ou uma fonte de corrente independente em paralelo com um resistor.

Ao discutir esses teoremas, assumiremos que o circuito mostrado na Figura 5.13a pode ser dividido em duas partes, como mostrado na Figura 5.13b. Em geral, o circuito *B* é a carga e pode ser linear ou não-linear. O circuito *A* é o saldo da rede original com exceção da carga e deve ser linear. Então, o circuito *A* pode conter fontes independentes, fontes dependentes e resistores, ou qualquer outro elemento linear. Exigimos, entretanto, que uma fonte dependente e sua variável de controle apareçam no mesmo circuito.



**Figura 5.13** Conceitos usados para desenvolver o teorema de Thévenin.

O circuito *A* fornece uma corrente  $i$  ao circuito *B* e produz uma tensão  $v_0$  sobre os terminais de entrada do circuito *B*. Do ponto de vista das relações dos terminais do circuito *A*, podemos substituir o circuito *B* por uma fonte de tensão de  $v_0$  volts (com a devida polaridade), como mostrado na Figura 5.13c. Já que a tensão no terminal não foi alterada e o circuito *A* está inalterado, a corrente no terminal é a mesma.

Aplicando-se agora o princípio de superposição na rede mostrada na Figura 5.13c, a corrente total  $i$  mostrada na figura é a soma das correntes fornecidas por todas as fontes do circuito *A* e a fonte  $v_0$  que acabamos de acrescentar. Portanto, via superposição, a corrente  $i$  pode ser escrita

$$i = i_0 + i_{sc} \quad (5.8)$$

onde  $i_o$  é a corrente devido a  $v_o$  com todas as fontes independentes do circuito A feitas iguais a zero (ou seja, fontes de tensão substituídas por curtos-circuitos e fontes de corrente substituídas por circuitos abertos) e  $i_{sc}$  é a corrente curto-circuitada devido a todas as fontes do circuito A com  $v_o$  substituída por um curto-circuito.

Os termos  $i_o$  e  $v_o$  estão relacionados pela equação

$$i_o = \frac{-v_o}{R_{Th}} \quad (5.9)$$

onde  $R_{Th}$  é a resistência equivalente referindo-se ao circuito A dos terminais A-B com todas as fontes independentes do circuito A feitas iguais a zero.

Substituindo a Equação 5.9 na Equação 5.8 tem-se

$$i = -\frac{v_o}{R_{Th}} + i_{sc} \quad (5.10)$$

Este é um relacionamento genérico e, portanto, deve manter-se para qualquer condição específica nos terminais A-B. Como um caso específico, suponhamos que os terminais formam um circuito aberto. Para tal condição,  $i = 0$  e  $v_o$  é igual à tensão do circuito aberto  $v_{oc}$ . Então a Equação 5.10 se torna

$$i = 0 = \frac{-v_{oc}}{R_{Th}} + i_{sc} \quad (5.11)$$

Desse modo,

$$v_{oc} = R_{Th} i_{sc} \quad (5.12)$$

Essa equação determina que a tensão em um circuito aberto é igual à corrente em um curto-circuito multiplicada pela resistência equivalente referindo-se ao circuito A com todas as fontes independentes feitas iguais a zero. Referimo-nos a  $R_{Th}$  como a resistência equivalente de Thévenin.

Substituindo a Equação 5.12 na Equação 5.10 tem-se

$$i = \frac{-v_o}{R_{Th}} + \frac{v_{oc}}{R_{Th}}$$

ou

$$v_o = v_{oc} - R_{Th} i \quad (5.13)$$

Vamos agora examinar os circuitos que são descritos por essas equações. O circuito representado pela Equação 5.13 é mostrado na Figura 5.14a. O fato de esse circuito ser equivalente nos terminais A-B ao circuito A da Figura 5.13 é uma afirmação do *teorema de Thévenin*. O circuito representado pela Equação 5.10 é mostrado na Figura 5.14b. O fato de esse circuito ser equivalente nos terminais A-B ao circuito A na Figura 5.13 é uma afirmação do *teorema de Norton*.

Deve-se ter o cuidado ao notar que os circuitos da Figura 5.14 juntamente com a relação da Equação 5.12 representam uma transformação de fonte.

A maneira como esses teoremas são aplicados depende da estrutura da rede original em questão. Por exemplo, se somente fontes independentes estão presentes, podemos calcular a tensão do circuito aberto ou a corrente do curto-circuito e a resistência equivalente de Thévenin. No entanto, se fontes dependentes também compõem o circuito, o equivalente de Thévenin será determinado calculando-se  $v_{oc}$  e  $i_{sc}$ , já que este é o melhor método para se determinar  $R_{Th}$  em uma rede contendo fontes dependentes. Finalmente, se o circuito A não contém nenhuma fonte *independente*, então ambas,  $v_{oc}$  e  $i_{sc}$ , necessariamente serão zero. (Por quê?) Já que não podemos determinar  $R_{Th}$  a partir de  $v_{oc}/i_{sc}$ , pois a razão é indeterminada, devemos procurar um outro meio. Note e se  $v_{oc} = 0$ , então o circuito equivalente é simplesmente a resistência desconhecida  $R_{Th}$ . Se aplicarmos uma fonte externa ao circuito A – uma fonte de teste  $v_t$  – e determinarmos a corrente,  $i_t$ , que flui para o circuito A de  $v_t$ , então  $R_{Th}$  pode ser determinado de  $R_{Th} = v_t / i_t$ . Apesar de o valor numérico de  $v_t$  não precisar ser especificado, poderíamos deixar  $v_t = 1$  V e então  $R_{Th} = 1/i_t$ . Alternativamente, poderíamos usar a fonte de corrente como uma fonte de teste e deixar  $i_t = 1$  A, então  $v_t = (1)R_{Th}$ .

Uma variedade de exemplos será apresentada para demonstrar a utilidade desses teoremas.

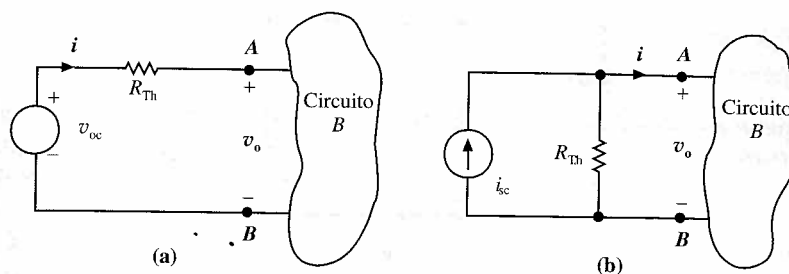


Figura 5.14 Circuitos equivalentes de Norton e Thévenin.

### Exemplo 5.11

Considere a rede da Figura 5.15a. Desejamos encontrar  $V_o$  utilizando os teoremas de Thévenin e de Norton.

Se desconectamos a rede nos pontos A-B, então a tensão do circuito aberto é mostrada na Figura 5.15b. Usando a divisão de tensão, tem-se

$$V_{oc} = 60 \left( \frac{4}{4 + 8 + 4} \right) = 15 \text{ V}$$

A resistência equivalente de Thévenin, obtida na análise dos terminais A-B do circuito aberto e substituindo-se a fonte de tensão com um curto-circuito, como mostrado na Figura 5.15c, é de  $3 \Omega$ . Se o circuito equivalente de Thévenin que consiste de  $V_{oc}$  em série com  $R_{Th}$  for conectado ao restante do circuito original nos terminais A-B, a rede é reduzida à mostrada na Figura 5.15d. Dessa última rede, achamos que

$$V_o = 15 \left( \frac{7}{3 + 5 + 7} \right) = 7 \text{ V}$$

Poderíamos também determinar  $V_o$  usando o teorema de Norton. Mais uma vez, a rede é desconectada nos terminais A-B. A corrente do curto-circuito é mostrada na Figura 5.15e. Já que nenhuma corrente fluirá no resistor de  $4 \Omega$  em paralelo com o curto-circuito,

$$I_{sc} = \frac{60}{4 + 8} = 5 \text{ A}$$

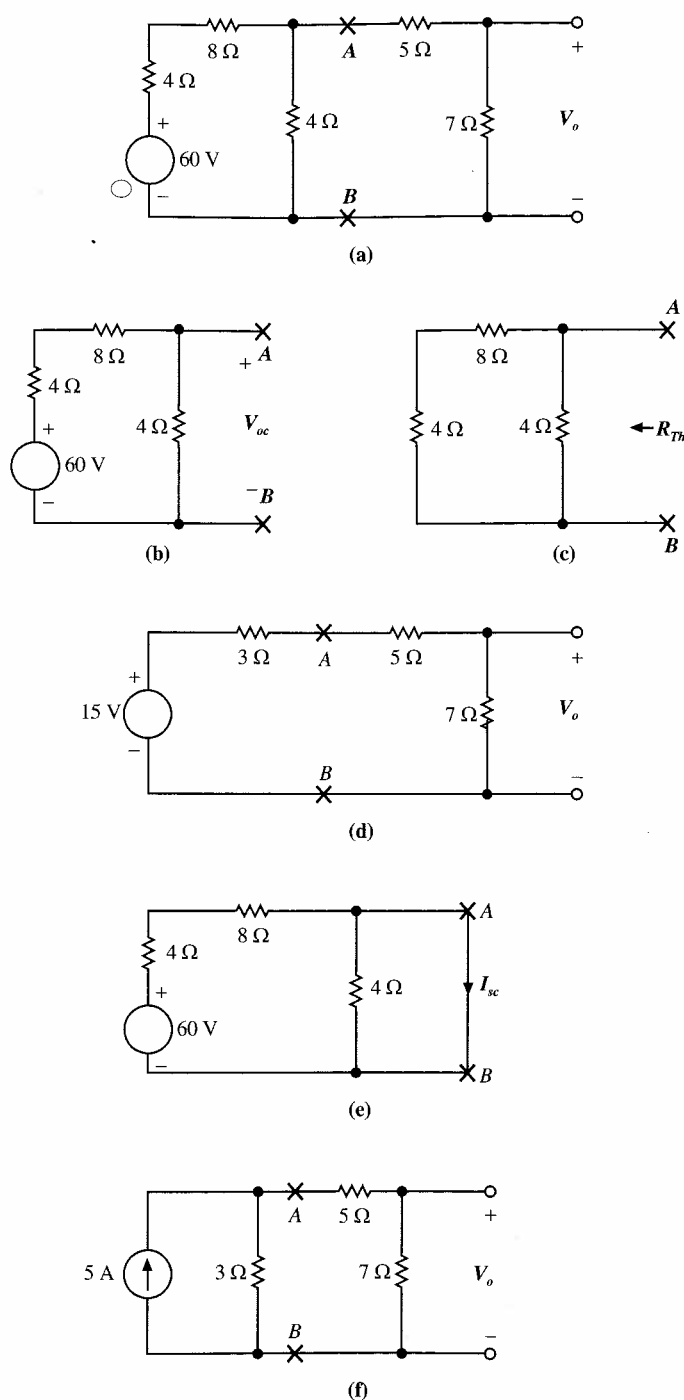
A resistência equivalente de Thévenin foi computada na Figura 5.15c,  $R_{Th} = 3 \Omega$ . Se o circuito equivalente de Norton, que consiste da fonte de corrente do curto-circuito em paralelo com a resistência equivalente de Thévenin, for conectado ao restante da rede original nos terminais A-B, a rede resultante é mostrada na Figura 5.15f. Usando-se divisão de corrente, achamos que

$$V_o = 5 \left( \frac{3}{3 + 5 + 7} \right) (7) = 7 \text{ V}$$

Vamos examinar brevemente algumas características salientes do Exemplo 5.11. Note que, aplicando-se o teorema de Thévenin, não há razão para desconectar da rede à esquerda do resistor de  $4 \Omega$  ao centro, pois a fonte de  $60 \text{ V}$  e os resistores de  $4 \Omega$  e  $8 \Omega$  já são equivalentes de Thévenin. Além disso, poderíamos ter desconectado a rede à direita do resistor de  $5 \Omega$ . Desconectar a rede nesse ponto não mudaria a tensão do circuito aberto, já que não há corrente alguma no resistor de  $5 \Omega$ . Entretanto, a  $R_{Th}$  aumentaria de  $5 \Omega$  para  $8 \Omega$ . Quando o novo circuito equivalente de Thévenin fosse conectado à carga de  $7 \Omega$ , a rede resultante seria novamente aquela mostrada na Figura 5.15d. Argumentos similares poderiam ser usados na análise pelo teorema de Norton.

Finalmente, é extremamente importante notar que, uma vez que a rede tenha sido simplificada usando-se uma equivalente de Thévenin ou Norton, temos simplesmente uma rede com a qual podemos aplicar novamente os teoremas. O exemplo a seguir ilustra isso.





**Figura 5.15** Circuitos empregados no Exemplo 5.11.

### Exemplo 5.12

Vamos usar os teoremas de Thévenin e Norton para determinar  $V_o$  na rede da Figura 5.5a.

Aplicando-se o teorema de Thévenin, desconectamos primeiramente a rede nos pontos A-B como mostrado na Figura 5.16a. A tensão sobre o resistor de  $12\ \Omega$  é de 48 V, e portanto  $V_{oc1} = -12 + 48 = 36\text{ V}$ . A  $R_{Th1}$  determinada a partir da Figura 5.16b é de  $3\ \Omega$ . Se anexarmos esse equivalente de Thévenin ( $V_{oc1}$  e  $R_{Th1}$ ) ao restante da rede, obtemos a rede mostrada na Figura 5.16c. Se agora desconectarmos a rede nos terminais C-D, a tensão do circuito aberto  $V_{oc2}$ , como mostrado na Figura 5.16d, será

$$V_{oc2} = 36 \left( \frac{6}{3+6} \right) = 24 \text{ V}$$

e  $R_{Th2}$  é calculada a partir da Figura 5.16e como sendo  $R_{Th2} = 4 \Omega$ . Conectando esse equivalente de Thévenin ( $V_{oc2}$  e  $R_{Th2}$ ) ao restante da rede, produz-se a rede da Figura 5.16f. Mais uma vez, desconectando a rede nos terminais E-F, obtemos a rede da Figura 5.16g. Dessa rede calculamos  $V_{oc3} = (2)(4) + 24 = 32 \text{ V}$ . A  $R_{Th3}$ , como mostrado na Figura 5.16h, é  $7 \Omega$ . Finalmente, anexando o equivalente de Thévenin ( $V_{oc3}$  e  $R_{Th3}$ ) ao restante da rede, que a esta altura é somente a carga de  $1 \Omega$ , tem-se a rede da Figura 5.16i.  $V_o$  pode agora ser computada e é  $V_o = 4 \text{ V}$ .

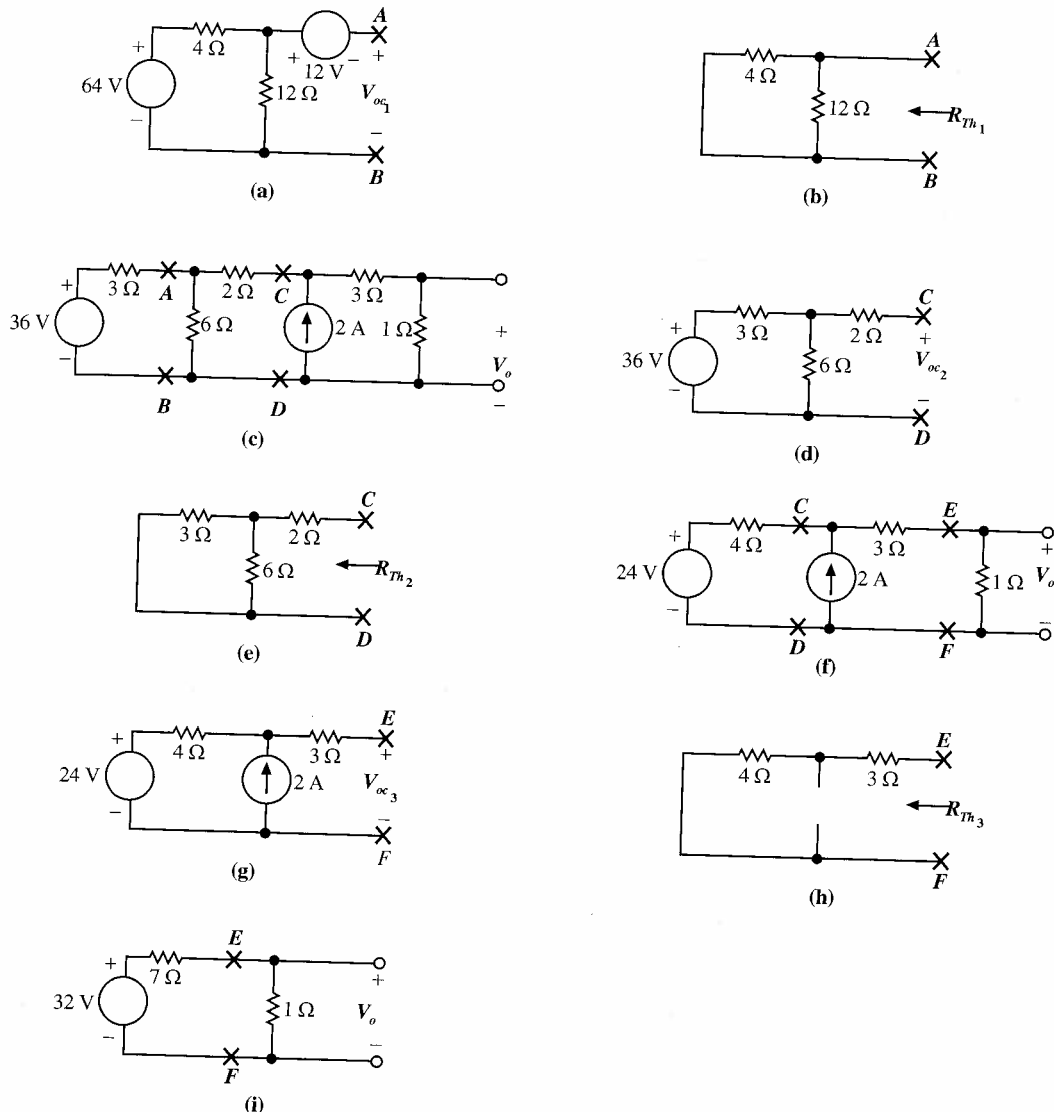


Figura 5.16 Circuitos usados no Exemplo 5.12.

Aplicando-se o Teorema de Norton, desconectamos mais uma vez a rede nos pontos A-B, como mostrado na Figura 5.17a. Note que nessa rede a tensão sobre o resistor de  $4 \Omega$  é  $64 - 12 = 52 \text{ V}$ , e portanto a corrente nesse resistor fluindo da esquerda para a direita é  $13 \text{ A}$ . Uma vez que a tensão sobre o resistor de  $12 \Omega$  é  $12 \text{ V}$ , a corrente fluindo através dele é  $1 \text{ A}$ . Usando-se a LKC,  $I_{sc1} = 13 - 1 = 12 \text{ A}$ . A  $R_{Th1}$  foi computada a partir Figura 5.16b como  $3 \Omega$ . O equivalente de Norton ( $V_{oc1}$  e  $R_{Th1}$ ) é conectado ao restante da rede na Figura 5.17b. Desconectando a rede nos pontos C-D, obtém-se o circuito da Figura 5.17c. Aplicando-se a divisão de corrente, tem-se  $I_{sc2} = 6 \text{ A}$ . A  $R_{Th2}$  computada a partir da Figura 5.17d é  $4 \Omega$ . Conectando esse equivalente de Norton ( $I_{sc2}$  e  $R_{Th2}$ ) ao restante da rede, obtemos o circuito da Figura 5.17e. Adicionando as fontes de cor-

rente e aplicando divisão de corrente, achamos que 8 A de corrente se dividirão igualmente entre os dois caminhos de  $4\ \Omega$  e portanto  $V_o = 4\text{ V}$ .

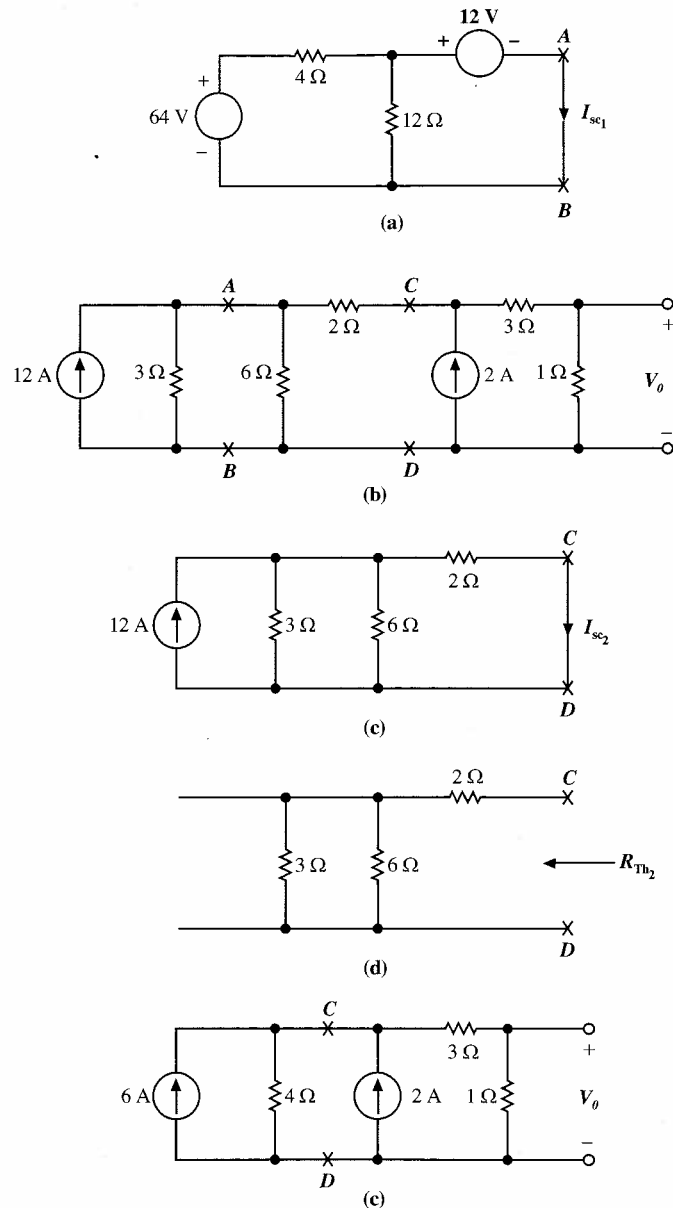


Figura 5.17 Redes empregadas no Exemplo 5.12.

### Exercícios

- E5.10** Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  no circuito da Figura E5.4.  
**Resp.:**  $V_o = -8\text{ V}$ .
- E5.11** Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  no circuito da Figura E5.5.  
**Resp.:**  $V_o = 4\text{ V}$ .
- E5.12** Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  no circuito da Figura E5.6.  
**Resp.:**  $V_o = 15\text{ V}$ .
- E5.13** Utilize o teorema de Norton para determinar  $V_o$  no circuito da Figura E5.4.  
**Resp.:**  $V_o = -8\text{ V}$ .
- E5.14** Utilize o teorema de Norton para determinar  $V_o$  no circuito da Figura E5.5.  
**Resp.:**  $V_o = 4\text{ V}$ .

Nos exemplos anteriores, ilustramos a maneira pela qual os teoremas de Thévenin e Norton podem ser aplicados a redes que contêm somente fontes independentes. Vamos agora aplicar os teoremas a redes que contêm fontes dependentes apenas. Como mencionado anteriormente, o equivalente de Thévenin ou Norton de tal rede é  $R_{Th}$ , e os seguintes exemplos servirão para ilustrar como determinar essa resistência equivalente de Thévenin.

### Exemplo 5.13

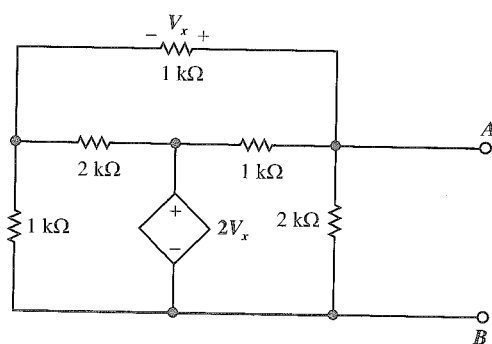
Desejamos determinar o equivalente de Thévenin na rede da Figura 5.18a nos terminais A-B. Nosso método para resolver esse problema será aplicar uma fonte de 1 V nos terminais, como mostrado na Figura 5.18b, e então calcular a corrente  $I_o$  e  $R_{Th} = 1/I_o$ .

As equações para a rede da Figura 5.18b são as que se seguem. A LKT ao longo do laço externo resulta em

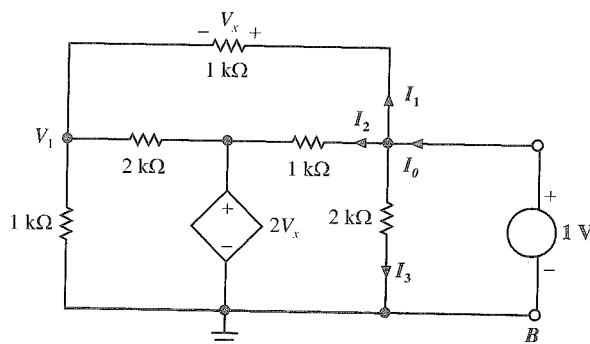
$$V_1 + V_x = 1$$

A equação LKC no nó  $V_1$  é

$$\frac{V_1}{1} + \frac{V_1 - 2V_x}{2} + \frac{V_1 - 1}{1} = 0$$



(a)



(b)

Figura 5.18 Redes empregadas no Exemplo 5.13.

Mais uma vez, como mencionado no Capítulo 3, temos uma equação com a tensão em volts e a resistência em quiloohms; portanto a corrente estará em miliampères.

Resolvendo-se as equações para  $V_x$ , obtém-se  $V_x = 3/7$  V. Conhecendo  $V_x$ , podemos computar as correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Seus respectivos valores são

$$I_1 = \frac{V_x}{1} = \frac{3}{7} \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{1 - 2V_x}{1} = \frac{1}{7} \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ mA}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_0 &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= \frac{15}{14} \text{ mA} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_{Th} &= \frac{1}{I_0} \\ &= \frac{14}{15} \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

### Exemplo 5.14

Vamos determinar  $R_{Th}$  nos terminais A-B para a rede da Figura 5.19a. O método usado nesse problema será aplicar uma fonte de corrente de 1 mA nos terminais A-B, calcular a tensão nos terminais  $V_2$ , como mostrado na Figura 5.19b, e então  $R_{Th} = V_2/0,001$ .

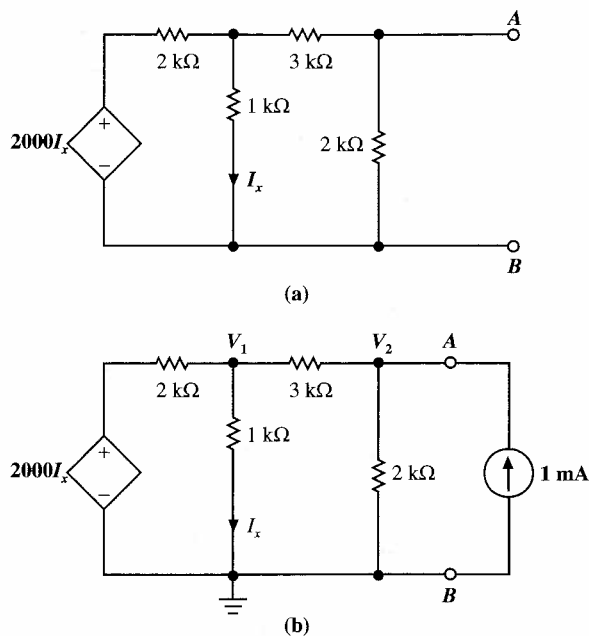


Figura 5.19 Redes utilizadas no Exemplo 5.14.

As equações nodais para a rede são

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - 2000I_x}{2000} + \frac{V_1}{1000} + \frac{V_1 - V_2}{3000} &= 0 \\ \frac{V_2 - V_1}{3000} + \frac{V_2}{2000} &= \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

e

$$I_x = \frac{V_1}{1000}$$

Essas equações podem ser dispostas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6000} & -\frac{1}{3000} \\ -\frac{1}{3000} & \frac{5}{6000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1000} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{12(1000)^2}{7} \begin{bmatrix} \frac{5}{6000} & \frac{1}{3000} \\ \frac{1}{3000} & \frac{5}{6000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

e

$$V_2 = \frac{10}{7} \text{ V}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} R_{Th} &= \frac{V_2}{0,001} \\ &= \frac{10}{7} \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

■

### Exemplo 5.15

Usando o modelo do amplificador operacional mostrado na Figura 3.33b, determine a resistência de saída do circuito mostrado na Figura 5.20a. A resistência de saída é a resistência equivalente de Thévenin nos terminais de saída. Usando o modelo, o circuito equivalente é mostrado na Figura 5.20b.

A resistência equivalente de Thévenin nos terminais de saída pode ser obtida assumindo-se uma fonte de tensão de 1 V conectada aos terminais e determinando a corrente resultante que ela produz. O circuito da Figura 5.20b foi redesenhado na Figura 5.20c com tal conexão.

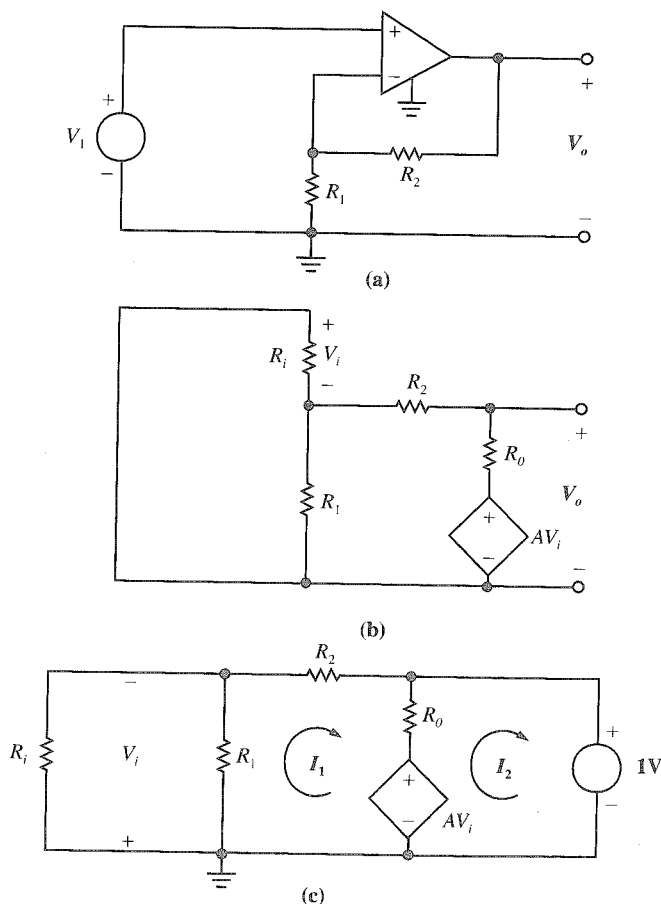


Figura 5.20 Circuitos para determinar a resistência de saída de um circuito com amplificador operacional.

As equações do circuito para essa configuração são

$$\begin{aligned} -AV_i &= I_1(R_{i1} + R_2 + R_0) - I_2R_0 \\ AV_i - 1 &= -I_1R_0 + I_2R_0 \\ V_i &= R_{i1}I_1 \end{aligned}$$

onde  $R_{i1}$  é a combinação paralela de  $R_i$  e  $R_1$ . Resolvendo-se essas equações para  $I_2$ , tem-se

$$I_2 = \frac{-(R_{i1} + AR_{i1} + R_2 + R_0)}{R_0(R_{i1} + R_2)}$$

Então

$$R_{out} = \frac{1}{-I_2} = \frac{R_0(R_{i1} + R_2)}{R_{i1} + AR_{i1} + R_2 + R_0}$$

Já que  $R_i$  é normalmente muito maior que  $R_1$ ,  $R_{i1} \approx R_1$  e, dessa forma,

$$R_{out} = \frac{R_0(R_1 + R_2)}{R_1 + AR_1 + R_2 + R_0}$$

Já que  $A$  é muito grande,  $AR_1$  é normalmente muito maior que  $R_1 + R_2 + R_0$ . Portanto,  $R_{out}$  pode ser aproximado pela expressão

$$\begin{aligned} R_{out} &= \frac{R_0(R_1 + R_2)}{AR_1} \\ &= \frac{R_0(1 + R_2/R_1)}{A} \end{aligned}$$

Note que essa equação mostra que a resistência dessa configuração é muito mais baixa que o amp-op básico do qual a resistência de saída é  $R_o$ . ■

## Exercícios

**E5.15** Considerando o circuito da Figura E5.15, determine o equivalente de Thévenin nos terminais A-B.

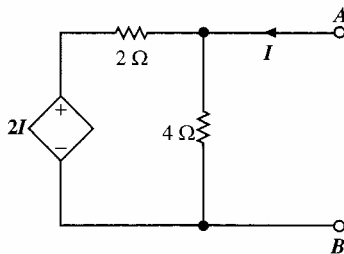


Figura E5.15

**Resp.:**  $R_{Th} = 8/3 \Omega$ .

**E5.16** Para a rede da Figura E5.16, determine o equivalente de Thévenin nos terminais A-B.

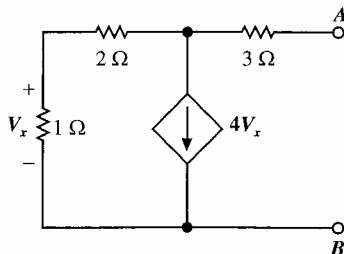


Figura E5.16

**Resp.:**  $R_{Th} = 18/5 \Omega$ .

Até agora examinamos os métodos com os quais aplicar os teoremas de Norton e Thévenin em redes que contêm somente fontes dependentes ou independentes. Ilustramos agora a aplicação dos teoremas em circuitos que contêm ambos.

### Exemplo 5.16

Vamos determinar a tensão  $V_o$  na rede da Figura 5.21a usando o teorema de Thévenin.

Para começar, desconectamos a rede nos pontos A-B. Lembre-se que quando a rede original é dividida em circuito A e circuito B, a fonte dependente e sua variável de controle devem ser contidas na mesma rede. A tensão do circuito aberto é calculada da rede na Figura 5.21b. Note que a fonte dependente está agora supernó ao redor da fonte de 12 V é

$$\frac{V_{oc} + 12 - (-2I'_x)}{1} + \frac{V_{oc} + 12}{2} + \frac{V_{oc}}{2} = 0$$

onde

$$I'_x = \frac{V_{oc}}{2}$$

Resolvendo-se para  $V_{oc}$ , obtém-se

$$V_{oc} = -6 \text{ V}$$

Neste ponto, desejamos determinar a resistência equivalente de Thévenin. Porém, por causa da presença da fonte dependente, não podemos simplesmente zerar as fontes independentes e nos concentrarmos na rede nos terminais A-B para computar  $R_{Th}$ . Ilustraremos agora dois métodos para determinar tal resistência. No primeiro método, encontraremos a corrente do curto-circuito e usaremos a Equação 5.12 para achar  $R_{Th}$ , e no segundo método vamos fazer igual a zero as fontes independentes e aplicar uma fonte externa para determinar  $R_{th}$  diretamente.  $I_{sc}$  pode ser calculado da rede na Figura 5.21c. Uma vez que os terminais A-B estão curto-circuitados,  $I''_x$  será zero e a rede se reduz à que é mostrada na Figura 5.21d.

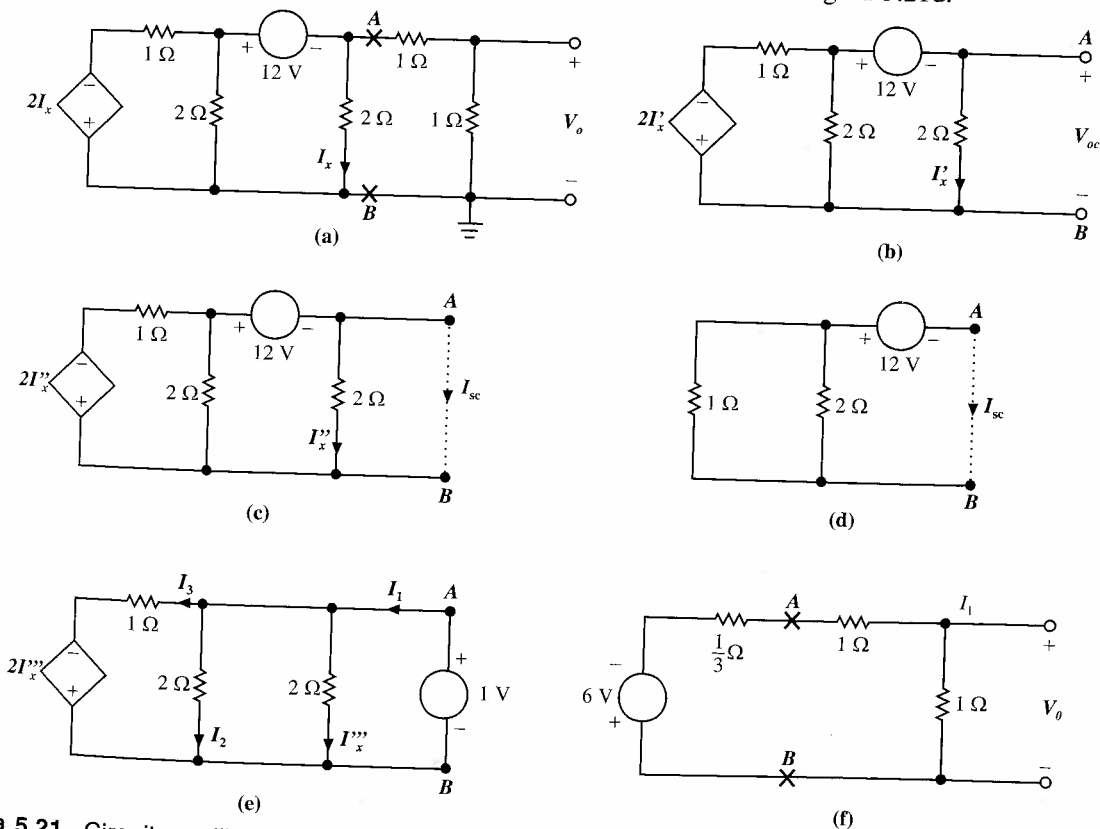


Figura 5.21 Circuitos utilizados no Exemplo 5.16.



Portanto,

$$\begin{aligned} I_{sc} &= \frac{-12}{\frac{2}{3}} \\ &= -18 \text{ A} \end{aligned}$$

Usando então a Equação 5.12, tem-se

$$\begin{aligned} R_{Th} &= \frac{V_{oc}}{I_{sc}} \\ &= \frac{1}{3} \Omega \end{aligned}$$

A  $R_{Th}$  pode também ser calculada empregando-se uma fonte externa, como mostrado na Figura 5.21e. As correntes de ramo nessa rede podem ser imediatamente determinadas como

$$\begin{aligned} I_x''' &= \frac{1}{2} \text{ A} \\ I_2 &= \frac{1}{2} \text{ A} \\ I_3 &= \frac{1 - (-2I_x''')}{1} \\ &= 2 \text{ A} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_1 &= I_x''' + I_2 + I_3 \\ &= 3 \text{ A} \end{aligned}$$

e, desse modo,

$$R_{Th} = \frac{1}{3} \Omega$$

Finalmente, conectando o circuito equivalente de Thévenin nos terminais A-B de volta ao restante do circuito original e tendo o cuidado de não esquecer a polaridade, obtemos a rede da Figura 5.21f. A partir dessa rede obtemos

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{-6}{2 + \frac{1}{3}} (1) \\ &= \frac{18}{7} \text{ V} \end{aligned}$$

Note que essa resposta é a mesma que obtivemos no Exemplo 4.12. ■

### Exemplo 5.17

Desejamos determinar  $V_o$  na rede da Figura 5.22a.

Se desconectarmos a rede nos pontos A-B, a tensão do circuito aberto pode ser calculada do circuito da Figura 5.22b. A corrente de malha  $I_o$  pode ser determinada a partir da equação LKT

$$(I_o - 2V_A')(1) + \frac{1}{2} I_o + 1I_o = 6$$

onde

$$V_A' = \frac{I_o}{2}$$

e, portanto,

$$V_{oc} = 4 \text{ V}$$

A  $R_{Th}$  pode ser determinada a partir da Figura 5.22c. A equação LKC para o nó marcado  $V_1$  é

$$\frac{V_1}{1} + \frac{V_1 - 1}{\frac{1}{2}} = 2V_A''$$

onde

$$V_A'' = V_1 - 1$$

Resolvendo-se as equações para  $V_A$ , tem-se  $V_A = -1$  V. Portanto,  $I_2 = 2$  A, e uma vez que  $I_3 = 1$  A,

$$\begin{aligned} I_0 &= I_2 + I_3 \\ &= 3 \text{ A} \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$R_{Th} = \frac{1}{3} \Omega$$

Conectando o circuito equivalente de Thévenin de volta ao restante da rede original, como mostrado na Figura 5.22d, achamos que  $V_o = 12/7$  V. Note que este é o mesmo valor obtido no Exemplo 4.10. ■

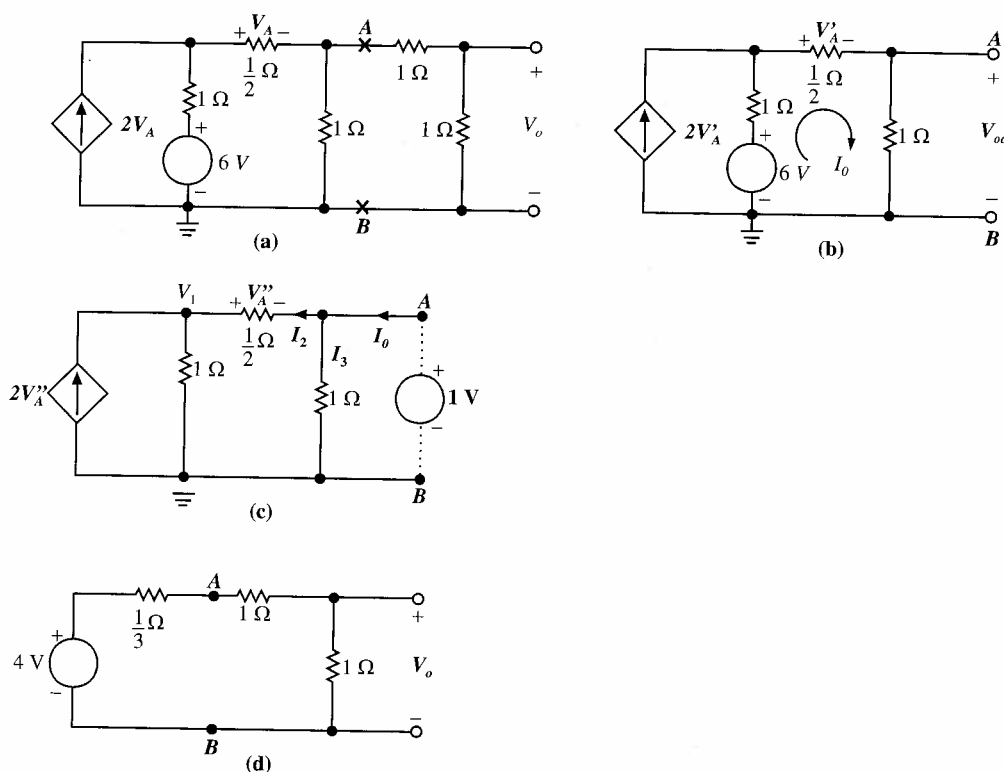


Figura 5.22 Circuitos usados no Exemplo 5.17.

### Exercícios

E5.17 Ache o circuito equivalente de Thévenin nos terminais A-B para a rede da Figura E5.17.

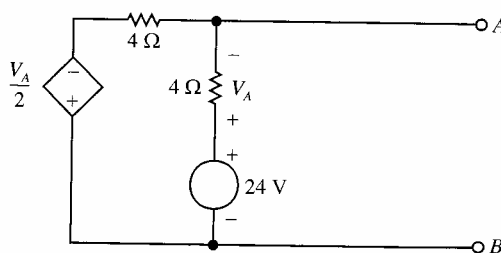
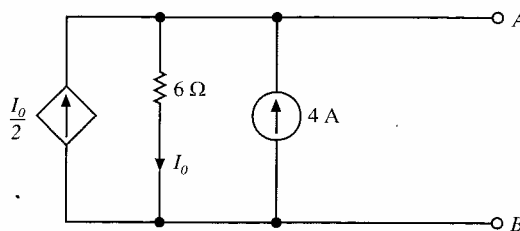


Figura E5.17

Resp.:  $V_{oc} = 8$  V,  $R_{Th} = 8/3 \Omega$ .

**E5.18** Ache o circuito equivalente de Thévenin nos terminais A-B para a rede da Figura E5.18.



**Figura E5.18**

**Resp.:**  $V_{oc} = 48 \text{ V}$ ,  $R_{Th} = 12 \Omega$ .

É importante, a esta altura, que mais uma vez o leitor se lembre que todos os tipos de recursos eletrônicos são modelados com fontes dependentes, e portanto as análises aqui são similares às aquelas envolvidas tanto na análise como no projeto de circuitos eletrônicos. Além disso, é interessante notar que na medida em que sistematicamente reduzimos uma rede usando transformações de fonte, na realidade estamos usando alternadamente os equivalentes de Thévenin e Norton.

## 5.2 Transferência Máxima de Potência

Na análise de circuitos, algumas vezes estamos interessados em determinar a potência máxima que pode ser fornecida a uma carga. Ao usar o teorema de Thévenin, podemos determinar a potência máxima que um circuito consegue fornecer e o modo como ajustar a carga para efetuar uma transferência máxima de potência.

Suponhamos que nos foi dado o circuito mostrado na Figura 5.23. A potência que é fornecida à carga é dada pela expressão

$$\begin{aligned} P_{\text{carga}} &= i^2 R_L \\ &= \left( \frac{v}{R + R_L} \right)^2 R_L \end{aligned}$$

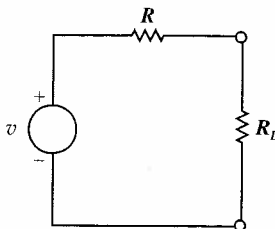
Queremos determinar o valor de  $R_L$  que maximize esse valor. Dessa forma, diferenciamos essa expressão em relação à  $R_L$  e fazemos a derivada zero.

$$\frac{dP_{\text{carga}}}{dR_L} = \frac{(R + R_L)^2 v^2 - 2v^2 R_L (R + R_L)}{(R + R_L)^4}$$

que produz

$$R_L = R$$

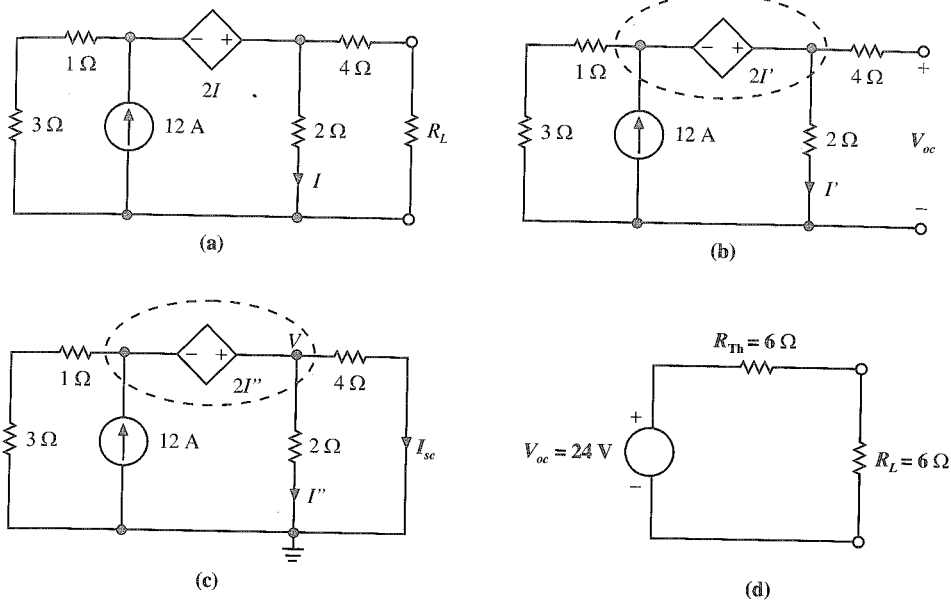
Em outras palavras, a transferência máxima de potência se dá quando a resistência da carga  $R_L = R$ . Apesar de este ser um resultado importante, ele foi obtido usando a rede simples da Figura 5.23. No entanto, deveríamos lembrar que  $v$  e  $R$  na Figura 5.23 poderiam representar o circuito equivalente de Thévenin para qualquer rede linear.



**Figura 5.23** Circuito equivalente para examinar transferência máxima de potência.

**Exemplo 5.18**

Vamos determinar o valor de  $R_L$  para a transferência máxima de potência na rede da Figura 5.24a. Depois de acharmos o valor de  $R_L$ , acharemos a potência máxima que pode ser transferida para essa carga.



**Figura 5.24** Circuito exemplo para determinar transferência máxima de potência.

Se desconectarmos a rede na carga, obtemos o circuito mostrado na Figura 5.24b. A esta altura é importante notar que temos uma outra rede, e portanto todas as técnicas que aprendemos podem ser aplicadas para resolvê-la. Note que podemos formar um supernó em volta da fonte dependente. A tensão em relação ao nó de referência no terminal positivo da fonte dependente é  $V_{oc}$ , e portanto a tensão em relação ao nó de referência no terminal negativo da fonte dependente é  $V_{oc} - 2I'$ . A LKC aplicada ao supernó é

$$\frac{V_{oc} - 2I'}{4} - 12 + \frac{V_{oc}}{2} = 0$$

onde

$$I' = \frac{V_{oc}}{2}$$

Resolvendo essas equações, tem-se

$$V_{oc} = 24 \text{ V}$$

A  $I_{sc}$  pode ser derivada de modo semelhante usando-se a rede da Figura 5.24c. A LKC para o supernó é

$$\frac{V - 2I''}{4} - 12 + \frac{V}{2} + \frac{V}{4} = 0$$

onde

$$I'' = \frac{V}{2}$$

Portanto,

$$V = 16 \text{ V}$$

e, desse modo,

$$I_{sc} = \frac{V}{4} = 4 \text{ A}$$

A resistência equivalente de Thévenin é então

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{24}{4} = 6 \Omega$$

A rede equivalente de Thévenin é mostrada na Figura 5.24d, e dessa forma a potência máxima transferida para a carga é

$$P_L = \left( \frac{24}{6+6} \right)^2 (6) = 24 \text{ W}$$

### Exercícios

**E5.19** Na rede da Figura E5.19, determine  $R_L$  para transferência máxima de potência e potência máxima dissipada pela carga.

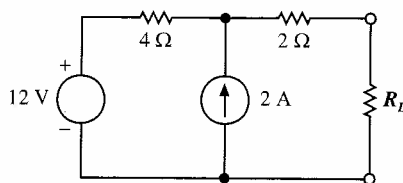


Figura E5.19

*Resp.:*  $R_L = 6 \Omega$ ,  $P_L = 50/3 \text{ W}$ .

**E5.20** Na rede da Figura E5.20, determine  $R_L$  para transferência máxima de potência e potência máxima dissipada pela carga.

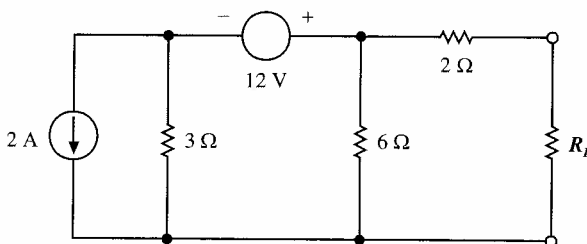


Figura E5.20

*Resp.:*  $R_L = 4 \Omega$ ,  $P_L = 1 \text{ W}$ .

À medida que avançarmos com o texto, introduziremos continuamente novos comandos PSPICE apropriados que expandirão nossa capacidade. O primeiro comando desse tipo é o .MODEL.

O comando .MODEL define um conjunto de parâmetros que pode ser referenciado pelos elementos passivos ou ativos do circuito. O formato geral do comando é o seguinte:

.MODEL <name> <type> (<parameter name>=<value>)

<name> é o nome do modelo que o recurso usa para referenciar o modelo. <type> é o tipo do recurso. Alguns tipos de recursos válidos são RES, CAP, IND, D, e NPN para resistor, capacitor, indutor, diodo e transistor bipolar NPN, respectivamente. O <parameter name> e <value> são opcionais. Seu significado depende do tipo do recurso especificado.

O comando .MODEL é usado em conjunto com o comando .DC, e uma declaração permite o circuito a ser analisado para valores específicos do recurso dentro de um intervalo específico. Por exemplo, os seguintes comandos PSPICE

```
RL 3 0 RMOD 5
.MODEL RMOD RES (R=1)
.DC RES RMOD (R) 4 10 2
```

executam um conjunto de análise dc no circuito com um valor diferente de  $R_L$  para cada análise. O primeiro comando mostra que o resistor  $R_L$  está conectado entre os nós 3 e 0, possui um valor de 5 ohms e usa o modelo RMOD para descrever ainda mais suas características. O segundo comando mostra que RMOD é um modelo do tipo RES, ou resistor, e tem um fator de escala,  $R$ , de 1. O fator de escala é usado para ajustar o valor declarado de qualquer resistor usando o modelo, RMOD. O terceiro comando usa 'RES RMOD(R)' no lugar do nome da variável de fonte. Esse último comando provoca uma análise de varredura dc para ser executada no circuito variando todos os resistores empregando RMOD. A variável a ser varrida dentro da faixa especificada é dada entre parênteses. Nesse caso, a variável de ajuste,  $R$ , deve ser varrida de 4 a 10 usando-se um incremento de 2. A primeira análise dc é executada com  $R_L$  igual a 20 ohms; a segunda análise é executada com  $R_L$  igual a 30 ohms; e assim por diante. A análise final é executada com  $R_L$  igual a 50 ohms.

Veja Referência [2] para maiores informações sobre cada um desses comandos.

Iremos agora usar os comandos .MODEL e .PROBE para gerar um gráfico no contexto de um problema de transferência máxima de potência.

### Exemplo 5.19

Aplicaremos PSPICE na rede da Figura 5.25 para determinar o valor de  $R_L$  necessário para obter transferência máxima de potência e potência máxima dissipada pela carga. O programa PSPICE para esse problema é

```

MAXIMUM POWER TRANSFER EXERCISE 2
V1 1 0 DC 12
I1 2 0 DC 2
R1 1 2 2
R2 2 0 2
R3 2 3 2
RL 3 0 RMOD 1
.MODEL RMOD RES (R=1)
.DC RES RMOD (R) 1 10 1
.PROBE
.END

```

Para determinar o valor de  $R_L$  para o qual a transferência máxima de potência é alcançada, o valor de  $R_L$  será aumentado de 1 ohm até 10 ohms em incrementos de 1 ohm. Isto é realizado com os seguintes comandos:

```

RL 3 0 RMOD 1
.MODEL RMOD RES (R=1)
.DC RES RMOD (R) 1 10 1

```

O resistor,  $R_L$ , é declarado para usar o modelo, RMOD, e ter um valor de 1 ohm. O comando .MODEL declara o modelo, RMOD, ser do tipo RES com um fator de escala de 1 ( $R = 1$ ). O comando .DC executa uma série de análises dc no circuito, aumentando o valor de escala,  $R$ , de 1 a 10 em incrementos de 1 para cada análise. Uma vez que a resistência efetiva de  $R_L$  é o valor de  $R_L$  (1 ohm) multiplicado pelo fator de escala,  $R$ , a resistência efetiva de  $R_L$  muda de 1 ohm para 10 ohms em incrementos de 1 ohm para cada análise.

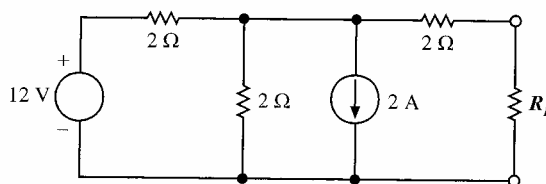


Figura 5.25 Circuito exemplo de PSPICE.

Os resultados são representados traçando um gráfico do valor da potência dissipada por  $R_L$  como uma função do valor efetivo de  $R_L$ . No PSPICE, o programa Probe é executado ao término de toda análise dc. A tela apresenta um gráfico acima da linha de menu. A opção 'Add\_trace' aparece em realce. Pressione 'Enter'. Digite 'I(RL)\*V(3)' e pressione a tecla 'Enter' como resposta da 'Enter variables or expressions'

*prompt.* A curva da potência absorvida por  $R_L$ , corrente através de  $R_L$  multiplicada pela tensão sobre  $R_L$ , aparece na tela. O ponto de potência máxima pode então ser obtido a partir da curva. Ele acontece em  $R$  igual a 3. Uma vez que o valor inicial de  $R_L$  é 1 ohm, o valor de  $R_L$  para a transferência máxima de potência é 1 ohm multiplicado por um fator de escala de 3. Logo, transferência máxima de potência ocorre em  $R_L$  igual a 3 ohms, como mostrado na Figura 5.26. Uma cópia impressa pode ser obtida usando-se as setas até que a opção 'Hardcopy' apareça em realce. Pressione 'Enter'. O usuário pode então sair do programa, selecionando a opção 'Exit' do menu do mesmo modo descrito acima.

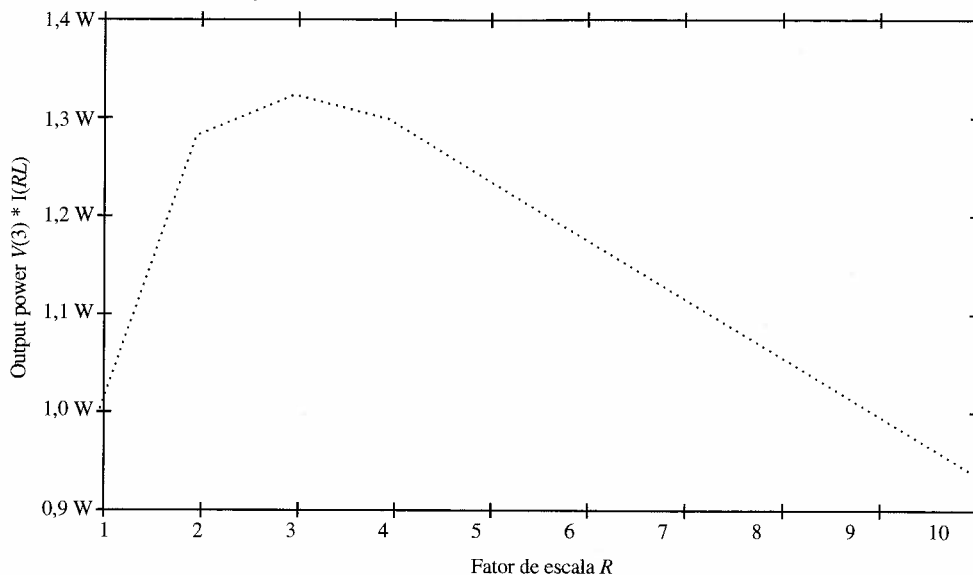


Figura 5.26 Curva de transferência de potência para a rede do Exemplo 5.19.

### 5.3 Análise de Sensibilidade

No decorrer da análise de um circuito, frequentemente é útil saber como a variação de um componente do circuito em particular afetará uma tensão do circuito em particular. Essa relação pode ser expressa como "sensibilidade" de um parâmetro com respeito a outro. Matematicamente, essa relação pode ser expressa como uma derivada da função tensão em relação ao parâmetro de interesse. Por exemplo, considere a rede de divisão de tensão mostrada na Figura 5.27. A tensão de saída pode ser expressa como

$$V_{out} = \frac{(V_{in})(R_2)}{R_1 + R_2}$$

A sensibilidade da tensão  $V_{out}$  em relação ao resistor  $R_2$  é expressa como a seguinte função derivada:

$$\frac{dV_{out}}{dR_2} = \frac{d}{dR_2} \left[ \frac{(V_{in})(R_2)}{R_2 + R_1} \right] = \frac{(V_{in})(R_1)}{(R_2 + R_1)^2}$$

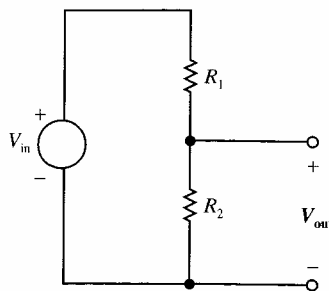


Figura 5.27 Rede simples de divisor de tensão.

Para  $V_{in} = 1\text{ V}$ ,  $R_1 = 3\Omega$  e  $R_2 = 1\Omega$ , ela corresponde a um valor de  $3/16\text{ V}/\Omega$ . Um ponto importante a ser lembrado é que a derivada é uma função muito localizada. Em outras palavras, o cálculo da sensibilidade é verdadeiro somente para pequenas variações dos valores do componente de interesse. Por exemplo, se  $R_2$  é acrescido de  $2\Omega$ , para  $3\Omega$ , o valor real de  $V_{out}$  será  $\frac{3}{6}$  ou  $0,5\text{ V}$ . O cálculo da sensibilidade prevê um aumento em  $V_{out}$  de  $2(3/16)\text{ V}$  ou  $0,38\text{ V}$ . Isto, somado ao valor inicial de  $0,25\text{ V}$ , produz um valor final de  $0,68\text{ V}$ . Obviamente, esse dado não é muito próximo do valor real de  $0,5\text{ V}$ . Se, no entanto,  $R_1$  for acrescido de somente  $0,1\Omega$ , para  $1,1\Omega$ , o cálculo da sensibilidade produz um valor  $V_{out}$  de  $0,269\text{ V}$ , enquanto o valor real seria  $0,268\text{ V}$ , um resultado bastante próximo.

Mesmo com a limitação anteriormente mencionada, cálculos de sensibilidade freqüentemente produzem resultados importantes no projeto de circuitos. Em um circuito complexo, é normalmente difícil prever como a variação de um componente em particular afetará algum outro parâmetro do circuito. Calculando-se a sensibilidade para os vários componentes de interesse, pode-se extrair uma medida quantitativa (um número) da habilidade de se manipular um dado parâmetro. Comparando-se as magnitudes relativas das sensibilidades calculadas, pode-se delinear uma estratégia para a manipulação eficiente dos vários parâmetros do circuito.

Infelizmente, o cálculo das sensibilidades pode ser trabalhoso mesmo para circuitos consideravelmente simples. No entanto, com o PSPICE anteriormente introduzido podemos gerar tais sensibilidades para um circuito completo com um esforço mínimo da parte do engenheiro.

Sensibilidade pode ser computada usando-se o seguinte comando de controle:

```
.SENS OV1 OV2 ... OVN
```

Por meio do uso desse comando, o PSPICE determinará as sensibilidades dc pequeno-sinal de cada variável de saída, OV1 ... OVN, em relação a todos os parâmetros do circuito.

A seguir temos uma análise PSPICE do divisor de tensão discutido acima.

```
SENSITIVITY ANALYSIS OF SIMPLE VOLTAGE DIVIDER
VIN 1 0 DC 1
R1 1 2 3
R2 2 0 1
*PRINT DC SENSITIVITY OF V(2) TO ALL COMPONENTS
.SENS V(2)
.END
```

DC SENSITIVITIES OF OUTPUT V(2)

| ELEMENT<br>NAME | ELEMENT<br>VALUE | ELEMENT<br>SENSITIVITY<br>VOLTS/UNIT) | NORMALIZED<br>SENSITIVITY<br>VOLTS/PERCENT) |
|-----------------|------------------|---------------------------------------|---------------------------------------------|
| R1              | 3.000E+00        | -6.250E-02                            | -1.875E-03                                  |
| R2              | 1.000E+00        | 1.875E-01                             | 1.875E-03                                   |
| VIN             | 1.000E+00        | 2.500E-01                             | 2.500E-03                                   |

A coluna 'element sensitivity' é a sensibilidade como calculada acima. A sensibilidade normalizada é a sensibilidade do elemento multiplicada pelo valor do elemento e dividida por 100 (para se ter o percentual). Note que as sensibilidades de todos os elementos foram calculadas. Para circuitos complexos, a saída pode ser bastante trabalhosa de se obter.

### Exemplo 5.20

Use PSPICE para calcular a sensibilidade da tensão de saída para cada um dos elementos do circuito para o circuito da Figura 5.28a. Use  $R_1 = 1\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 500\Omega$ ,  $R_3 = 500\Omega$ ,  $R_4 = 10\text{ k}\Omega$  e  $V_{in} = 1\text{ V}$ .

O circuito equivalente marcado para o PSPICE está mostrado na Figura 5.28b. Usando esse circuito equivalente, foi feita a análise PSPICE, e os seguintes resultados são obtidos:



## OP AMP SENSITIVITY CALCULATION

V1 1 0 1

EOUT 4 0 2 0 -10000

R1 1 2 1K

R2 2 3 500

R3 3 4 500

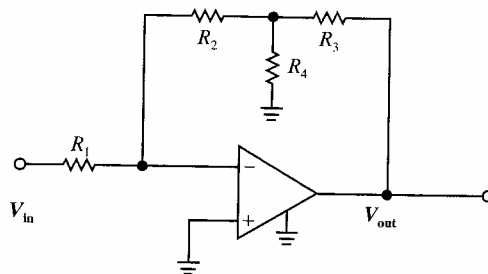
R4 3 0 10K

.SENS V(4)

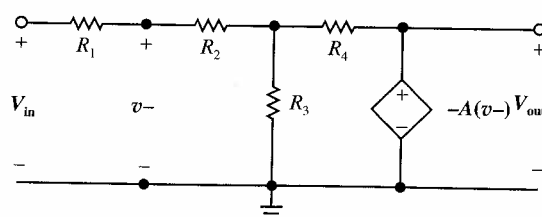
.END

DC SENSITIVITIES OF OUTPUT V(4)

| ELEMENT<br>NAME | ELEMENT<br>VALUE | ELEMENT<br>SENSITIVITY<br>(VOLTS/UNIT) | NORMALIZED<br>SENSITIVITY<br>(VOLTS/UNIT) |
|-----------------|------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------|
| R1              | 1.000E+03        | 1.025E-03                              | 1.025E-02                                 |
| R2              | 5.000E+02        | -1.050E-03                             | -5.248E-03                                |
| R3              | 5.000E+02        | -1.050E-03                             | -5.248E-03                                |
| R4              | 1.000E+04        | 2.499E-06                              | 2.499E-04                                 |
| V1              | 1.000E+00        | -1.025E +00                            | -1.025E-02                                |



(a)



(b)

Figura 5.28 Circuitos usados no Exemplo 5.19.

Se for necessário fazer um ajuste fino da tensão de saída, note que  $R_4$  é o melhor resistor a fim de ajustar para se estabelecer a tensão de saída. Isto é verdade desde que a tensão de saída seja o menos sensível possível a tal componente.

## 5.4 Resumo

Apresentamos neste capítulo certo número de ferramentas poderosas que têm ampla aplicação na análise de circuitos. Especificamente falando, introduzimos o princípio da superposição, que está baseado na linearidade e nos permite tratar cada fonte independentemente e então somar algebricamente a resposta devida a cada uma delas para determinar a resposta total. Também mostramos que a transformação de fonte e os teoremas de Thévenin e Norton nos permitem frequentemente simplificar a análise de circuito pela resolução de uma série de problemas simples em vez de um mais complicado. O conceito de transferência máxima de potência de uma rede para uma carga resistiva foi apresentado.

Finalmente, introduzimos o conceito de sensibilidade, que nos dá uma informação importante que será de utilidade no projeto e na operação de uma rede.

### Pontos-Chave

- Em uma rede linear contendo múltiplas fontes independentes, o princípio da superposição nos permite calcular qualquer corrente ou tensão da rede como a soma algébrica das contribuições individuais de cada fonte agindo individualmente.
- Superposição é uma propriedade linear e não se aplica a funções não-lineares tais como a de potência elétrica.
- A transformação de fonte nos permite trocar uma fonte de tensão  $V$  em série com o resistor  $R$  por uma fonte de corrente  $I = V/R$  em paralelo com o resistor  $R$ . O inverso é também verdade.
- Usando-se o teorema de Thévenin, podemos substituir parte de uma rede por uma fonte de tensão  $V_{oc}$  em série com um resistor  $R_{Th}$ .  $V_{oc}$  é a tensão do circuito aberto nos terminais e  $R_{Th}$  é a resistência equivalente de Thévenin obtida examinando-se os terminais com todas as fontes independentes feitas zero.
- Usando-se o teorema de Norton, podemos substituir parte de uma rede por uma fonte de corrente  $I_{sc}$  em paralelo com um resistor  $R_{Th}$ .  $I_{sc}$  é a corrente de curto-circuito nos terminais e  $R_{Th}$  é a resistência equivalente de Thévenin.
- Transferência máxima de potência pode ser alcançada, selecionando-se a carga  $R_L$  para ser igual a  $R_{Th}$  examinando-se os terminais da carga.
- A sensibilidade de  $X$  em relação a  $Y$  nos diz como variações em  $Y$  afetam  $X$ .

### Problemas

- 5.1 Determine  $I_o$  na rede da Figura P5.1. Use linearidade e assumamos que  $I_o = 1$  A.

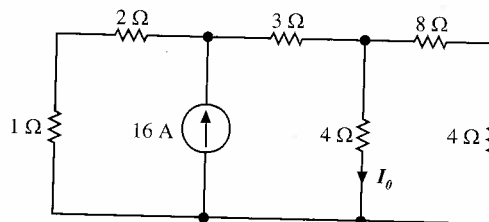


Figura P5.1

- 5.2 Determine  $V_o$  na rede da Figura P5.2. Use linearidade e assumamos que  $V_o = 1$  V.

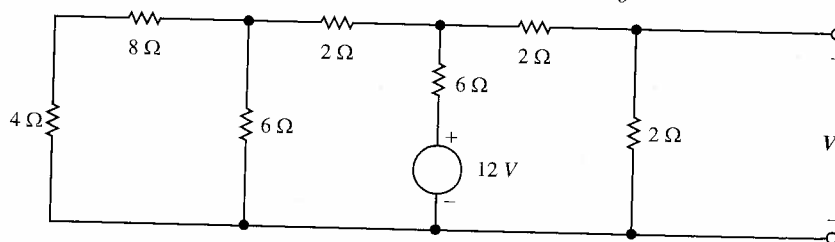


Figura P5.2

- 5.3 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P5.3. Use linearidade e assumamos que  $I_o = 1$  A.

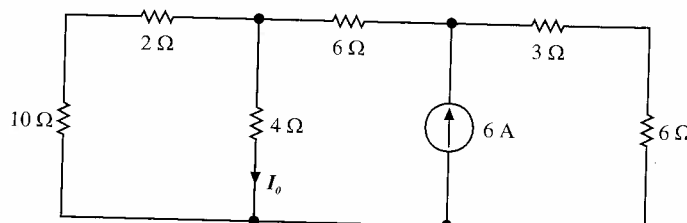


Figura P5.3

- 5.4 Assuma que  $I_o = 1$  A e use linearidade para determinar o valor real de  $I_o$  na Figura P5.4.

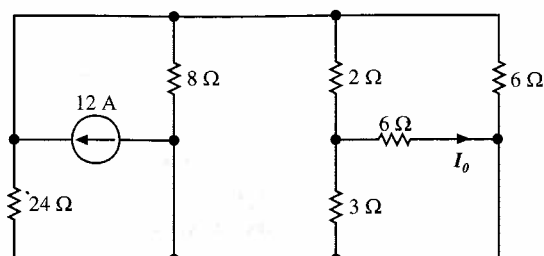


Figura P5.4

- 5.5 Utilize o princípio da superposição para determinar  $V_o$  na Figura P5.5.

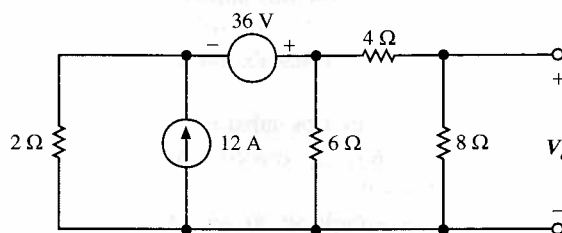


Figura P5.5

- 5.6 Utilize o princípio da superposição para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.6.

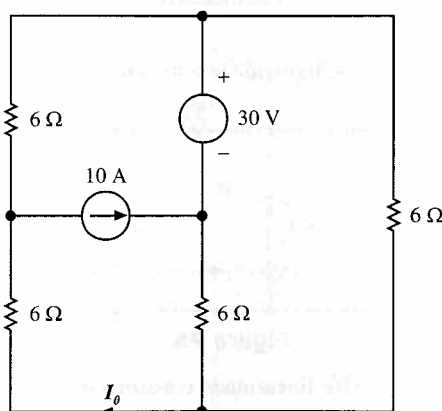


Figura P5.6

- 5.7 Utilize o princípio da superposição para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.7.

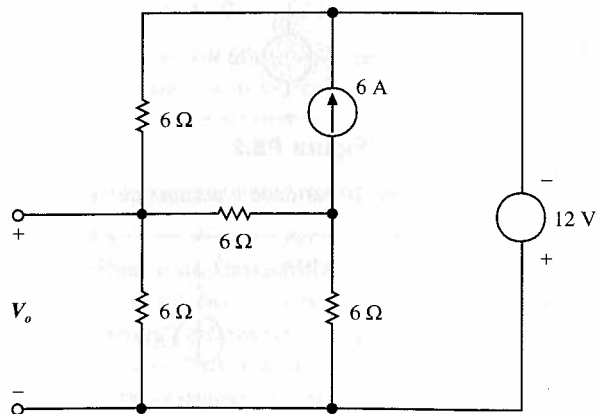


Figura P5.7

- 5.8 Utilize o princípio da superposição para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.8.

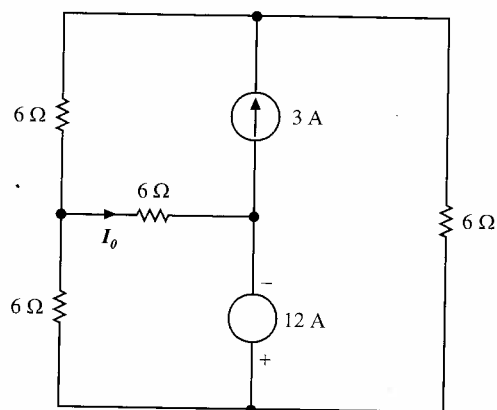


Figura P5.8

- 5.9 Utilize o princípio da superposição para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.9.

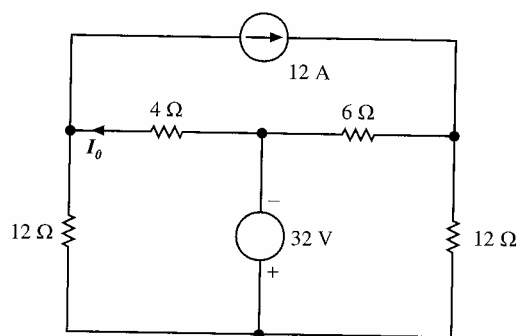


Figura P5.9

- 5.10 Utilize o princípio da superposição para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.10.

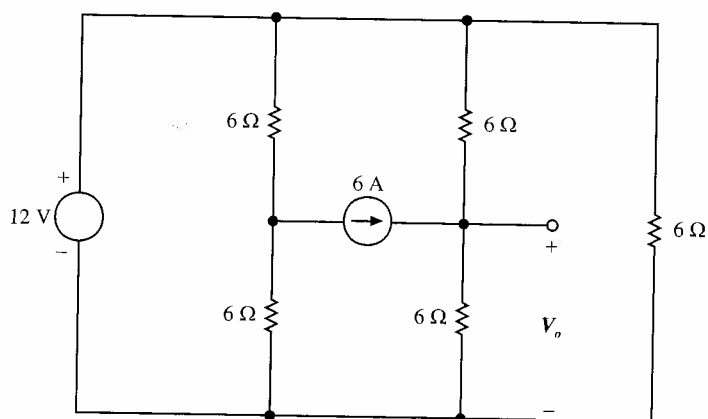


Figura P5.10

5.11 Utilize o princípio da superposição para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.11.

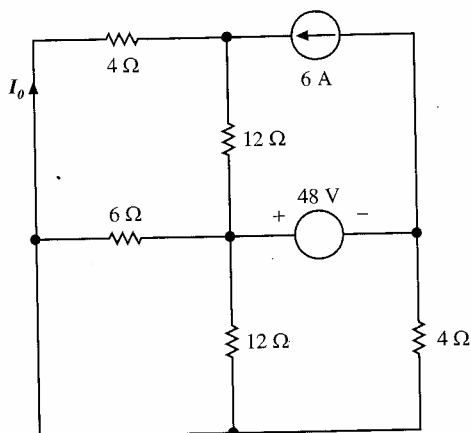


Figura P5.11

5.12 Determinar  $I_o$  e  $V_o$  na rede da Figura P5.12 utilizando o princípio da superposição.

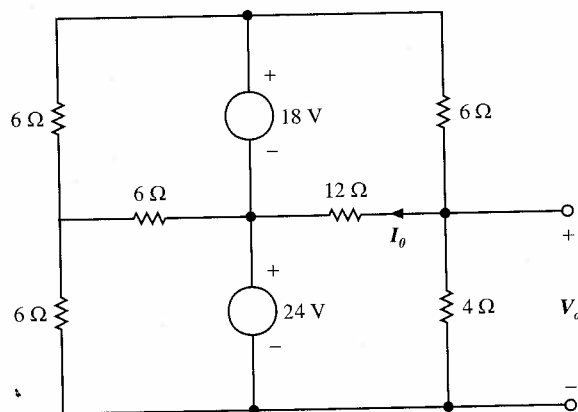


Figura P5.12

5.13 Utilize o princípio da superposição para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.13.

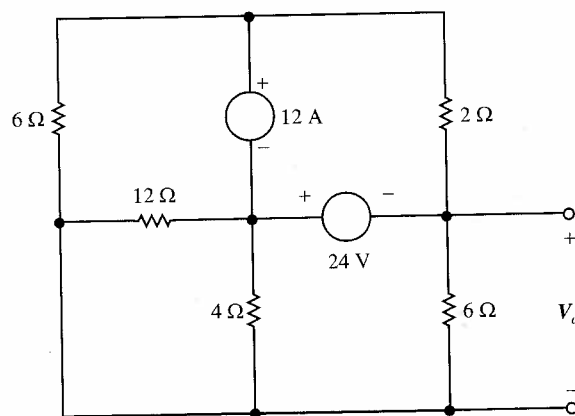


Figura P5.13

- 5.14 Utilize o princípio da superposição para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.14.

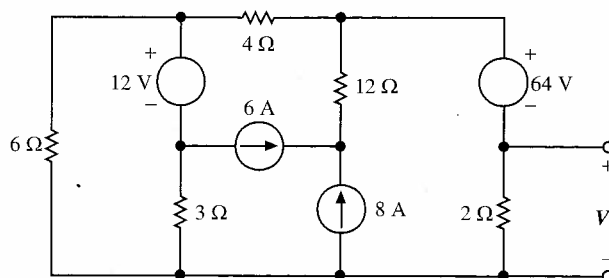


Figura P5.14

- 5.15 Utilizando o princípio da superposição, ache uma expressão para a tensão de saída  $v_o$  no circuito mostrado na Figura P5.15.

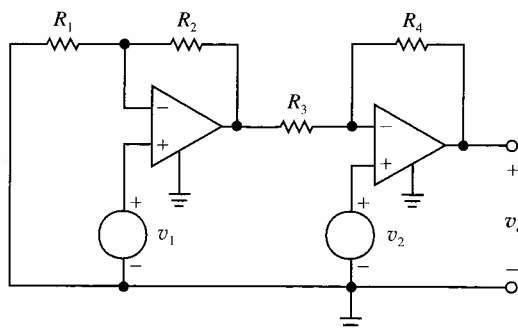


Figura P5.15

- 5.16 Efetue uma transformação de fonte para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.16.

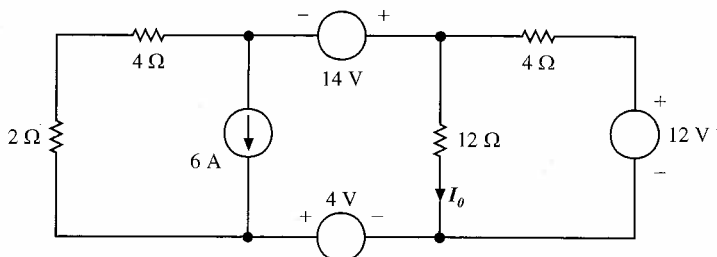


Figura P5.16

- 5.17 Efetue uma transformação de fonte para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.17.

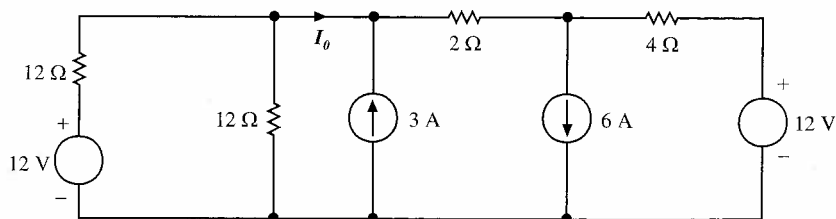


Figura P5.17

- 5.18 Efetue uma transformação de fonte para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.18.

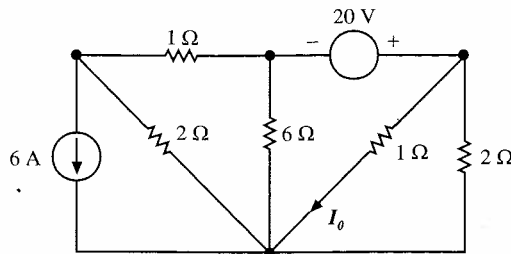


Figura P5.18

- 5.19 Efetue uma transformação de fonte para determinar  $I_o$  no circuito da Figura P5.19.

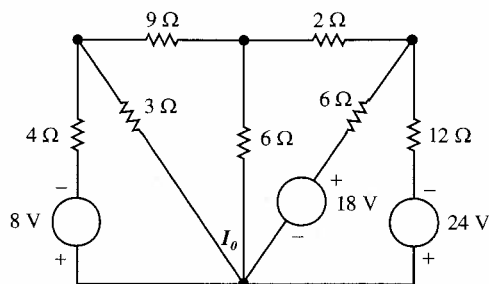


Figura P5.19

- 5.20 Efetue uma transformação de fonte para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.20.

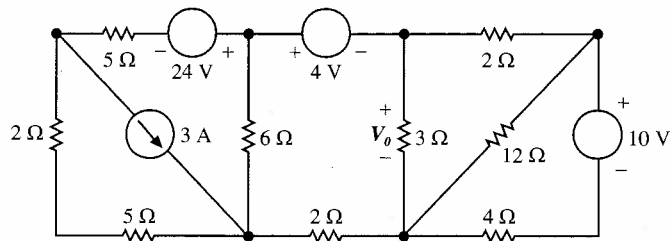


Figura P5.20

- 5.21 Efetue uma transformação de fonte para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.21.

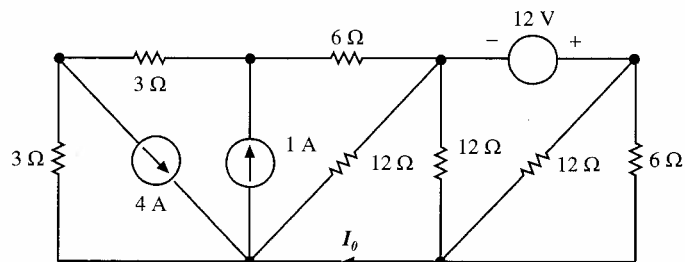


Figura P5.21

- 5.22 Efetue uma transformação de fonte para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.22.

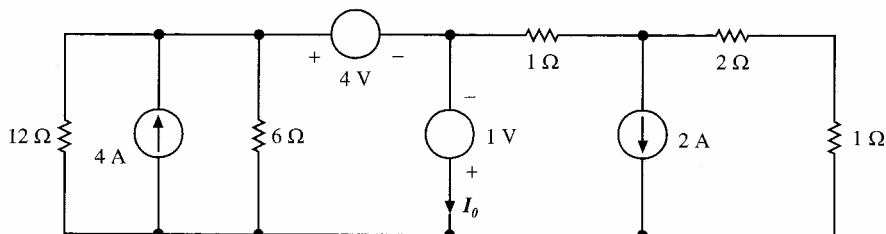


Figura P5.22

- 5.23 Efetue uma transformação de fonte para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.23.

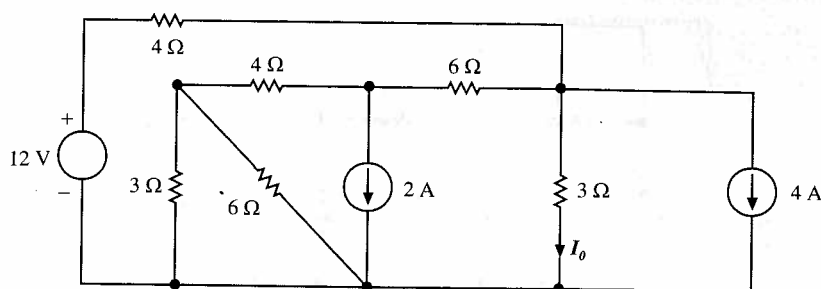


Figura P5.23

- 5.24 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.24.

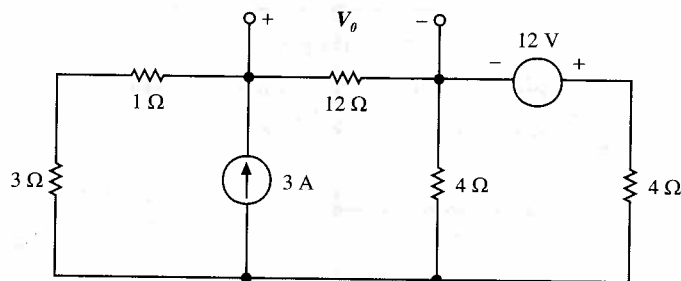


Figura P5.24

- 5.25 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.25.

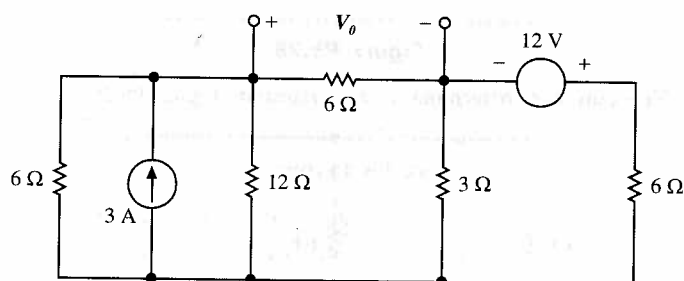


Figura P5.25

- 5.26 Determine  $V_o$  na rede da Figura P5.26 utilizando o teorema de Thévenin.

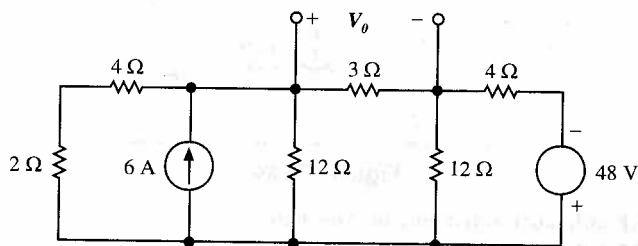


Figura P5.26



- 5.27 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.27.

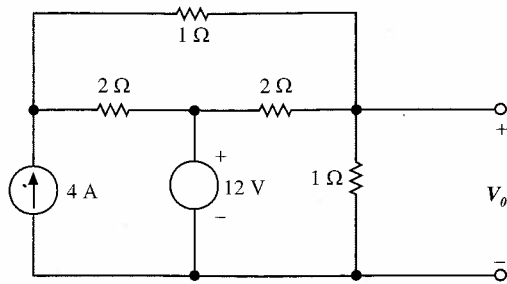


Figura P5.27

- 5.28 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $I_o$  no circuito da Figura P5.28.

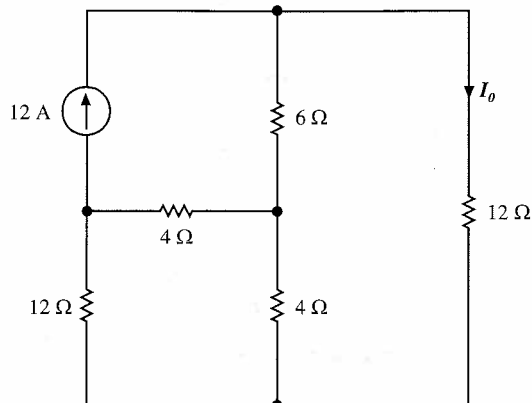


Figura P5.28

- 5.29 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $I_o$  no circuito da Figura P5.29.

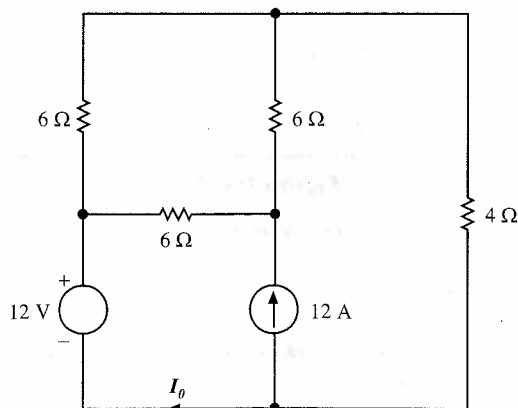


Figura P5.29

- 5.30 Resolva o Problema 5.8 utilizando o teorema de Thévenin.  
 5.31 Resolva o Problema 5.6 utilizando o teorema de Thévenin.

- 5.32 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $I_o$  no circuito da Figura P5.32.

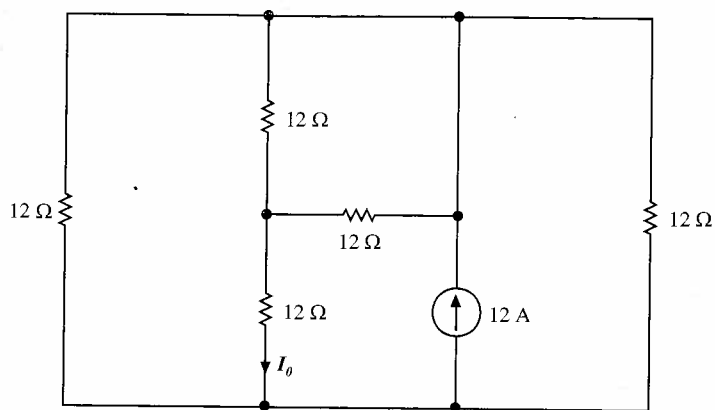


Figura P5.32

- 5.33 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $I_o$  no circuito da Figura P5.33.

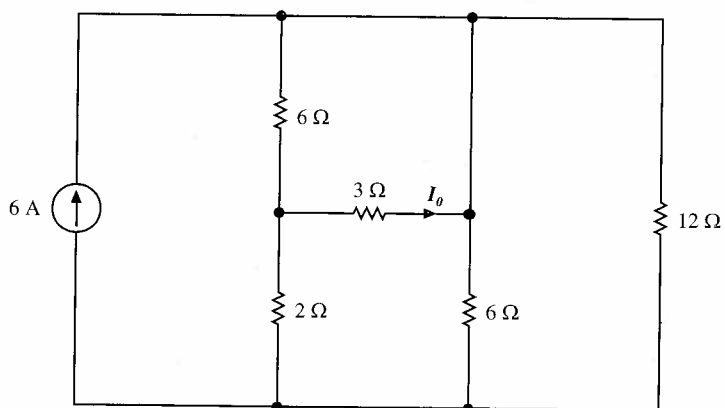


Figura P5.33

- 5.34 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $I_o$  no circuito da Figura P5.34.

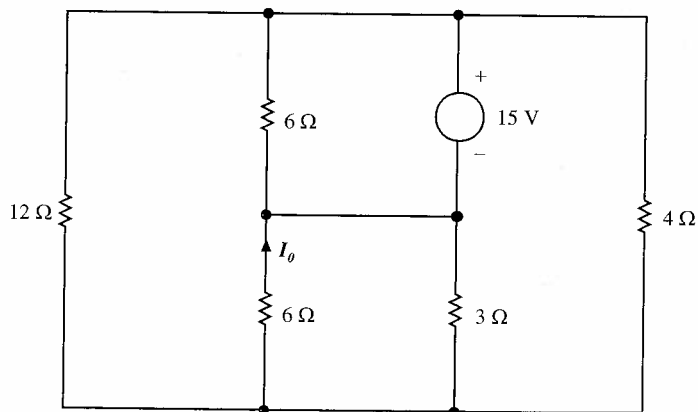


Figura P5.34

5.35 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $I_o$  no circuito da Figura P5.35.

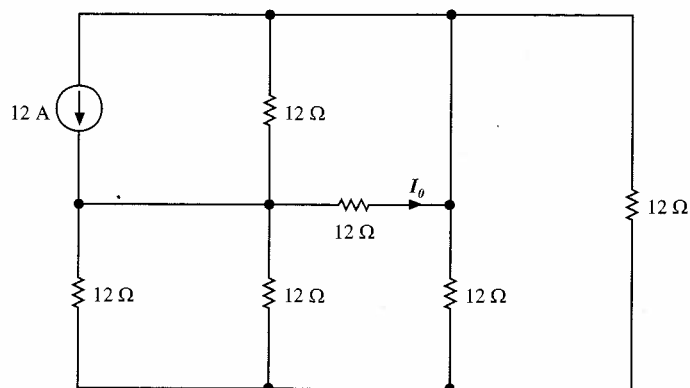


Figura P5.35

5.36 Aplicando o teorema de Thévenin repetidas vezes, determine  $V_o$  na rede da Figura P5.36.

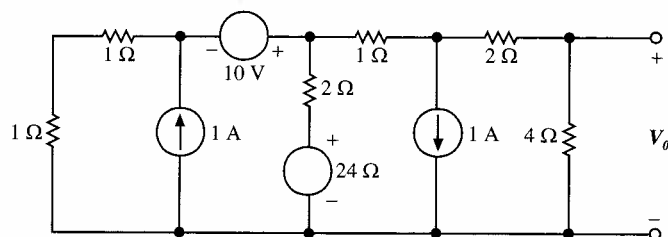


Figura P5.36

5.37 Aplicando o teorema de Thévenin repetidas vezes, determine  $V_o$  na rede da Figura P5.37.

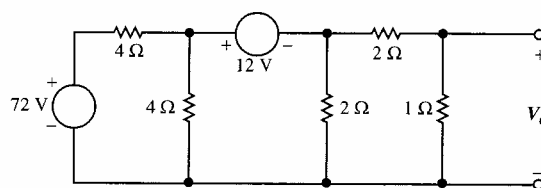


Figura P5.37

5.38 Aplique o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P5.38.

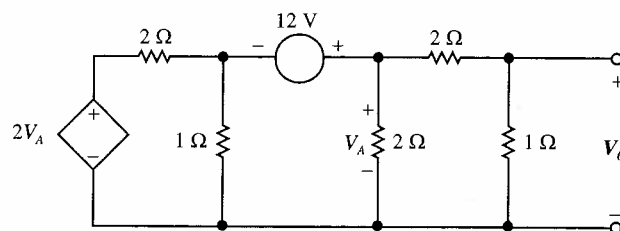


Figura P5.38

5.39 Utilize o teorema de Thévenin para calcular a corrente em  $R_L$  na Figura P5.39.

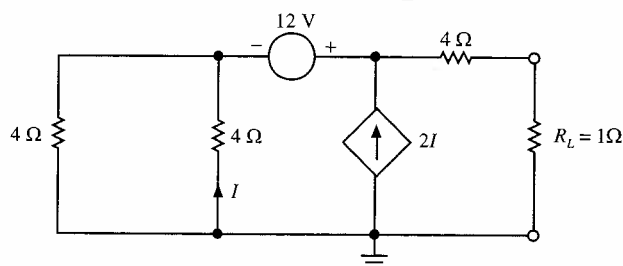


Figura P5.39

5.40 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na Figura P5.40.

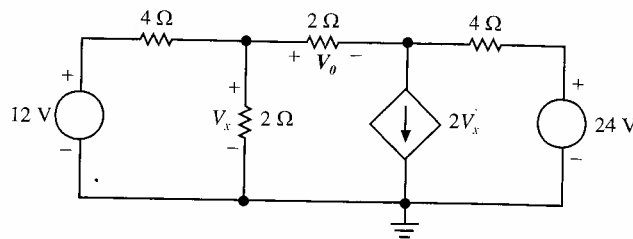


Figura P5.40

5.41 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.41.

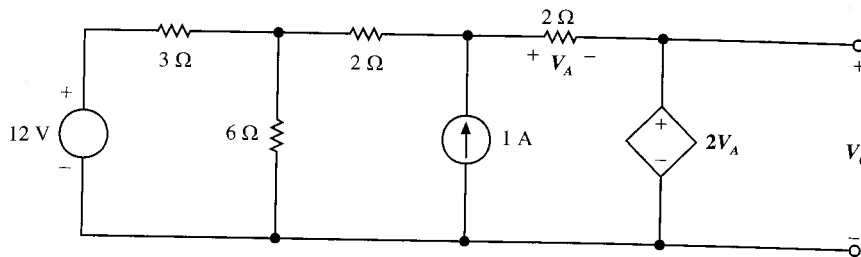


Figura P5.41

5.42 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.42.

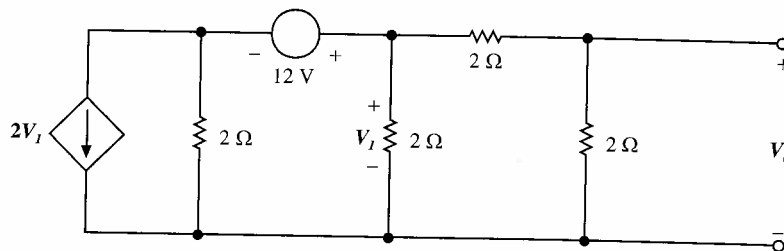


Figura P5.42

5.43 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.43.

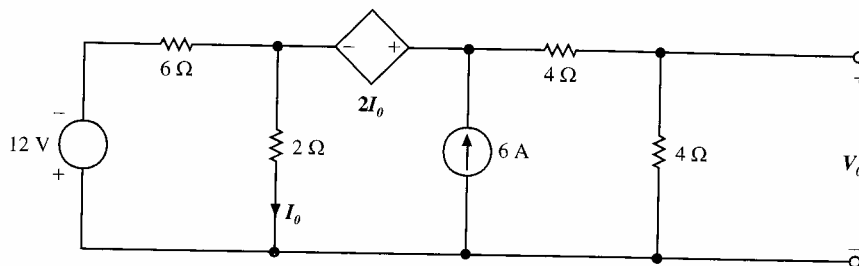


Figura P5.43

5.44 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.44.

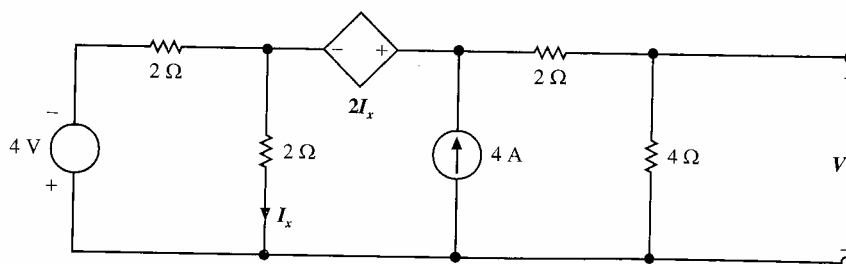


Figura P5.44

- 5.45 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.45.

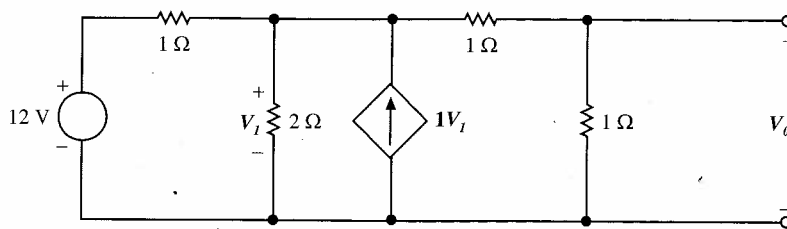


Figura P5.45

- 5.46 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na rede da Figura P5.46.

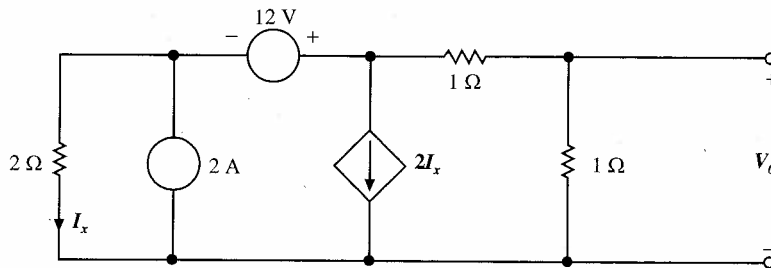


Figura P5.46

- 5.47 Utilize o teorema de Norton para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.47.

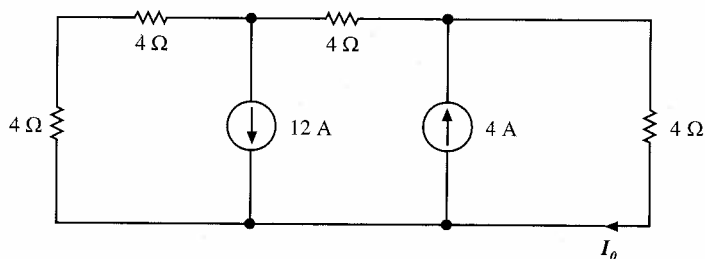


Figura P5.47

- 5.48 Utilize o teorema de Norton para determinar  $I$  na rede da Figura P5.48.

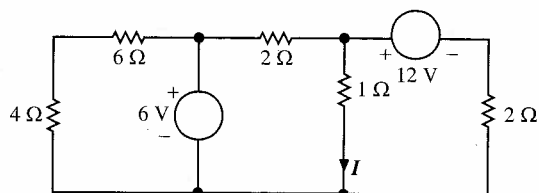


Figura P5.48

- 5.49 Aplique o teorema de Norton para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.49.

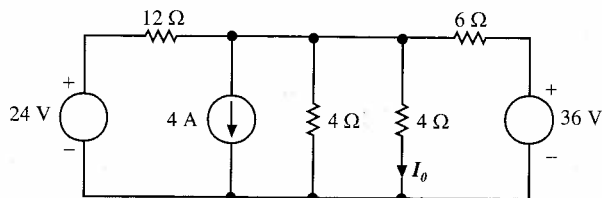


Figura P5.49

- 5.50 Utilize o teorema de Norton para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.50.

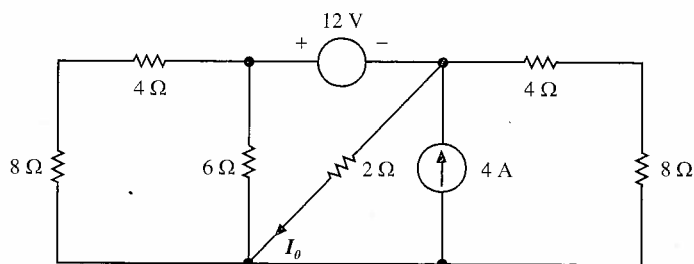


Figura P5.50

- 5.51 Utilize o teorema de Norton para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.51.

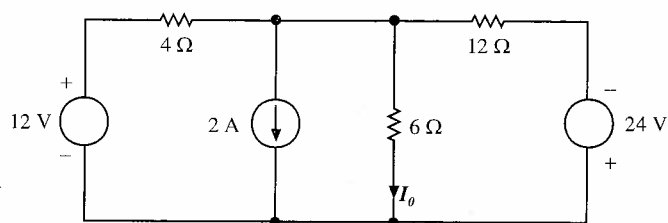


Figura P5.51

- 5.52 Utilize o teorema de Norton para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.52.

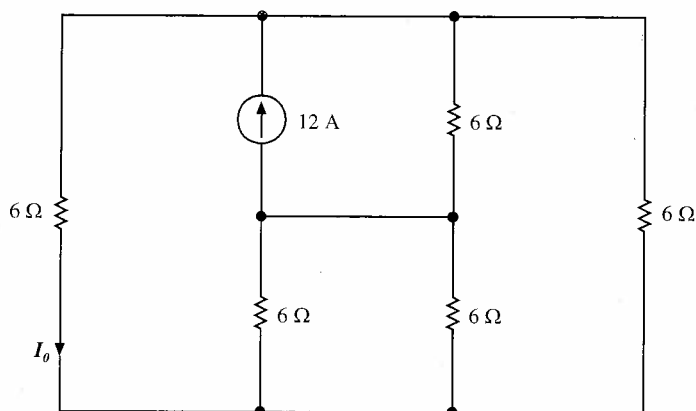


Figura P5.52

- 5.53 Utilize o teorema de Norton para determinar  $I_o$  na rede da Figura P5.53.

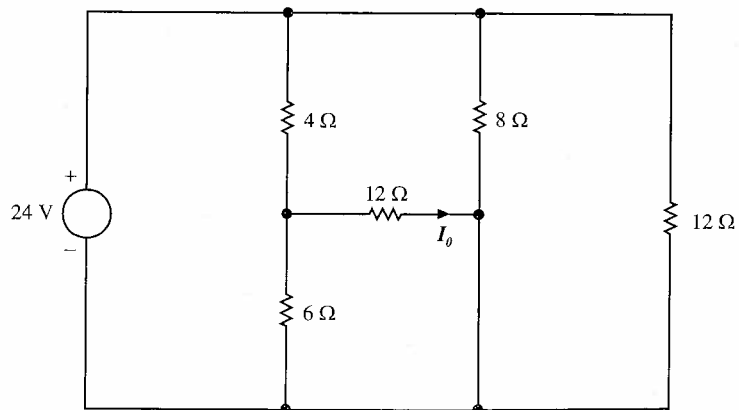


Figura P5.53

- 5.54 Resolva o Problema 5.34 utilizando o teorema de Norton.  
 5.55 Encontre o equivalente de Thévenin na rede da Figura P5.55 nos terminais A-B.

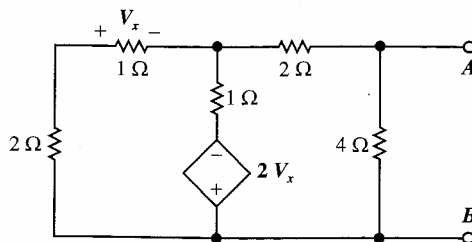


Figura P5.55

- 5.56 Encontre o equivalente de Thévenin na rede da Figura P5.56 nos terminais A-B utilizando uma fonte de corrente de 1 mA.

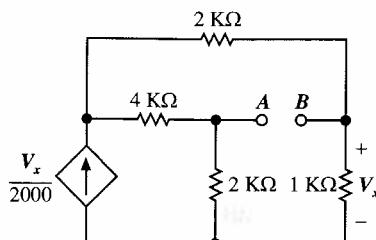


Figura P5.56

- 5.57 Repita o Problema 5.56 utilizando uma fonte de tensão 1 V.  
 5.58 Determine o valor de  $R_L$  na Figura P5.58 para uma transferência máxima de potência.

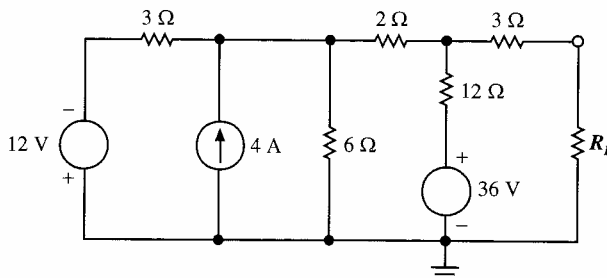


Figura P5.58

- 5.59 No circuito da Figura P5.59, determine  $R_L$  para obter uma transferência máxima de potência e transferir uma potência máxima a  $R_L$ .

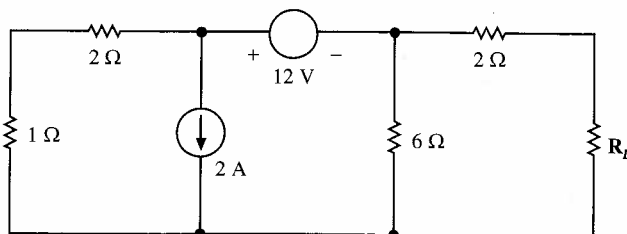


Figura P5.59

- 5.60 Determine o valor de  $R_i$  na Figura P5.60 de modo tal que haja uma transferência máxima de potência para a carga de  $6\ \Omega$ .

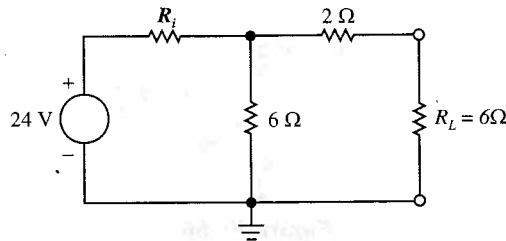


Figura P5.60

- 5.61 Determine o valor de  $R_L$  no Problema 5.39 para obter uma transferência máxima de potência.  
 5.62 Dado o circuito linear da Figura P5.62, é sabido que, quando uma carga de  $2\ \Omega$  é conectada aos terminais A-B, a corrente da carga é  $10\text{ A}$ . Se uma carga de  $10\ \Omega$  for conectada aos terminais, a corrente da carga é de  $6\text{ A}$ . Determine a corrente em uma carga de  $20\ \Omega$ .

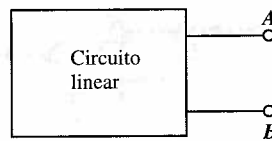


Figura P5.62

- 5.63 Se uma carga de  $8\ \Omega$  for conectada aos terminais da rede da Figura P5.63,  $V_{AB} = 16\text{ V}$ . Se uma carga de  $2\ \Omega$  for conectada aos terminais,  $V_{AB} = 8\text{ V}$ . Determine  $V_{AB}$  caso uma carga de  $20\ \Omega$  seja conectada aos terminais.

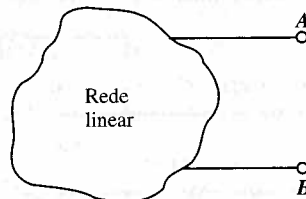


Figura P5.63

- 5.64 Dada a rede da Figura P5.64, utilize o comando MODEL e PSPICE para variar o resistor  $R_L$  de  $4\ \Omega$  para  $6\ \Omega$  em incrementos de  $0,1\ \Omega$  e mostrar graficamente a potência dissipada por  $R_L$  como uma função do parâmetro modelo  $R$ . Qual é o valor de  $R_L$  para uma transferência máxima de potência?

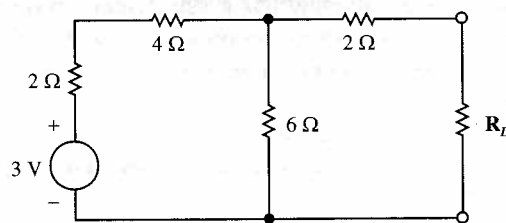


Figura P5.64

- 5.65 Para a rede mostrada na Figura P5.65, calcule a sensibilidade da tensão de saída para todos os resistores da rede e verifique os cálculos feitos com o PSPICE.

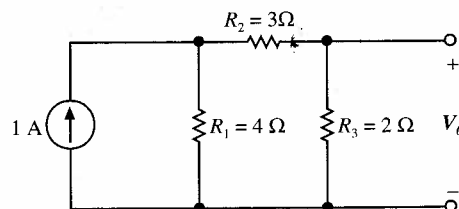
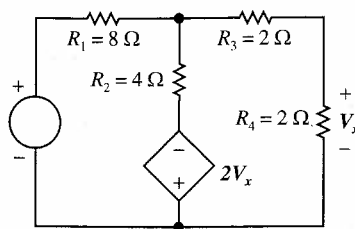


Figura P5.65

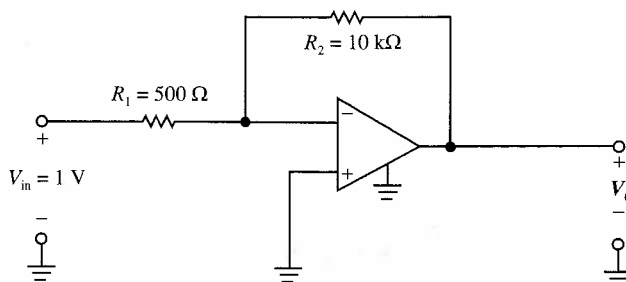


**5.66** Utilize o PSPICE para calcular as sensibilidade de  $V_o$  em relação a todos os parâmetros da rede da Figura P5.66.



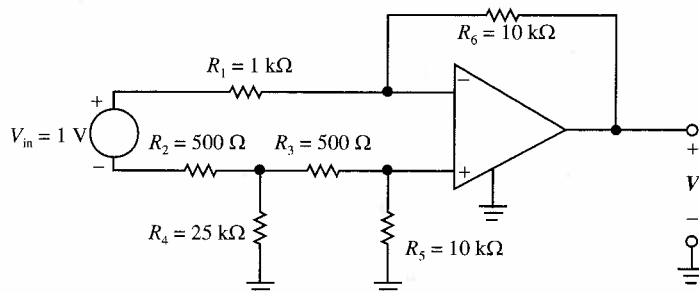
**Figura P5.66**

**5.67** Calcule todas as sensibilidade de  $V_o$  para a rede da Figura P5.67 e verifique os resultados com o PSPICE. (Utilize  $A = 10^5$  para o modelo do amp-op.)



**Figura P5.67**

**5.68** Utilize o PSPICE para calcular todas as sensibilidade de  $V_o$  na rede da Figura P5.68.



**Figura P5.68**

# Capacitância e Indutância

Até o presente momento, nossa análise de circuitos elétricos ficou restrita a circuitos que continham fontes independentes, fontes dependentes e resistores apenas. Neste ponto, introduzimos dois elementos adicionais: o capacitor e o indutor. Ambos são elementos lineares; porém, ao contrário do resistor, suas características terminais são descritas por equações diferenciais lineares. Outra característica particular desses novos componentes é sua capacidade de absorver energia do circuito, armazená-la temporariamente e, mais tarde, devolvê-la. Elementos que possuem essa capacidade de armazenamento de energia são chamados de *elementos de armazenagem*.

## 6.1 Capacitores

Um *capacitor* é um componente que consiste de duas superfícies condutoras separadas por um material não-condutor ou *dielétrico*. Um capacitor simplificado e seu símbolo elétrico são mostrados na Figura 6.1.

Existem muitos tipos diferentes de capacitores, e eles são classificados pelo tipo de material dielétrico que é usado entre suas placas condutoras. Apesar de qualquer isolante de boa qualidade servir como um dielétrico, cada tipo possui características que o fazem mais recomendável para determinadas aplicações. Para aplicações em circuitos eletrônicos (por exemplo, acoplamento entre os estágios de amplificação), o material dielétrico pode ser ar, vácuo, papel impregnado com óleo ou cera, Mylar, isopor, mica, vidro ou cerâmica.

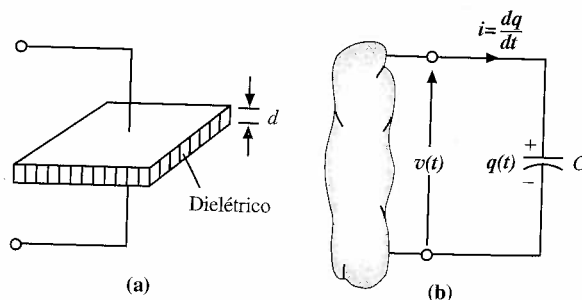


Figura 6.1 Capacitor e o seu símbolo elétrico.

Capacitores cerâmicos dielétricos feitos de titanatos de bário possuem uma ampla razão capacitância-por-volume por causa de sua alta constante dielétrica. Capacitores dielétricos de mica, vidro e cerâmica operam satisfatoriamente a altas frequências.

Capacitores de alumínio eletrolítico, que consistem de um par de placas de alumínio separadas por uma pasta eletrolítica besuntada de bórax, podem atingir altos valores de capacitância em volumes reduzidos. Esses capacitores servem tipicamente para filtragem, 'by-pass' e acoplamento para fornecimento de energia e aplicações de ignição de motores. Capacitores eletrolíticos de tântalo têm poucas perdas e possuem características mais estáveis que os de alumínio eletrolítico.

Além desses capacitores, que deliberadamente inserimos em um circuito para aplicações específicas, a capacitância parasita está presente sempre que houver uma diferença de potencial entre dois materiais condutores separados por um dielétrico. Pelo fato de a capacitância parasita poder causar acoplamento indesejado entre circuitos, um extremo cuidado deve ser tomado na disposição dos sistemas eletrônicos em placas de circuitos impressos.

Se uma fonte for conectada ao capacitor, cargas positivas serão transferidas para uma placa e negativas para outra. A carga no capacitor é proporcional à tensão sobre ele tal que

$$q = Cv \quad (6.1)$$

onde  $C$  é o fator de proporcionalidade conhecido como capacitância do elemento em coulombs por volt ou farads (F). A unidade "farad" é assim chamada em homenagem a Michael Faraday, um famoso físico inglês.

A carga diferencial entre as placas cria um campo elétrico que armazena energia. Devido à presença do dielétrico, a corrente de condução que flui nos condutores que conectam o capacitor ao restante do circuito não pode fluir internamente entre as placas. No entanto, via teoria eletromagnética, pode ser mostrado que essa corrente de condução é igual à corrente de deslocamento que flui entre as placas do capacitor e está presente sempre que um campo elétrico ou tensão varia com o tempo.

Nosso interesse primário está nas características terminais corrente-tensão do capacitor. Já que a corrente é

$$i = \frac{dq}{dt}$$

então, para o capacitor,

$$i = \frac{d}{dt} Cv$$

que para uma capacitância constante é

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (6.2)$$

A Equação 6.2 pode ser reescrita como

$$dv = \frac{1}{C} i dt$$

Integrando agora tal expressão de  $t = -\infty$  a algum instante  $t$  e assumindo  $v(-\infty) = 0$ , tem-se

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx \quad (6.3)$$

onde  $v(t)$  indica a dependência do tempo da tensão. A Equação 6.3 pode ser expressa como duas integrais, de modo que

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(x) dx + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx \\ &= v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde  $v(t_0)$  é a tensão devido à carga que se acumula no capacitor do tempo  $t = -\infty$  até o tempo  $t = t_0$ .

A energia armazenada em um capacitor pode ser derivada da potência que é fornecida a ele. Essa potência é dada pela expressão

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t) \frac{dv(t)}{dt} \quad (6.5)$$

e, dessa forma, a energia armazenada no campo elétrico é

$$\begin{aligned} w_C(t) &= \int_{-\infty}^t Cv(x) \frac{dv(x)}{dx} dx = C \int_{-\infty}^t v(x) \frac{dv(x)}{dx} dx \\ &= C \int_{v(-\infty)}^{v(t)} v(x) dv(x) = \frac{1}{2} Cv^2(x) \Big|_{v(-\infty)}^{v(t)} \\ &= \frac{1}{2} Cv^2(t) \quad \text{joules} \end{aligned} \quad (6.6)$$

uma vez que  $v(t = -\infty) = 0$ . A expressão para a energia também pode ser escrita usando-se a Equação 6.1 como

$$w_C(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} \quad (6.7)$$

As equações 6.6 e 6.7 representam a energia armazenada pelo capacitor que, por sua vez, é igual ao trabalho realizado pela fonte para carregar o capacitor.

A polaridade da tensão sobre um capacitor sendo carregado é mostrada na Figura 6.1b. No caso ideal, o capacitor manterá a carga por um tempo indefinido de tempo se a fonte for removida. Se, algum tempo depois, um componente dissipador de energia (por exemplo, uma luz de *flash*) for conectada sobre o capacitor, uma descarga de corrente fluirá do capacitor, e o capacitor fornecerá a energia armazenada à carga.

Apesar de podermos modelar o capacitor como um componente ideal, na prática um capacitor se descarrega via resistências em paralelo que fornecem um caminho de condução entre as placas. É através dessa resistência paralela que o capacitor realístico se descarrega vagarosamente.

Capacitores podem ser fixos ou variáveis e tipicamente variam de milhares de microfarads ( $\mu\text{F}$ ) até alguns poucos picofarads (pF). Podemos empregá-los em variadas situações para obter características específicas de desempenho em um circuito. Infelizmente, eles também podem deteriorar o comportamento do circuito quando estão inerentemente presentes na forma de capacitância parasita, que pode ocorrer entre quaisquer duas superfícies de um circuito.

### Exemplo 6.1

Se a carga acumulada em dois condutores paralelos carregados de 12 V é de 600 pC, qual é a capacitância dos condutores paralelos?

Usando-se a Equação 6.1, achamos que

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{(600)(10^{-12})}{12} = 50 \text{ pF}$$

### Exemplo 6.2

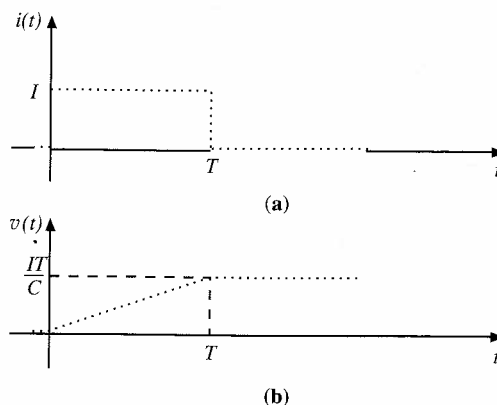
Dado um capacitor que está inicialmente descarregado, determine a tensão sobre o capacitor como uma função do tempo caso esteja sujeito ao pulso mostrado na Figura 6.2a.

Utilizando a Equação 6.4 e o fato de que  $v(t_0) = v(0) = 0$ , temos

$$\begin{aligned} v(t) &= 0 + \frac{1}{C} \int_0^t I dx \quad 0 \leq t \leq T \\ &= \frac{It}{C} \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Para  $t > T$ ,

$$v(t) = v(t) + \frac{1}{C} \int_T^t (0) dt = \frac{IT}{C}$$



**Figura 6.2** Forma de onda da tensão e corrente para um capacitor inicialmente descarregado.

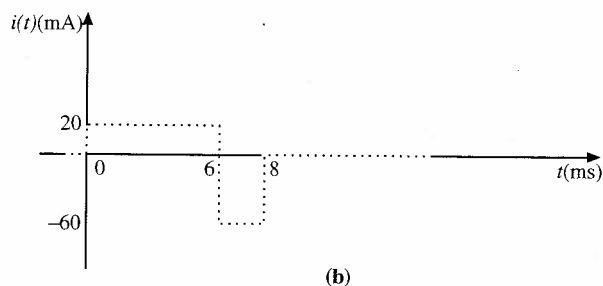
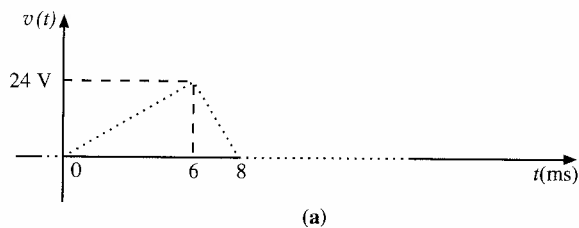
Quando a corrente não está mais fluindo, a tensão não muda. Portanto, a forma de onda da tensão é a mostrada na Figura 6.2b.

### Exemplo 6.3

A tensão sobre um capacitor de  $5 \mu\text{F}$  tem a forma de onda mostrada na Figura 6.3a. Determine a forma de onda da corrente.

Note que

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \frac{24}{6 \times 10^{-3}} t & 0 \leq t \leq 6 \text{ ms} \\
 &= \frac{-24}{2 \times 10^{-3}} t + 96 & 6 \leq t \leq 8 \text{ ms} \\
 &= 0 & 8 \text{ ms} \leq t
 \end{aligned}$$



**Figura 6.3** Formas de onda da corrente e tensão para um capacitor de  $5 \mu\text{F}$ .

Utilizando a Equação 6.2, achamos que

$$\begin{aligned}
 i(t) &= C \frac{dv(t)}{dt} \\
 &= 5 \times 10^{-6} (4 \times 10^3) & 0 \leq t \leq 6 \text{ ms} \\
 &= 20 \text{ mA} & 0 \leq t \leq 6 \text{ ms}
 \end{aligned}$$

$$i(t) = 5 \times 10^{-6} (-12 \times 10^3) \quad 6 \leq t \leq 8 \text{ ms}$$

$$= -60 \text{ mA} \quad 6 \leq t \leq 8 \text{ ms}$$

$$i(t) = 0 \quad 8 \text{ ms} \leq t$$

Portanto, a forma de onda da corrente é mostrada na Figura 6.3b e  $i(t) = 0$  para  $t > 8 \text{ ms}$ . ■

#### Exemplo 6.4

Determine a energia armazenada no campo elétrico do capacitor no Exemplo 6.3 no instante  $t = 6 \text{ ms}$ .

Utilizando a Equação 6.6, tem-se

$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

No instante  $t = 6 \text{ ms}$ ,

$$w(6 \text{ ms}) = \frac{1}{2} (5 \times 10^{-6}) (24)^2$$

$$= 1440 \text{ } \mu\text{J}$$

As equações e exemplos anteriores ilustram um número de características ressaltantes do capacitor. Um capacitor ideal somente armazena energia; ele não a dissipa como um resistor. Se a tensão sobre um capacitor é constante (ou seja, não variando no tempo), a corrente sobre ele é zero e, portanto, para corrente contínua, um capacitor se parece com um circuito aberto. Apesar de a corrente do capacitor ser zero, o capacitor pode ainda armazenar uma quantidade infinita de energia. Um salto instantâneo na tensão sobre o capacitor não é fisicamente realizável, porque isso requer o movimento de uma quantidade finita de carga em tempo zero, que é uma corrente infinita.

#### Exercícios

- E6.1** Um capacitor de  $10 \text{ } \mu\text{F}$  tem uma carga acumulada de  $500 \text{ nC}$ . Determine a tensão sobre o capacitor.  
**Resp.:**  $0,05 \text{ V}$ .
- E6.2** A tensão sobre um capacitor de  $4 \text{ } \mu\text{F}$  é mostrada na Figura E6.2. Determine a forma de onda para a corrente do capacitor.

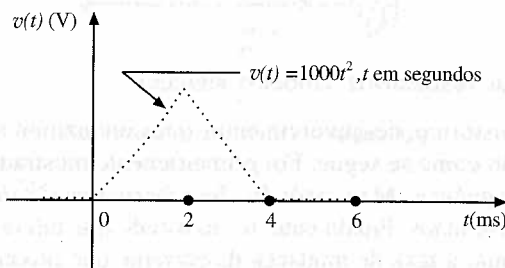
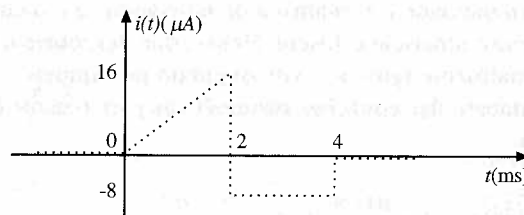


Figura E6.2

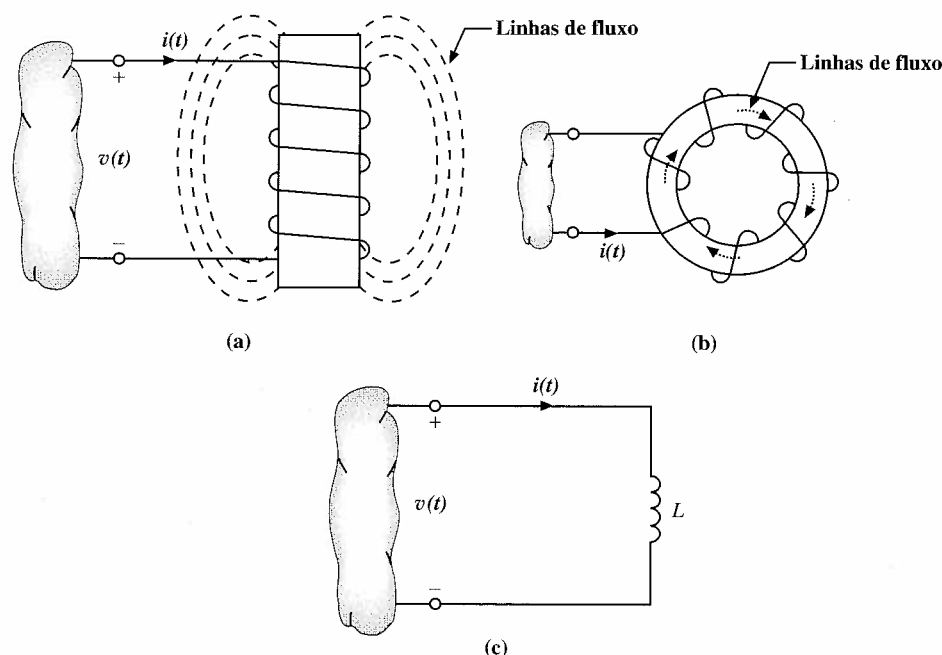
**Resp.:**



- E6.3** Calcule a energia armazenada no campo elétrico do capacitor do Exercício E6.2 no instante  $t = 2 \text{ ms}$ .  
**Resp.:**  $W = 32 \text{ pJ}$ .

## 6.2 Indutores

*Indutor* é um componente de circuito que consiste de um fio condutor normalmente em forma de uma bobina. Dois indutores típicos e seus respectivos símbolos elétricos são mostrados na Figura 6.4. Indutores são normalmente classificados pelo tipo de material contido em seu interior nos quais a bobina é enrolada. Por exemplo, o material central pode ser ar ou qualquer material não-magnético, ferro ou ferrite. Indutores feitos com ar ou material não-magnético são amplamente usados em rádios, televisores e circuitos de filtragem. Indutores com núcleo de ferro são utilizados em filtros e fornecimento de energia elétrica. Indutores com núcleo de ferrite são amplamente usados em aplicações de alta frequência. Note que, ao contrário do interior magnético que restringe o fluxo, como mostrado na Figura 6.4b, as linhas do fluxo para indutores não-magnéticos vão além do próprio indutor, como ilustrado na Figura 6.4a. Tal como a capacitância parasita, a indutância parasita pode resultar de qualquer elemento conduzindo corrente envolto por conexões de fluxo.



**Figura 6.4** Dois indutores e seus respectivos símbolos elétricos.

De um ponto de vista histórico, desenvolvimentos que conduziram ao modelo matemático que usamos para representar o indutor são como se segue. Foi primeiramente mostrado que um condutor conduzindo corrente produziria um campo magnético. Mais tarde foi descoberto que o campo magnético e a corrente que o produziu eram linearmente relacionados. Finalmente, foi mostrado que um campo magnético variante produzia uma tensão que era proporcional à taxa de mudança da corrente que produzia o campo magnético; isto é,

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (6.8)$$

A constante de proporcionalidade  $L$  é chamada de indutância, e é medida na unidade “henry”, assim chamada em homenagem ao inventor americano Joseph Henry, que descobriu a relação. Como visto na Equação 6.8, 1 henry (H) é dimensionalmente igual a 1 volt-segundo por ampère.

Seguindo o desenvolvimento das equações matemáticas para o capacitor, obtém-se que a expressão para a corrente em um indutor é

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(x) dx \quad (6.9)$$

que também pode ser escrita como

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx \quad (6.10)$$

A potência fornecida ao indutor pode ser usada para derivar a energia armazenada nele. Tal potência é igual a

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= \left[ L \frac{di(t)}{dt} \right] i(t) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Portanto, a energia armazenada no campo magnético é

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t \left[ L \frac{di(x)}{dx} \right] i(x) dx$$

Seguindo o desenvolvimento da Equação (6.6), obtém-se

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad \text{joules} \quad (6.12)$$

O indutor, tal como o resistor e o capacitor, é um elemento passivo. A polaridade da tensão sobre o indutor é mostrada na Figura 6.4.

Como o capacitor, o indutor é um elemento que pode ser usado para se armazenar energia. No entanto, um indutor prático não pode armazenar energia tão bem quanto um capacitor prático. O indutor sempre tem alguma resistência no enrolamento da bobina, que dissipa energia rapidamente.

Indutores práticos variam tipicamente de uns poucos microhenrys até dezenas de henrys. De um ponto de vista de projeto de circuito, é importante notar que indutores não podem ser facilmente fabricados em uma placa de circuito integrado e, portanto, projetos de circuitos integrados empregam somente recursos eletrônicos ativos, resistores e capacitores, que podem ser facilmente fabricados na forma de microcircuitos.

### Exemplo 6.5

A corrente em um indutor de 10 mH tem a forma de onda mostrada na Figura 6.5a. Determine a forma de onda da tensão.

Usando a Equação (6.8) e notando que

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{20 \times 10^{-3} t}{2 \times 10^{-3}} & 0 \leq t \leq 2 \text{ ms} \\ i(t) &= \frac{-20 \times 10^{-3} t}{2 \times 10^{-3}} + 40 \times 10^{-3} & 2 \leq t \leq 4 \text{ ms} \end{aligned}$$

e

$$i(t) = 0 \quad 4 \text{ ms} \leq t$$

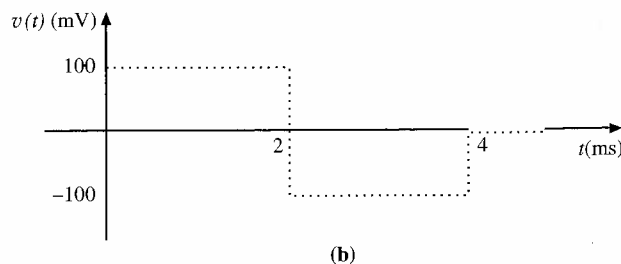
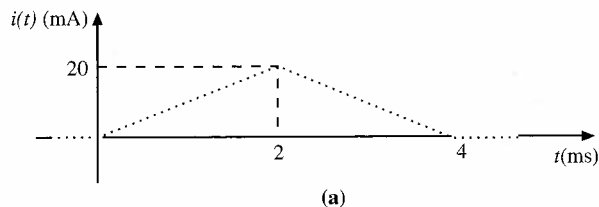


Figura 6.5 Forma de onda da corrente e tensão para um indutor de 10 mH.



Utilizando a Equação 6.8, achamos que

$$v(t) = (10 \times 10^{-3}) \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$$

$$= 100 \text{ mV}$$

e

$$v(t) = (10 \times 10^{-3}) \frac{-20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \quad 2 \leq t \leq 4 \text{ ms}$$

$$= -100 \text{ mV}$$

e  $v(t) = 0$  para  $t > 4$  ms. Portanto, a forma de onda da tensão é mostrada na Figura 6.5b.

### Exemplo 6.6

A corrente em um indutor de 2 mH é

$$i(t) = 2 \text{ sen } 377t \text{ A}$$

Determine a tensão sobre o indutor e a energia armazenada no indutor. A partir da Equação 6.8, tem-se

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$= (2 \times 10^{-3}) \frac{d}{dt} (2 \text{ sen } 377t)$$

$$= 1,508 \cos 377t \text{ V}$$

e da Equação 6.12,

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$$

$$= \frac{1}{2} (2 \times 10^{-3}) (2 \text{ sen } 377t)^2$$

$$= 0,004 \text{ sen}^2 377t \text{ J}$$

O material anterior ilustra um número de características importantes do indutor. Um indutor ideal somente armazena energia; ele não dissipa energia alguma. Como já mencionado, este não é o caso para indutores fisicamente realizáveis. Uma bobina física possui uma resistência de enrolamento não-desprezível e pode ser modelada como um resistor em série com um indutor ideal. Geralmente, quando falamos de um indutor, estamos nos referindo ao elemento ideal, sem perdas.

Da Equação 6.8 notamos que, se a corrente for constante, a tensão sobre um indutor será zero. Dessa forma, para corrente contínua, o indutor se parece com um curto-circuito. A equação também indica que uma mudança instantânea na corrente implicaria uma tensão infinita. Logo, não é possível mudar a corrente em um indutor instantaneamente.

### Exercícios

**E6.4** A corrente em um indutor de 5 mH tem a forma de onda mostrada na Figura E6.4. Calcule a forma de onda da tensão no indutor.

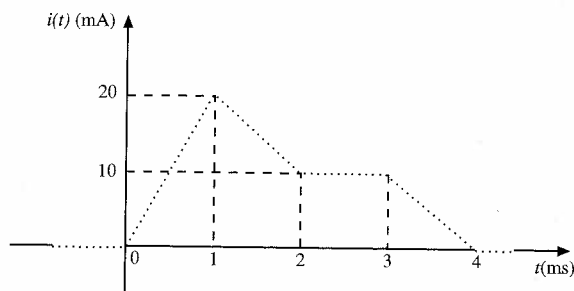
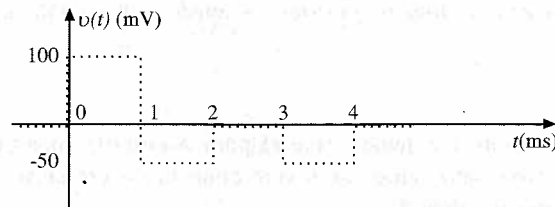


Figura E6.4

Resp.:



E6.5 Calcule a energia armazenada no campo magnético do indutor do Exercício E6.4 no tempo  $t = 1,5$  ms.

Resp.:  $W = 562,5$  nJ.

## 6.3 Combinações de Capacitores e Indutores

### Capacitores em Série

Se um número de capacitores está conectado em série, sua capacitância equivalente pode ser calculada usando-se a LKT. Considere o circuito mostrado na Figura 6.6a. Para esse circuito

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots + v_N(t) \quad (6.13)$$

porém

$$v_i(t) = \frac{1}{C_i} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_i(t_0) \quad (6.14)$$

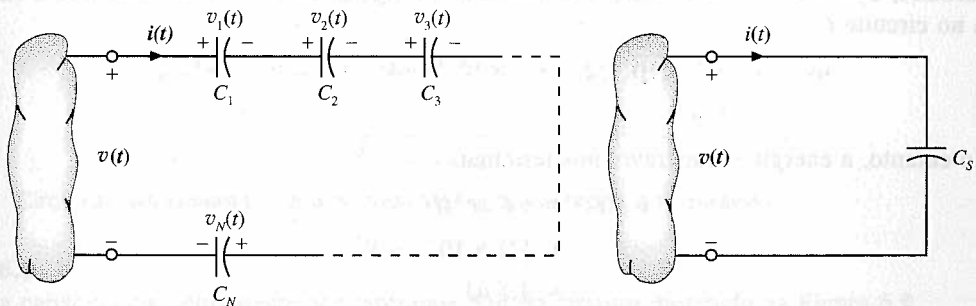


Figura 6.6 Circuito equivalente para  $N$  capacitores conectados em série.

Portanto, a Equação 6.13 pode ser escrita como se segue usando-se a Equação 6.14:

$$v(t) = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \right) \int_{t_0}^t i(t) dt + \sum_{i=1}^N v_i(t_0) \quad (6.15)$$

$$= \frac{1}{C_s} \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0) \quad (6.16)$$

onde

$$v(t_0) = \sum_{i=1}^N v_i(t_0)$$

e

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad (6.17)$$

Além disso, o circuito da Figura 6.6b é equivalente ao mostrado na Figura 6.6a sob as condições descritas acima.

É importante notar que, uma vez que a mesma corrente flui em cada um dos capacitores da série, cada capacitor ganha a mesma carga no mesmo período. A tensão sobre cada capacitor dependerá da carga e da capacitância do componente.

### Exemplo 6.7

Determine a capacitância equivalente e a tensão inicial para o circuito mostrado na Figura 6.7. Note que esses capacitores devem estar carregados antes de serem conectados em série ou a carga de cada um seria igual e as tensões estariam na mesma direção.

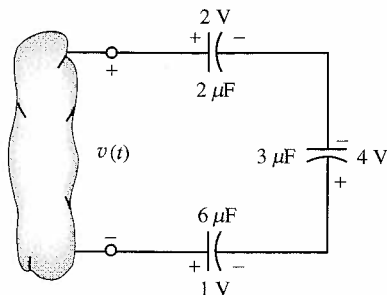


Figura 6.7 Circuito contendo múltiplos capacitores com tensões iniciais.

A capacitância equivalente é

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

onde todos os valores das capacitâncias estão em microfarads.

Portanto,  $C_s = 1 \mu\text{F}$  e, como visto anteriormente na figura,  $v(t_0) = -3 \text{ V}$ . Note que a energia total armazenada no circuito é

$$\begin{aligned} w(t_0) &= \frac{1}{2} [2 \times 10^{-6} (2)^2 + 3 \times 10^{-6} (-4)^2 + 6 \times 10^{-6} (-1)^2] \\ &= 31 \mu\text{J} \end{aligned}$$

No entanto, a energia recuperável nos terminais é

$$\begin{aligned} w_c(t_0) &= \frac{1}{2} C_s v^2(t) \\ &= \frac{1}{2} [1 \times 10^{-6} (-3)^2] \\ &= 4,5 \mu\text{J} \end{aligned}$$

### Exemplo 6.8

Dois capacitores previamente descarregados estão conectados em série e são posteriormente carregados através de uma fonte de 12 V. Um capacitor é de  $30 \mu\text{F}$  e o outro é desconhecido. Se a tensão sobre o capacitor de  $30 \mu\text{F}$  é de 8 V, encontre a capacitância do capacitor desconhecido.

A carga no capacitor de  $30 \mu\text{F}$  é

$$Q = CV = (30 \mu\text{F})(8 \text{ V}) = 240 \mu\text{C}$$

Já que a mesma corrente flui em cada um dos capacitores em série, cada capacitor ganha a mesma carga no mesmo período.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{240 \mu\text{C}}{4 \text{ V}} = 60 \mu\text{F}$$

### Capacitores em Paralelo

Para se determinar a capacitância equivalente de  $N$  capacitores conectados em paralelo, empregamos a LKC. Como pode ser visto da Figura 6.8a,

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_N(t) \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} &= C_1 \frac{dv(t)}{dt} + C_2 \frac{dv(t)}{dt} + C_3 \frac{dv(t)}{dt} + \dots + C_N \frac{dv(t)}{dt} \\ &= \left( \sum_{i=1}^N C_i \right) \frac{dv}{dt} \\ &= C_p \frac{dv(t)}{dt} \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N \quad (6.20)$$

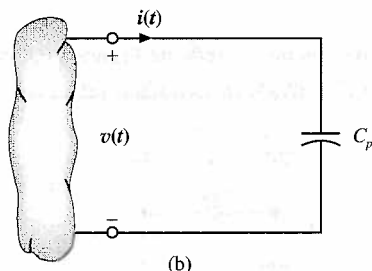
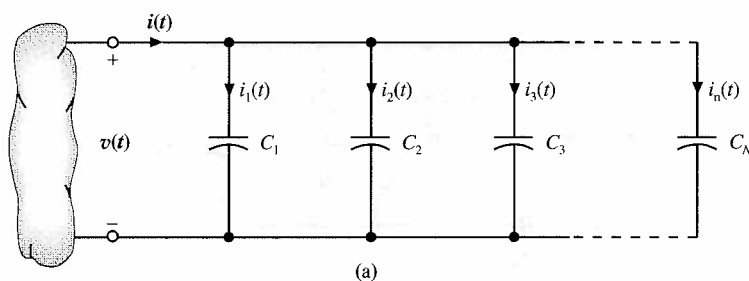


Figura 6.8 Circuitos equivalentes para  $N$  capacitores conectados em paralelo.

### Exemplo 6.9

Determine a capacitância equivalente nos terminais  $A-B$  do circuito mostrado na Figura 6.9.

$$\begin{aligned} C_p &= 4 \mu\text{F} + 6 \mu\text{F} + 2 \mu\text{F} + 3 \mu\text{F} \\ &= 15 \mu\text{F} \end{aligned}$$

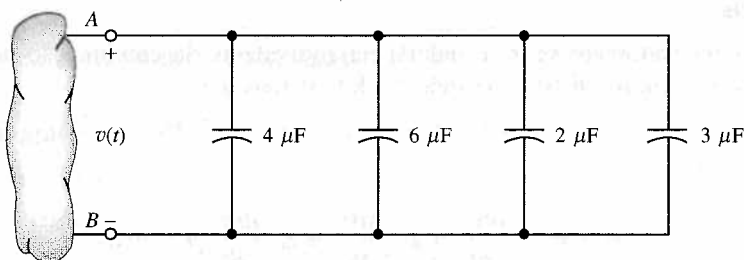


Figura 6.9 Circuito contendo múltiplos capacitores em paralelo.

### Exercícios

E6.6 Dois capacitores foram conectados como mostrado na Figura E6.6. Determine o valor de  $C_1$ .

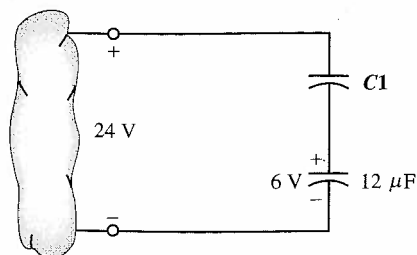


Figura E6.6

**Resp.:**  $C_1 = 4 \mu\text{F}$ .

**E6.7** Calcule a capacitância equivalente da rede da Figura E6.7.

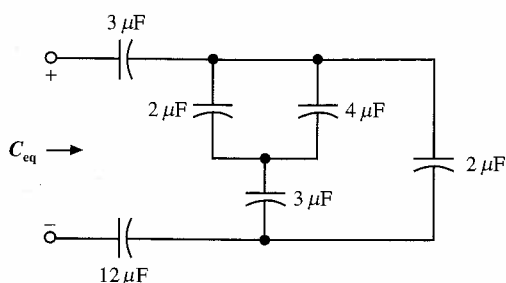


Figura E6.7

**Resp.:**  $C_{eq} = 1,5 \mu\text{F}$ .

**E6.8** Calcule a capacitância equivalente da rede da Figura E6.8 caso todos os capacitores sejam de  $4 \mu\text{F}$ .

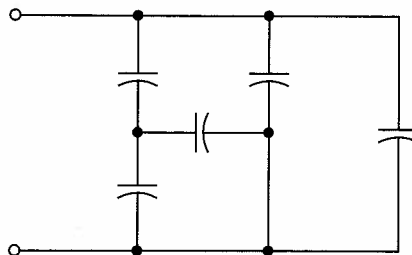


Figura E6.8

**Resp.:**  $C_{eq} = 32/3 \mu\text{F}$ .

## Indutores em Série

Se  $N$  indutores estão conectados em série, a indutância equivalente da combinação pode ser determinada como se segue. Referindo à Figura 6.10a e usando a LKT, vemos que

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots + v_N(t) \quad (6.21)$$

e, portanto,

$$v(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} + L_3 \frac{di(t)}{dt} + \dots + L_N \frac{di(t)}{dt} \quad (6.22)$$

$$= \left( \sum_{i=1}^N L_i \right) \frac{di(t)}{dt} \\ = L_s \frac{di(t)}{dt} \quad (6.23)$$

onde

$$L_S = \sum_{i=1}^N L_i \quad (6.24)$$

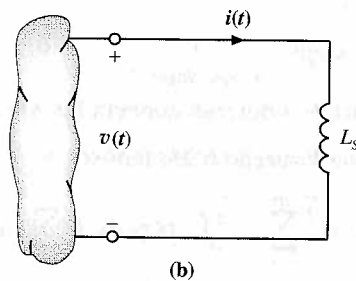
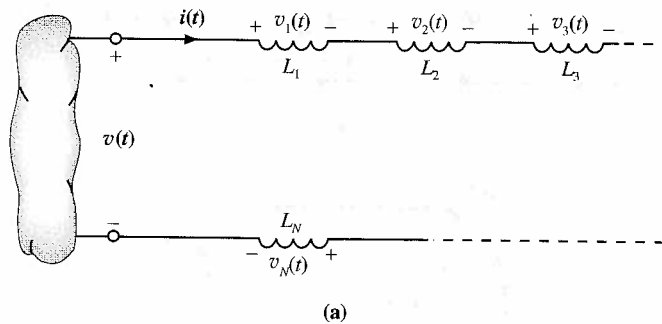


Figura 6.10 Circuito equivalente para  $N$  indutores conectados em série.

### Exemplo 6.10

A indutância equivalente do circuito mostrado na Figura 6.11 é

$$\begin{aligned} L_S &= 1 \text{ H} + 2 \text{ H} + 4 \text{ H} \\ &= 7 \text{ H} \end{aligned}$$

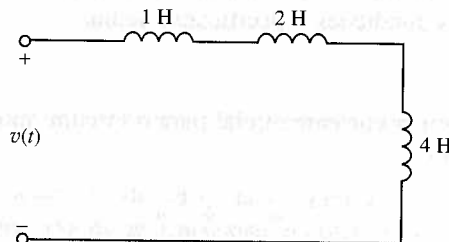


Figura 6.11 Circuito contendo indutores múltiplos.

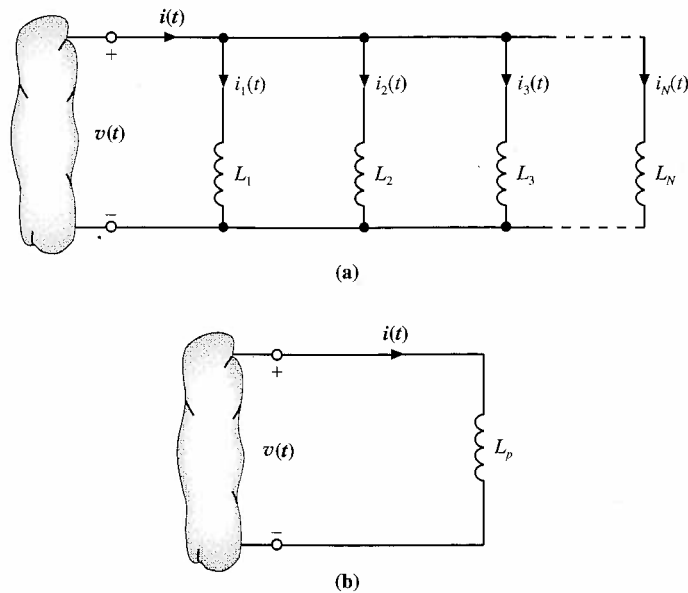
### Indutores em Paralelo

Considere o circuito mostrado na Figura 6.12a, que contém  $N$  indutores em paralelo. Usando a LKC, podemos escrever

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_N(t) \quad (6.25)$$

No entanto,

$$i_j(t) = \frac{1}{L_j} \int_{t_0}^t v(x) dx + i_j(t_0) \quad (6.26)$$



**Figura 6.12** Circuitos equivalentes para  $N$  indutores conectados em paralelo.

Substituindo essa expressão na Equação 6.25, tem-se

$$i(t) = \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{L_j} \right) \int_{t_0}^t v(x) dx + \sum_{j=1}^N i_j(t_0) \quad (6.27)$$

$$= \frac{1}{L_p} \int_{t_0}^t v(x) dx + i(t_0) \quad (6.28)$$

onde

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (6.29)$$

e  $i(t_0)$  é igual à corrente em  $L_p$  no instante  $t = t_0$ . Além disso, o circuito mostrado na Figura 6.12b é equivalente àquele da Figura 6.12a sob as condições especificadas acima.

### Exemplo 6.11

Determine a indutância equivalente e a corrente inicial para o circuito mostrado na Figura 6.13.

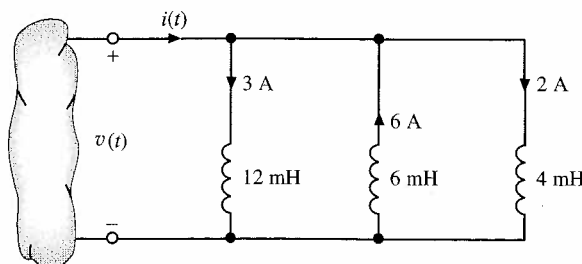
A indutância equivalente é

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$$

onde todos os valores das indutâncias estão em milihenrys.

$$L_p = 2 \text{ mH}$$

e a corrente inicial é  $i(t_0) = -1 \text{ A}$ .



**Figura 6.13** Circuito contendo múltiplos indutores com correntes iniciais.

Os resultados anteriores indicam que capacitores se combinam como condutâncias, enquanto indutâncias se combinam como resistências.

### Exercícios

**E6.9** Calcule a indutância equivalente na rede da Figura E6.9 caso todos os indutores sejam de 4 mH.

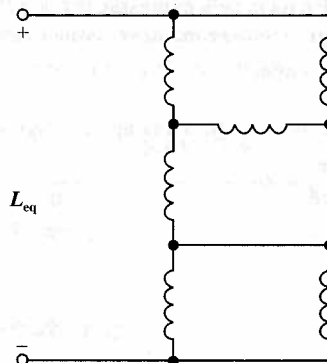


Figura E6.9

*Resp.:* 4,4 mH.

**E6.10** Determine a indutância equivalente na rede da Figura E6.10 caso todos os indutores sejam de 6 mH.

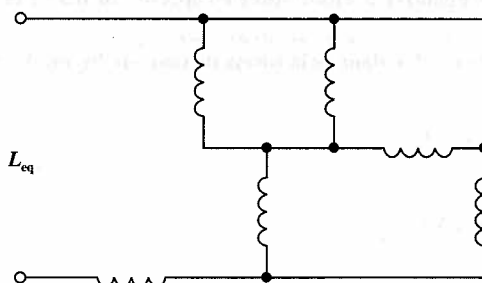


Figura E6.10

*Resp.:* 9,429 mH.

## 6.4 Resumo

Mais dois elementos de circuito foram introduzidos neste capítulo: o capacitor e o indutor. Mostramos que, ao contrário do resistor, ambos são capazes de armazenar energia, e as relações de energia desses elementos foram especificadas. Ilustramos como calcular a capacitância equivalente quando os capacitores estão conectados em série ou em paralelo e como determinar a indutância equivalente quando esses elementos estão interconectados.

### Pontos-Chave

- Capacitores e indutores são capazes de armazenar energia.
- Um capacitor se parece com um circuito aberto para corrente contínua.
- Um indutor se parece com um curto-circuito para corrente contínua.
- Quando se determina a capacitância equivalente de um número de capacitores interconectados, capacitores em série se combinam como resistores em paralelo e capacitores em paralelo se combinam como resistores em série.
- Quando se determina a indutância equivalente de um número de indutores interconectados, indutores se combinam como resistores tanto em série quanto em paralelo.



## Problemas

- 6.1 Um capacitor descarregado de  $100\ \mu\text{F}$  é carregado por uma corrente constante de  $1\ \text{mA}$ . Ache a tensão sobre o capacitor depois de 4 segundos.
- 6.2 Um capacitor de  $25\ \mu\text{F}$  inicialmente carregado de  $-10\ \text{V}$  é carregado por uma corrente constante de  $2,5\ \mu\text{A}$ . Determine a tensão sobre o capacitor depois de 2,5 minutos.
- 6.3 A tensão sobre um capacitor de  $100\ \mu\text{F}$  é dada pela expressão  $v(t) = 120 \sin 377t\ \text{V}$ . Determine (a) a corrente no capacitor e (b) a expressão para a energia armazenada nesse componente.
- 6.4 A energia que está armazenada em um capacitor de  $25\ \mu\text{F}$  é de  $w(t) = 12 \sin^2 377t\ \text{J}$ . Determine a corrente no capacitor.
- 6.5 Dois capacitores estão conectados em série como mostrado na Figura P6.5.

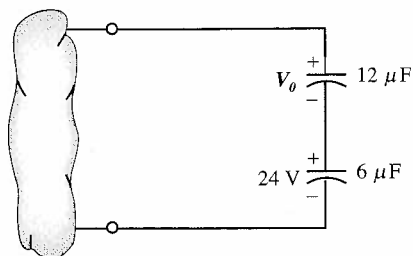


Figura P6.5

Se os capacitores são então carregados e a tensão sobre o capacitor de  $6\ \mu\text{F}$  é de  $24\ \text{V}$ , determine a tensão sobre o capacitor de  $12\ \mu\text{F}$ .

- 6.6 A tensão sobre um capacitor de  $0,1\ \text{F}$  é dada pela forma de onda da Figura P6.6. Determine a forma de onda para a corrente no capacitor.

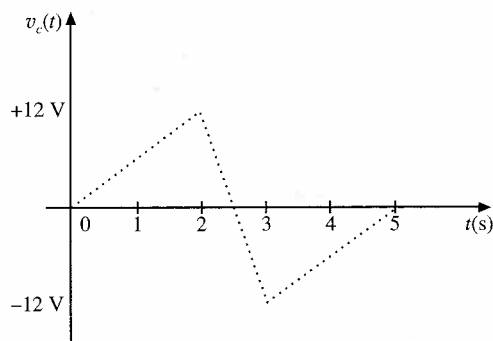


Figura P6.6

- 6.7 Desenhe a forma de onda para a corrente em um capacitor de  $3\ \mu\text{F}$  quando a tensão sobre o capacitor é dada como na Figura P6.7.

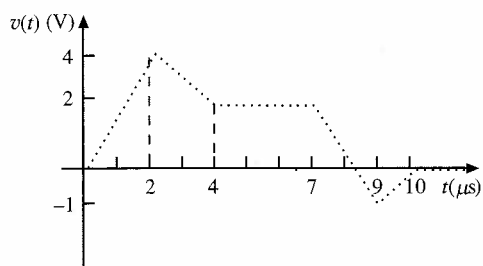


Figura P6.7

- 6.8 A tensão sobre um capacitor de  $50 \mu\text{F}$  é mostrada na Figura P6.8. Determine a forma de onda da corrente.

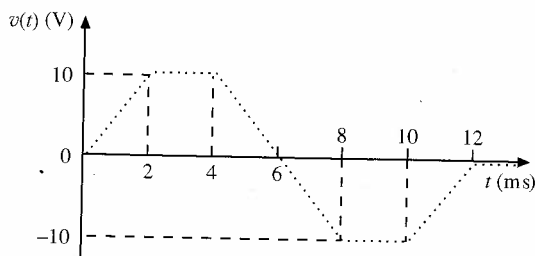


Figura P6.8

- 6.9 Desenhe a forma de onda para a corrente em um capacitor de  $12 \mu\text{F}$  quando a tensão sobre o capacitor é como descrito na Figura P6.9.

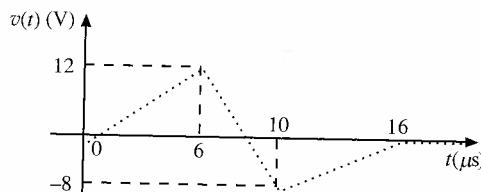


Figura P6.9

- 6.10 A tensão sobre um capacitor de  $6 \mu\text{F}$  é dada pela forma de onda da Figura P6.10. Desenhe a forma de onda para a corrente no capacitor.

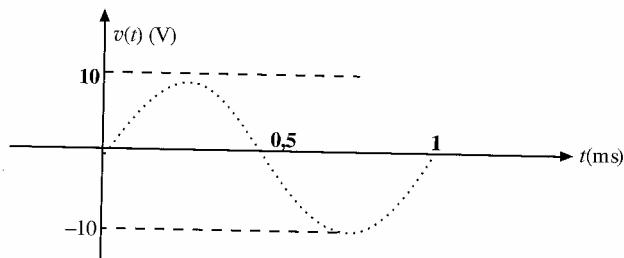


Figura P6.10

- 6.11 A corrente fluindo através de um indutor de  $100 \text{ mH}$  é  $i(t) = 2 \sin 377t \text{ A}$ . Determine (a) a tensão sobre o indutor e (b) a expressão para a energia armazenada no componente.
- 6.12 A energia armazenada em um indutor de  $50 \text{ mH}$  é dada pela expressão  $w(t) = 1,2 \sin^2 377t \text{ J}$ . Determine a tensão sobre o indutor.
- 6.13 A corrente em um indutor é dada pelas expressões

$$\begin{aligned} i(t) &= 0 & t < 0 \\ i(t) &= 10(1 - e^{-t}) \text{ mA} & t > 0 \end{aligned}$$

Determine (a) a tensão sobre o indutor e (b) a expressão para a energia armazenada nele.

- 6.14 Dada a informação do exercício anterior, determine a tensão sobre o indutor e a energia armazenada nele depois de  $1 \text{ s}$ .
- 6.15 A corrente

$$\begin{aligned} i(t) &= 0 & t < 0 \\ i(t) &= 100e^{-t/10} \text{ A} & t > 0 \end{aligned}$$

flui através de um indutor de  $150 \text{ mH}$ . Determine a tensão sobre o indutor e a energia armazenada nele após  $5 \text{ s}$ .

- 6.16 A corrente em um indutor de  $50 \text{ mH}$  é especificada como se segue:

$$\begin{aligned} i(t) &= 0 & t < 0 \\ i(t) &= 2te^{-4t} \text{ A} & t > 0 \end{aligned}$$

Determine (a) a tensão sobre o indutor, (b) o tempo em que a corrente atinge o seu máximo, e (c) o instante em que a tensão é mínima.

- 6.17 A corrente em um indutor de 10 mH é mostrada na Figura P6.17. Determine a tensão sobre o indutor.

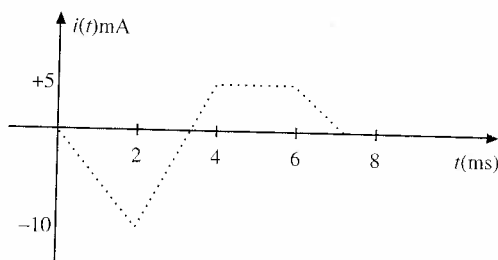


Figura P6.17

- 6.18 A corrente em um indutor de 50 mH é dada na Figura P6.18. Esboce a tensão sobre o indutor.

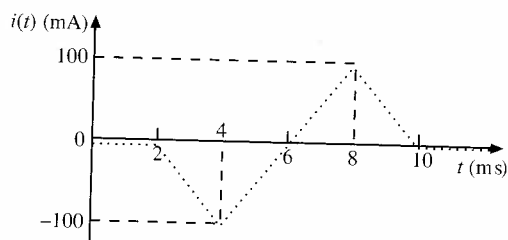


Figura P6.18

- 6.19 A corrente em um indutor de 16 mH é dada pela forma de onda na Figura P6.19. Determine a forma de onda para a tensão sobre o indutor.

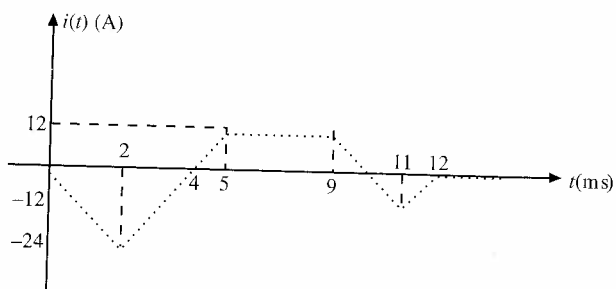


Figura P6.19

- 6.20 Desenhe a forma de onda para a tensão sobre um indutor de 10 mH quando a corrente no indutor é dada pela forma de onda mostrada na Figura P6.20.

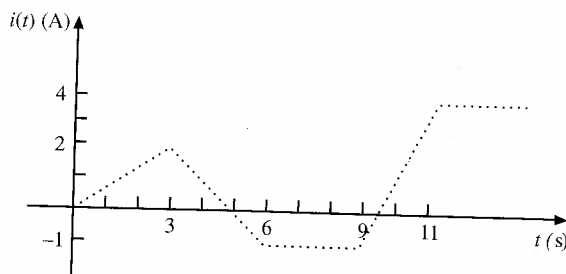


Figura P6.20

- 6.21 A corrente em um indutor de 4 mH é dada pela forma de onda na Figura P6.21. Desenhe o gráfico para a tensão sobre o indutor.

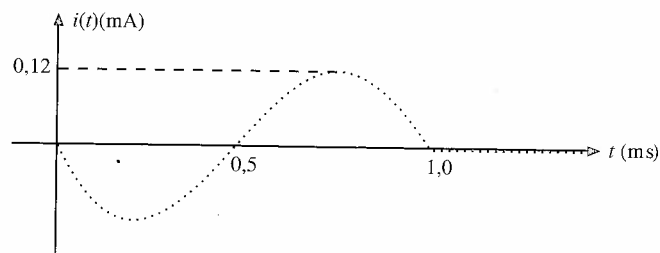


Figura P6.21

- 6.22 Determine a tensão sobre cada um dos capacitores caso a tensão no circuito aberto da Figura P6.22 seja 30 V.

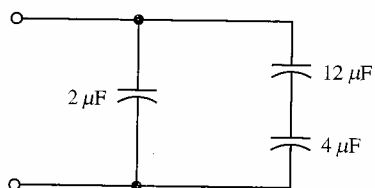


Figura P6.22

- 6.23 Se a tensão no circuito aberto da rede da Figura P6.23 é de 28 V, determine a tensão sobre cada capacitor.

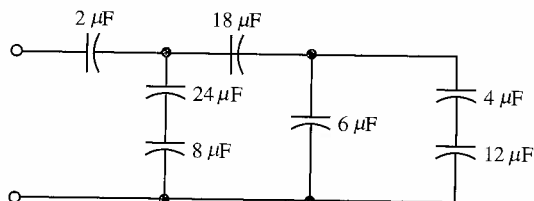


Figura P6.23

- 6.24 Dados quatro capacitores de  $2\ \mu\text{F}$ , determine os valores máximo e mínimo que podem ser obtidos conectando-se os capacitores em combinações em série e/ou em paralelo.
- 6.25 Determine o valor de  $C$  para produzir a capacitância total desejada de  $C_T = 2\ \mu\text{F}$  no circuito da Figura P6.25.

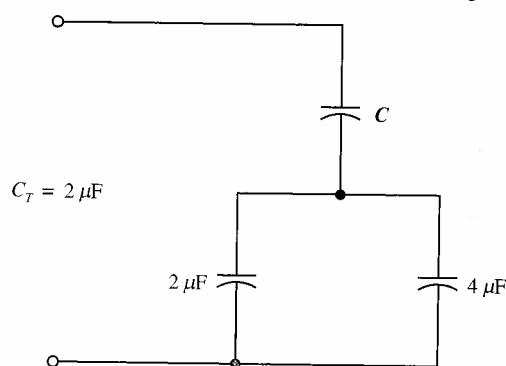


Figura P6.25

- 6.26 Determine o valor de  $C$  para produzir a capacitância total desejada de  $C_T = 1\ \mu\text{F}$  no circuito da Figura P6.26.

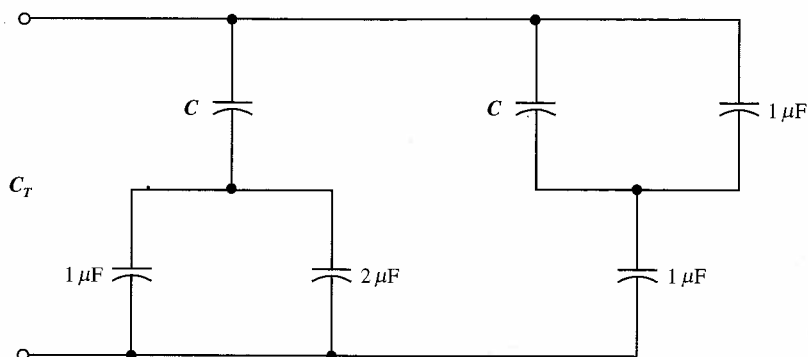


Figura P6.26

- 6.27 Determine a capacitância total da rede da Figura P6.27.

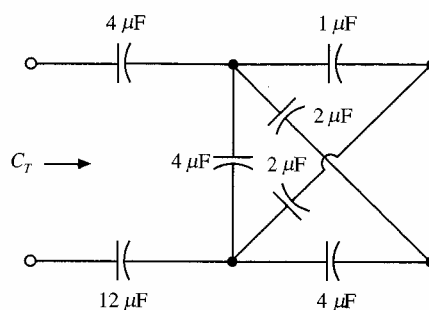


Figura P6.27

- 6.28 Determine a capacitância total da rede da Figura P6.28.

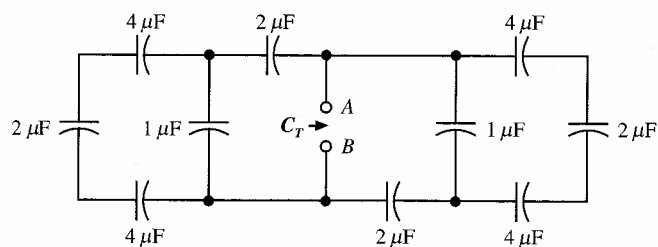


Figura P6.28

- 6.29 Determine a capacitância total  $C_T$  da rede da Figura P6.29.

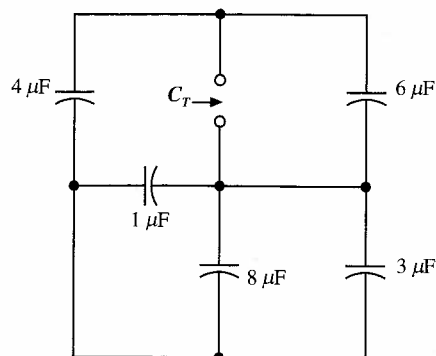


Figura P6.29

- 6.30 Determine a capacitância total  $C_T$  da rede da Figura P6.30.

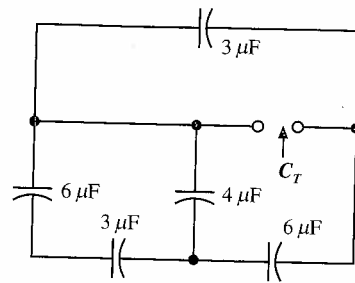


Figura P6.30

- 6.31 Determine a capacitância equivalente nos terminais A-B na Figura P6.31.

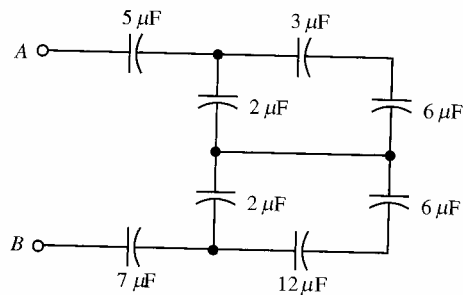


Figura P6.31

- 6.32 Determine  $C_T$  na rede da Figura P6.32 caso (a) a chave esteja aberta e (b) a chave esteja fechada.

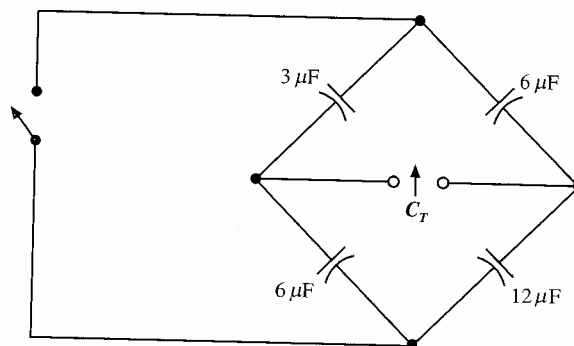


Figura P6.32

- 6.33 Determine a capacitância entre os pontos 1 e 2 na rede da Figura P6.33.

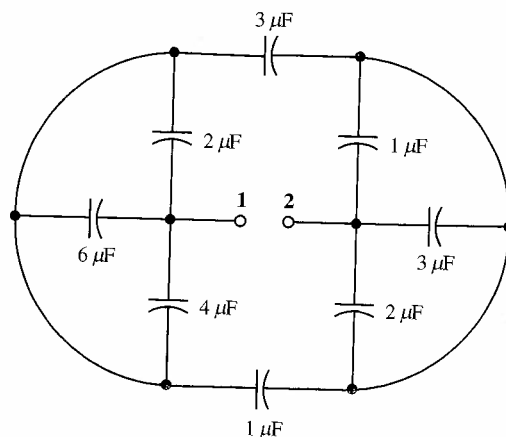


Figura P6.33

- 6.34 Na rede da Figura P6.34, determine a capacitância  $C_T$  caso (a) a chave esteja aberta ou (b) a chave esteja fechada.

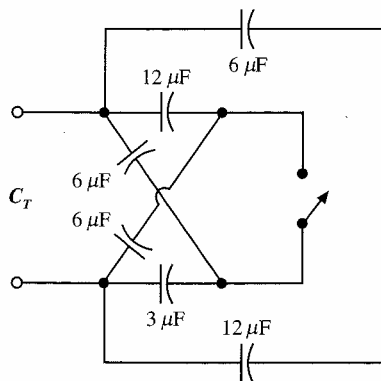


Figura P6.34

- 6.35 Determine  $C_{eq}$  caso todos os capacitores da Figura P6.35 sejam de  $6 \mu F$ .

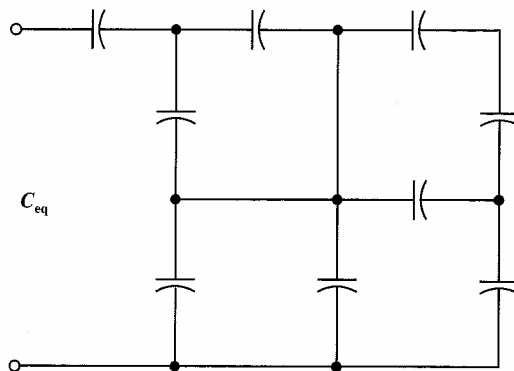


Figura P6.35

- 6.36 Dois capacitores  $C_1$  e  $C_2$  estão conectados em série. Se a tensão sobre a combinação é  $v_o(t)$ , mostre que a divisão de tensão entre os capacitores é

$$v_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_0 \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_0$$

onde  $v_1$  é a tensão sobre  $C_1$  e  $v_2$  é a tensão sobre  $C_2$ .

- 6.37 Se a tensão sobre a rede da Figura P6.37 é de 20 V, determine a tensão sobre cada indutor.

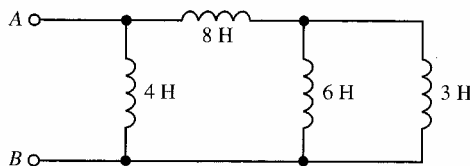


Figura P6.37

- 6.38 Caso a corrente fluindo no circuito da Figura P6.37 seja de 7 A, determine a corrente passando através de cada indutor.
- 6.39 Dada a rede mostrada na Figura P6.39, determine
- A indutância equivalente nos terminais A-B com os terminais C-D curto-circuitados.
  - A indutância equivalente nos terminais C-D com os terminais A-B em aberto.

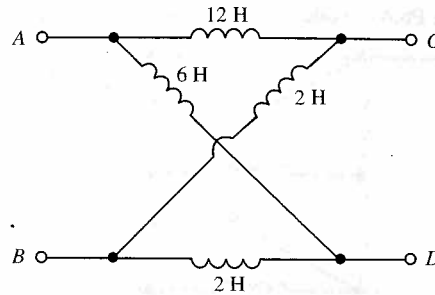


Figura P6.39

6.40 Determine a indutância total nos terminais da rede da Figura P6.40.

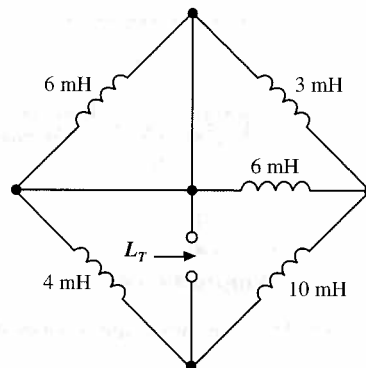


Figura P6.40

6.41 Determine a indutância  $L_T$  para a rede da Figura P6.41.

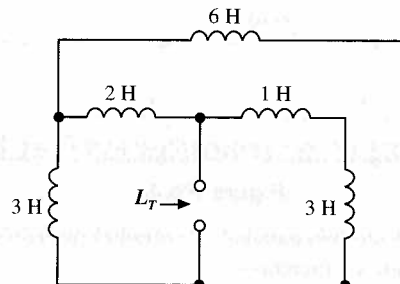


Figura P6.41

6.42 Determine a indutância  $L_T$  para a rede da Figura P6.42 (a) com a chave aberta e (b) com a chave fechada. Todos os indutores são de 12 mH.

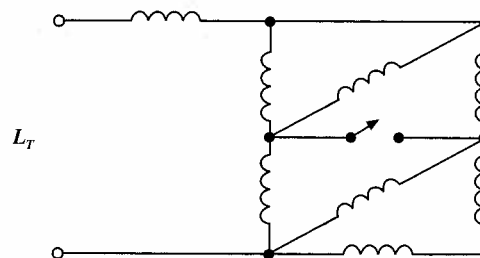


Figura P6.42



- 6.43 Determine  $L_T$  na rede da Figura P6.43. Todos os indutores são de 12 mH.

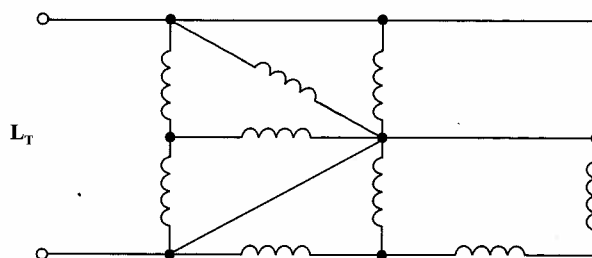


Figura P6.43

- 6.44 Determine o valor de  $L$  na rede da Figura P6.44 de modo que a indutância total  $L_T$  seja de 2 mH.

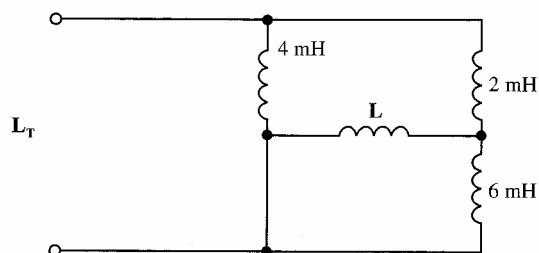


Figura P6.44

- 6.45 Determine o valor de  $L$  na rede da Figura P6.45 de modo que o valor de  $L_T$  seja de 2 mH.

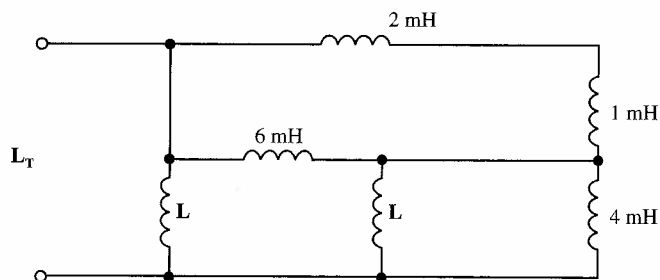


Figura P6.45

- 6.46 Dois indutores  $L_1$  e  $L_2$  estão conectados em paralelo. A corrente entrando na combinação é  $i_o(t)$ . Derive as expressões para a divisão de corrente entre os indutores.

# Circuitos RC e RL

Neste capítulo será estudado o que normalmente é conhecido como análise transiente de redes que contêm um único elemento de armazenamento. O comportamento do circuito em função do tempo é examinado depois de ocorrer uma súbita mudança na rede devido à abertura ou ao fechamento de chaves. O conceito de constante de tempo de uma rede é introduzido, e um procedimento passo a passo para obter a solução transiente da rede é apresentado. Por último, apresentamos as técnicas necessárias para desenvolver a análise transiente no PSPICE.

## 7.1 Desenvolvimento dos Procedimentos Fundamentais

Mostraremos durante o nosso estudo de circuitos *RC* e *RL* que a solução desses circuitos, isto é, a evolução da tensão ou corrente no tempo, exige a resolução de uma equação de diferencial de primeira ordem da forma

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t) \quad (7.1)$$

Apesar de existir um número de técnicas para se resolver uma equação desse tipo – por exemplo, separação de variáveis, método de fator integrante ou simplesmente tentar adivinhar uma solução – empregaremos aqui o procedimento delineado a seguir para se obter uma solução geral que é aplicável aos problemas com circuitos *RC* e *RL* que analisaremos neste capítulo.

Um teorema fundamental de equações diferenciais afirma que se  $x(t) = x_p(t)$  é qualquer solução para a Equação 7.1, e  $x(t) = x_c(t)$  é qualquer solução para a equação homogênea

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0 \quad (7.2)$$

então

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \quad (7.3)$$

é uma solução para a Equação original 7.1. O termo  $x_p(t)$  é chamado de *solução particular*, ou resposta forçada, e  $x_c(t)$  é chamada de *solução complementar*, ou resposta natural.

No momento, apenas a seguinte situação será considerada:  $f(t) = A$  (ou seja,  $f(t)$  é uma constante). A solução geral da equação diferencial nesse caso consiste de duas partes que são obtidas resolvendo-se as seguintes equações:

$$\frac{dx_p(t)}{dt} + ax_p(t) = A \quad (7.4)$$

$$\frac{dx_c(t)}{dt} + ax_c(t) = 0 \quad (7.5)$$

Uma vez que o lado direito da Equação 7.4 é uma constante, é razoável assumir que a solução  $x_p(t)$  deva também ser uma constante. Portanto, assumimos que

$$x_p(t) = K_1 \quad (7.6)$$

Substituindo essa constante na Equação 7.4, tem-se

$$K_1 = \frac{A}{a} \quad (7.7)$$

Examinando a Equação 7.5, notamos que

$$\frac{dx_c(t)/dt}{x_c(t)} = -a \quad (7.8)$$

Essa equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt} [\ln x_c(t)] = -a$$

Dessa forma,

$$\ln x_c(t) = -at + c$$

e, portanto,

$$x_c(t) = K_2 e^{-at} \quad (7.9)$$

Portanto, a solução da Equação 7.1 é

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_c(t) \\ &= \frac{A}{a} + K_2 e^{-at} \end{aligned} \quad (7.10)$$

A constante  $K_2$  pode ser determinada se o valor da variável independente  $x(t)$  é conhecido em determinado instante de tempo.

Uma vez que a solução da Equação 7.10 tenha sido obtida, são dados nomes a certos elementos da equação que são normalmente empregados em engenharia elétrica. Por exemplo, o termo  $A/a$  é referido como a *solução em regime estacionário* ou *em regime permanente*, isto é, o valor de  $x(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Em regime permanente o segundo termo da Equação 7.10 se torna desprezível. A constante  $1/a$  é chamada de a *constante de tempo* do circuito. Note que o segundo termo da Equação 7.10 é uma exponencial decrescente cujo valor é  $K_2$  para  $t = 0$ , se  $a > 0$ , e zero para  $t = \infty$ . A taxa em que essa exponencial decai é determinada pela constante de tempo  $T_c = 1/a$ . Um gráfico desse efeito é mostrado na Figura 7.1a. Como pode ser visto na figura, o valor de  $x_c(t)$  caiu de  $K_2$  para um valor de  $0,368K_2$  em uma constante de tempo, uma queda de 63,2%. Em duas constantes de tempo, o valor de  $x_c(t)$  caiu para  $0,135K_2$ , uma queda de 63,2% do valor no tempo  $t = T_c$ . Isto significa que o intervalo entre um ponto na curva e o valor final da curva está próximo de 63,2% de cada constante de tempo. Finalmente, depois de cinco constantes de tempo,  $x_c(t) = 0,0067K_2$ , que é menos que 1%.

Uma propriedade interessante da função exponencial mostrada na Figura 7.1a é que a descida inicial da curva intercepta o eixo de tempo em um valor de  $t = T_c$ . De fato, podemos pegar qualquer ponto da curva, não apenas o valor inicial, e encontrar a constante de tempo achando o tempo necessário para cobrir o intervalo de 63,2%. Por fim, a diferença entre uma constante de tempo pequena (ou seja, que corresponde a uma resposta rápida) e uma constante de tempo grande (ou seja, que corresponde a uma resposta lenta) é mostrada na Figura 7.1b. Essas curvas indicam que se o circuito tem uma constante de tempo pequena, ele

chega rapidamente ao valor final em regime permanente. Por outro lado, se a constante de tempo é grande, um tempo maior é necessário para que o circuito atinja um regime permanente. Em todo caso, note que para todos os efeitos práticos a resposta do circuito atinge o valor de regime permanente em cinco constantes de tempo (ou seja,  $5T_c$ ).

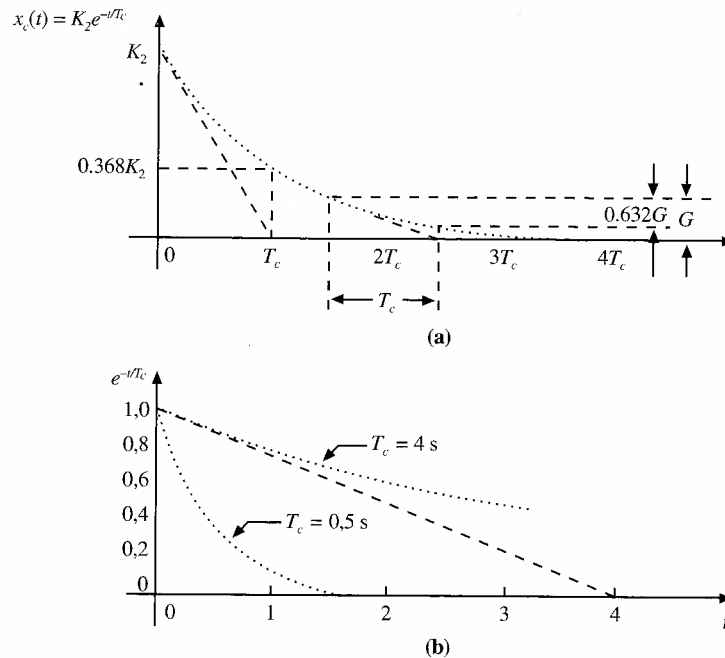


Figura 7.1 Ilustrações de constantes de tempo.

Note que a discussão anterior foi muito genérica, já que não foi assumida nenhuma forma específica de circuito — somente que ela resulta em uma equação diferencial de primeira ordem. A seguir, estudaremos dois circuitos específicos e então iremos delinear um método para manipular esses circuitos em geral. Os casos mais específicos serão analisados utilizando o método geral.

Considere o circuito mostrado na Figura 7.2a. No instante  $t = 0$ , a chave é fechada. A equação que descreve o circuito para  $t > 0$  é

$$\frac{1}{C} \int i(x) dx + Ri(t) = V_s$$

Tomando-se a derivada dessa equação em relação a  $t$  tem-se

$$\frac{i(t)}{C} + R \frac{di(t)}{dt} = 0$$

ou

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = 0$$

Seguindo nosso desenvolvimento anterior, assumimos que a solução dessa equação diferencial de primeira ordem é da forma

$$i(t) = K_2 e^{-t/T_c}$$

Substituindo essa solução na equação diferencial, tem-se

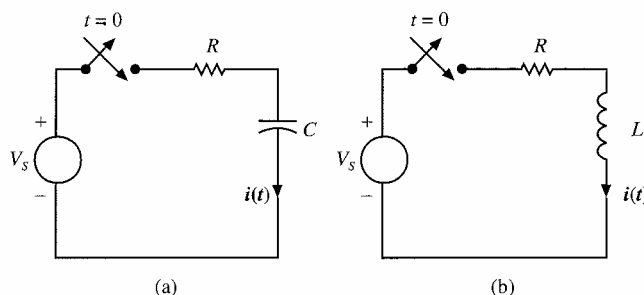
$$\begin{aligned} -\frac{K_2 e^{-t/T_c}}{T_c} + \frac{1}{RC} K_2 e^{-t/T_c} &= 0 \\ \left( -\frac{1}{T_c} + \frac{1}{RC} \right) K_2 e^{-t/T_c} &= 0 \end{aligned}$$

Nossa pressuposta solução é válida se  $K_2 e^{-t/T_c} = 0$  ou  $T_c = RC$ . O primeiro caso implica  $i(t) = 0$  para todo  $t$  e, portanto, é desconsiderado. Logo,

$$T_c = RC$$

e, desse modo, a solução é

$$i(t) = K_2 e^{-t/RC}$$



**Figura 7.2** Circuitos RC e RL.

A constante  $K_2$  é escolhida para que a solução completa satisfaça as condições particulares do circuito.

O circuito da Figura 7.2b pode ser examinado de maneira semelhante àquela empregada para o circuito da Figura 7.2a. A equação que descreve o circuito para  $t > 0$  é

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_s$$

ou

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{V_s}{L}$$

De nossas discussões anteriores assumimos uma solução da forma

$$i(t) = K_1 + K_2 e^{-t/T_c}$$

Substituindo essa expressão na equação diferencial, obtém-se

$$-\frac{1}{T_c} K_2 e^{-t/T_c} + \frac{R}{L} (K_1 + K_2 e^{-t/T_c}) = \frac{V_s}{L}$$

Equacionando a constante e os termos exponenciais, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{R}{L} K_1 &= \frac{V_s}{L} \\ \left( -\frac{1}{T_c} + \frac{R}{L} \right) K_2 e^{-t/T_c} &= 0 \end{aligned}$$

Nossa análise anterior indica que

$$K_1 = \frac{V_s}{R}$$

e

$$T_c = \frac{L}{R}$$

Portanto, a solução é

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + K_2 e^{-(R/L)t}$$

onde mais uma vez a constante  $K_2$  é escolhida para que a solução completa satisfaça as condições iniciais do circuito.

A importância dos dois circuitos da Figura 7.2 se baseia no fato de que descobriremos que, empregando o teorema de Thévenin, pode-se reduzir circuitos complicados a essas formas. Tais circuitos possuem constantes de tempo que definem a resposta do circuito.

Em geral, quando a entrada de um circuito RC ou RL, que contém um único elemento de armazenagem, é uma tensão ou corrente contínua, a solução da equação diferencial que descreve uma corrente ou tensão desconhecida *em qualquer lugar na rede* pode ser descrita como

$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/TC} \quad (7.11)$$

Note que este foi o caso do desenvolvimento acima e que o valor de  $K_1$ , a solução em regime permanente, foi obtido diretamente da equação diferencial. Como veremos mais adiante, na análise de circuitos elétricos é mais conveniente determinar as constantes e parâmetros de um circuito modificado.

Da Equação 7.11 podemos notar que como  $t \rightarrow \infty$ ,  $e^{-at} \rightarrow 0$  e  $x(t) = K_1$ . Portanto, se o circuito é resolvido para a variável  $x(t)$  em estado estacionário (ou seja,  $t \rightarrow \infty$ ) com o capacitor substituído por um circuito aberto [ $v$  é constante e portanto  $i = C(dv/dt) = 0$ ] ou o indutor substituído por um curto-circuito [ $i$  é constante e portanto  $v = L(di/dt) = 0$ ], então a variável  $x(t) = K_1$ . Note que uma vez que o capacitor ou indutor tenha sido removido, o circuito é um circuito dc com fontes e resistores constantes, e portanto somente análise dc é necessária na solução do regime permanente.

A constante  $K_2$  na Equação 7.11 pode também ser obtida via solução de um circuito dc no qual um capacitor é substituído por uma fonte de tensão ou um indutor é substituído por uma fonte de corrente. O valor da fonte de tensão para o capacitor ou fonte de corrente para o indutor é um valor conhecido em um instante de tempo. Em geral, usaremos o valor da condição inicial uma vez que este é normalmente conhecido, mas o valor a cada instante poderia ser usado. Esse valor pode ser obtido de várias maneiras e é frequentemente especificado como dado de entrada no enunciado do problema. Entretanto, uma situação mais provável é aquela em que uma chave é colocada no circuito e o valor inicial da tensão do capacitor ou corrente no indutor é determinado a partir do circuito anterior (ou seja, o circuito antes da chave comutar). Normalmente é assumido que o circuito anterior tenha alcançado o regime permanente, portanto a tensão sobre o capacitor ou a corrente através do indutor podem ser determinadas exatamente da mesma maneira que a usada para determinar  $K_1$ .

Finalmente, o valor da constante de tempo pode ser encontrado determinando-se a resistência equivalente de Thévenin nos terminais do elemento de armazenagem. Então  $T_c = R_{Th} C$  para um circuito RC, e  $T_c = L/R_{Th}$  para um circuito RL.

Vamos agora recapitular esse procedimento passo a passo.

**Passo 1.** Assumimos uma solução para a variável  $x(t)$  da forma  $x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/TC}$ .

**Passo 2.** Assumindo que o circuito original tenha chegado ao regime permanente antes que uma chave tenha sido inserida (conseqüentemente produzindo um novo circuito), desenhe esse circuito anterior com o capacitor substituído por um circuito aberto ou o indutor substituído por um curto-circuito. Determine a tensão sobre o capacitor,  $v_C(0^-)$ , ou a corrente através do indutor,  $i_L(0^-)$ , antes da mudança da chave.

**Passo 3.** Assumindo que a energia do elemento de armazenagem não pode mudar em tempo zero, desenhe o circuito, válido somente em  $t = 0^+$ . As chaves estão em suas novas posições e o capacitor é substituído por uma fonte de tensão com um valor de  $v_C(0^+) = v_C(0^-)$  ou o indutor é substituído por uma fonte de corrente com o valor  $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ . Resolva para o valor inicial da variável  $x(0^+)$ .

**Passo 4.** Assumindo que o regime permanente tenha sido alcançado depois que as chaves tenham sido colocadas, desenhe o circuito equivalente, válido para  $t > 5T_c$ . Para isso, substitua o capacitor por um circuito aberto ou o indutor por um curto-circuito. Determine o valor de regime permanente da variável

$$x(t) \Big|_{t > 5T_c} = x(\infty)$$

**Passo 5.** Uma vez que a constante de tempo para todas as tensões e correntes no circuito será a mesma, ela pode ser obtida reduzindo-se todo o circuito a apenas uma fonte conectada em série a um resistor e um elemento de armazenagem (ou seja, capacitor ou indutor). Isto é conseguido derivando-se o equivalente de Thévenin a partir dos terminais do elemento de armazenagem. Esse circuito equivalente de Thévenin é obtido considerando-se o circuito a partir dos terminais do elemento de armazenagem. A constante de tempo para um circuito contendo um capacitor é  $T_c = R_{Th} C$ , e para um circuito contendo um indutor é  $T_c = L/R_{Th}$ .

**Passo 6.** Utilizando os resultados dos passos 3, 4 e 5, podemos avaliar as constantes no passo 1 como

$$x(0+) = K_1 + K_2$$

$$x(\infty) = K_1$$

e, portanto,  $K_1 = x(\infty)$ ,  $K_2 = x(0+) - x(\infty)$  e desse modo a solução é

$$x(t) = x(\infty) + [x(0+) - x(\infty)]e^{-t/T_C}$$

Lembre-se, no entanto, que essa forma de solução se aplica somente a um circuito de primeira ordem com fontes dc constantes. Se as fontes não são dc, a resposta forçada irá diferir. Em geral, a resposta forçada é da mesma forma que as funções forçadas (fontes) e suas derivadas.

## 7.2 Circuitos sem Fontes

Começamos nossa análise de redes sem fontes examinando o circuito, que consiste de um capacitor inicialmente carregado em série com um resistor como mostrado na Figura 7.3a. Foi assumido que o capacitor está carregado a uma tensão  $v(t) = V_o$  no instante  $t = 0$ . Uma vez que a rede não tem nenhuma fonte independente, a resposta do circuito depende somente dos elementos passivos do circuito e da tensão inicial. As correntes e tensões no circuito para  $t > 0$  podem ser obtidas através da LKC. Empregando a LKC ao nó superior, tem-se

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} = 0$$

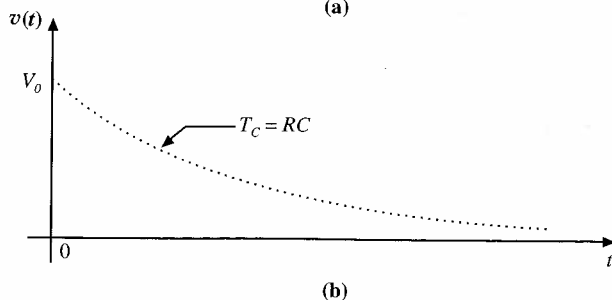
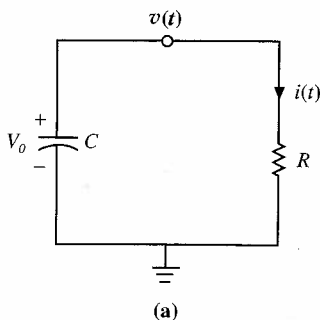
ou

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v(t) = 0$$

Vamos agora aplicar o procedimento passo a passo na análise desse circuito.

**Passo 1.**  $v(t)$  é da forma

$$v(t) = K_1 + K_2 e^{-t/T_C}$$



**Figura 7.3** Circuito RC sem fontes e sua resposta a uma condição inicial.

**Passo 2.** A tensão inicial sobre o capacitor é dada como  $v_C(0-) = V_o$ .

**Passo 3.**  $v_C(0-) = v_C(0+) = V_o$ . Uma vez que a incógnita é  $v(t)$ , que é igual à tensão sobre o capacitor  $v_C(t)$ ,  $v(0+) = V_o$ .

**Passo 4.** Se o capacitor for substituído por um circuito aberto, a tensão  $v(t)$  sobre o resistor será zero. Desse modo, para  $t > 5 T_c$ ,  $v(\infty) = 0$ .

**Passo 5.** A resistência equivalente de Thévenin, examinando o circuito dos terminais do capacitor, é obviamente  $R_{Th} = R$ . Portanto, a constante de tempo do circuito é  $T_c = RC$ .

**Passo 6.** Utilizando os resultados obtidos acima, temos que

$$\begin{aligned} v(\infty) &= 0 = K_1 \\ v(0+) &= V_0 = K_1 + K_2 \end{aligned}$$

Logo,

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC}$$

Note que a corrente no resistor tem a mesma forma que a tensão, e é dada pela expressão

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

No instante  $t = 0$ , a energia armazenada no capacitor é

$$w_c(0+) = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad \text{joules}$$

À medida que o tempo passa, a tensão diminui, como mostrado na Figura 7.3b, e dessa forma a energia armazenada no capacitor também diminui. Essa energia diminui, pois é dissipada pelo resistor. A energia total dissipada pelo resistor é

$$\begin{aligned} w_R(\infty) &= \int_0^\infty p_R(x) dx \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{V_0}{R} e^{-x/RC} \right)^2 R dx \\ &= \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2x/RC} dx \\ &= \frac{1}{2} C V_0^2 \quad \text{joules} \end{aligned}$$

Isto é, naturalmente, igual à energia inicial armazenada no capacitor.

É interessante notar que se tivéssemos empregado a LKT para determinar a equação que descreve o circuito, o resultado teria sido

$$\frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx - V_0 + i(t)R = 0$$

Diferenciando a equação, tem-se

$$\frac{i(t)}{C} + R \frac{di(t)}{dt} = 0$$

uma vez que

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

Então

$$\frac{v(t)}{RC} + \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

que é, obviamente, a equação original na nossa análise.

### Exemplo 7.1

Considere o circuito mostrado na Figura 7.4a. Assumindo que a chave tenha estado na posição 1 por um longo tempo, no instante  $t = 0$  a chave é mudada para a posição 2. Desejamos calcular a corrente  $i(t)$  para  $t > 0$ .



**Passo 1.** Assumimos que a corrente será da forma

$$i(t) = K_1 + K_2 e^{-t/T_C}$$

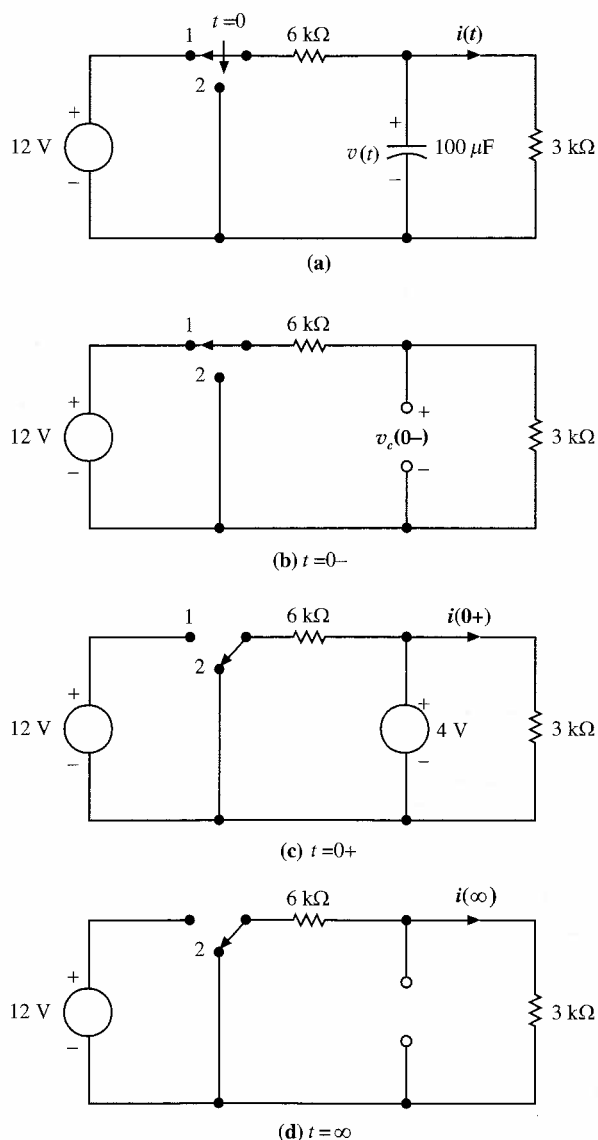
**Passo 2.** No regime permanente anterior à mudança da chave, a tensão inicial do capacitor é dada na Figura 7.4b como

$$v_C(0-) = \frac{(12)(3)}{6+3} = 4 \text{ V}$$

**Passo 3.** O novo circuito, válido somente para  $t = 0+$ , é mostrado na Figura 7.4c. O valor da fonte de tensão que substitui o capacitor é  $v_C(0-) = v_C(0+) = 4 \text{ V}$ . Portanto, mais uma vez, já que a tensão está em volts e a resistência em quilohms, a corrente estará em miliampères.

$$i(0+) = \frac{4}{3} \text{ mA}$$

**Passo 4.** O circuito equivalente, válido para  $t > 5T_C$ , está mostrado na Figura 7.4d. Uma vez que não há fontes, o valor de  $i(\infty) = 0$ .



**Figura 7.4** Análise de um circuito transiente RC.

**Passo 5.** A resistência equivalente de Thévenin, obtida examinando-se o circuito dos terminais em circuito aberto do capacitor na Figura 7.4d, é

$$R_{Th} = \frac{(6)(3)}{6+3} = 2 \text{ k}\Omega$$

Logo, a constante de tempo do circuito é

$$\begin{aligned} T_C &= R_{Th} C \\ &= (2)(10^3)(100)(10^{-6}) \\ &= 0,2 \text{ s} \end{aligned}$$

**Passo 6.** De nossa análise anterior

$$\begin{aligned} K_1 &= i(\infty) = 0 \\ K_2 &= i(0+) - i(\infty) = \frac{4}{3} \text{ mA} \end{aligned}$$

e desse modo

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{4}{3} e^{-t/0,2} \\ &= 1,33 e^{-5t} \text{ mA} \end{aligned}$$

## Exercícios

**E7.1** Determine  $v_C(t)$  para  $t > 0$  no circuito mostrado na Figura E7.1

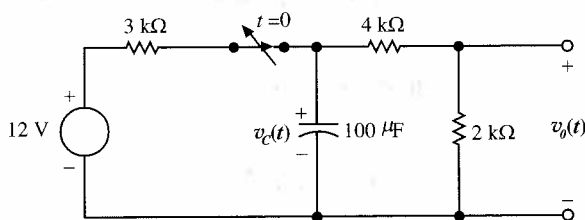


Figura E7.1

**Resp.:**  $v_C(t) = 8e^{-t/0,6} \text{ V}$ .

**E7.2** Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na Figura E7.1.

**Resp.:**  $v_o(t) = \frac{8}{3} e^{-t/0,6} \text{ V}$ .

Vamos agora considerar o circuito RL sem fonte mostrado na Figura 7.5a. Foi assumido que o indutor tem uma corrente inicial de  $i(t) = I_o$  no instante  $t = 0$ . Aplicando-se a LKT ao longo, do laço tem-se

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$$

ou

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = 0$$

Mais uma vez, empregamos o procedimento definido acima para analisar esse circuito:

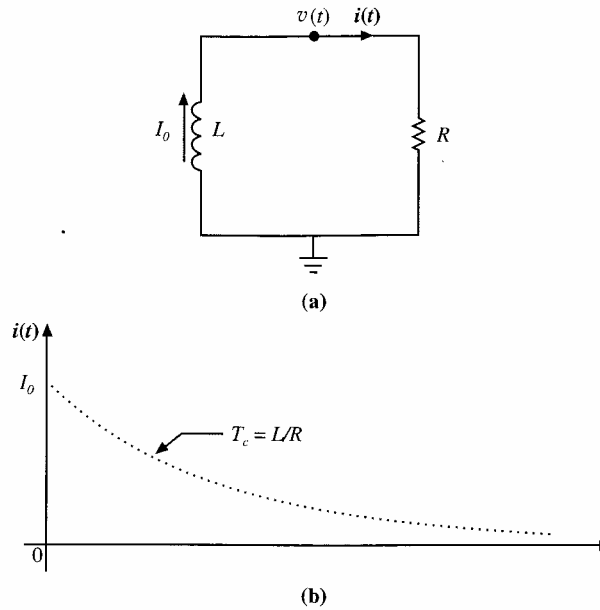
**Passo 1.**  $i(t)$  é da forma  $K_1 + K_2 e^{-t/T_C}$ .

**Passo 2.** A corrente inicial através do indutor é  $i_L(0-) = I_o$ .

**Passo 3.**  $i(0+) = i_L(0+) = i_L(0-) = I_o$ .

**Passo 4.** Se o indutor for substituído por um curto-circuito,  $v(t)$  para  $t > 5 T_C$  será zero e daí  $i(\infty) = 0$ .

**Passo 5.** A resistência equivalente de Thévenin, examinando-se o circuito dos terminais do indutor é  $R_{Th} = R$ ; portanto, a constante de tempo do circuito é  $T_C = L/R$ .



**Figura 7.5** Circuito  $RL$  sem fonte e sua resposta a uma condição inicial.

**Passo 6.** Os resultados acima mostram que

$$i(\infty) = K_1 = 0$$

Daí

$$i(0+) = K_1 + K_2 = I_0$$

e desse modo

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

No instante  $t = 0$ , a energia armazenada no indutor é

$$w_L(0+) = w_L(0-) = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad \text{joules}$$

À medida que o tempo passa, a corrente diminui, como mostrado na Figura 7.5b, e dessa forma a energia armazenada no indutor também diminuirá. Essa energia é dissipada pelo resistor e é dada pela expressão

$$\begin{aligned} w_R(\infty) &= \int_0^{\infty} p_R(t) dt \\ &= RI_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2Rt/L} dt \\ &= \frac{1}{2} LI_0^2 \quad \text{joules} \end{aligned}$$

Esse valor coincide com aquele da energia inicial armazenada no indutor.

### Exemplo 7.2

Vamos agora examinar o circuito mostrado na Figura 7.6a. No instante  $t = 0$ , a chave é aberta e desejamos calcular a corrente  $i(t)$  para  $t > 0$ .

**Passo 1.** Assume-se que a corrente é da forma

$$i(t) = K_1 + K_2 e^{-t/T_C}$$

**Passo 2.** A corrente inicial do indutor em regime permanente pode ser determinada a partir da Figura 7.6b como se segue

$$i_L(0^-) = \frac{36}{2 + \frac{(6)(12)}{6+12}} \left( \frac{12}{18} \right)$$

$$= 4 \text{ A}$$

**Passo 3.** O novo circuito, válido somente para  $t = 0^+$ , está mostrado na Figura 7.6c. O valor da corrente que substitui o indutor é  $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 4 \text{ A}$ . Portanto,

$$i(0^+) = -4 \text{ A}$$

**Passo 4.** O circuito equivalente, válido somente para  $t > 5T_c$ , é dado na Figura 7.6d. Já que não há nenhuma fonte, o valor de  $i(\infty) = 0$ .

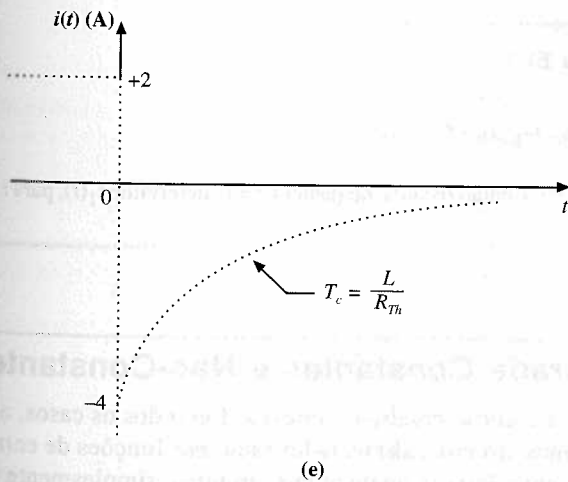
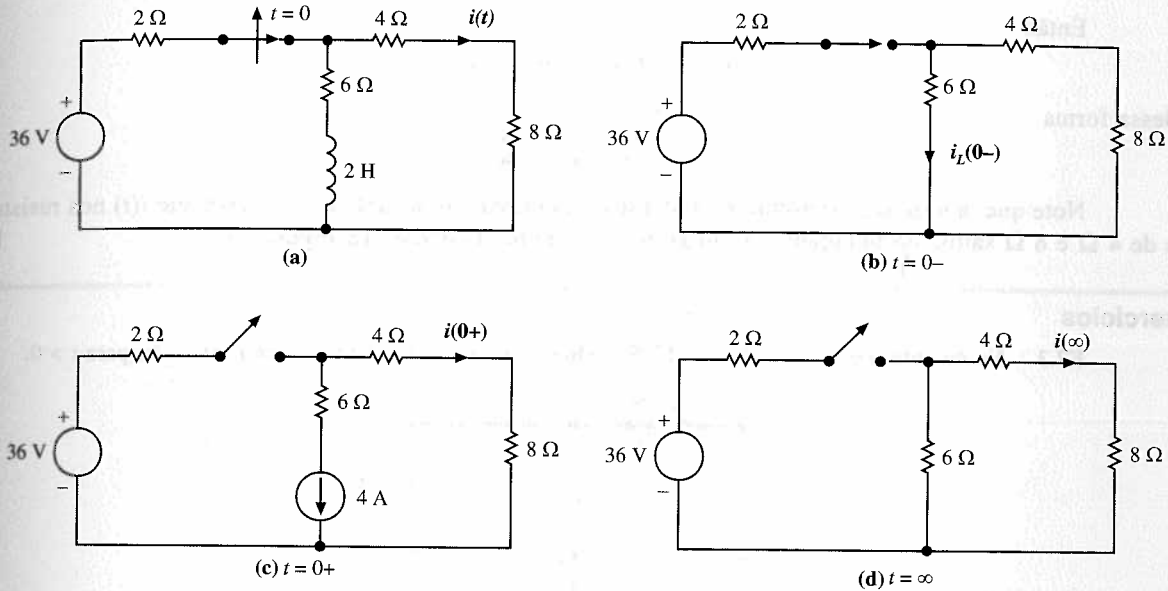


Figura 7.6 Análise de um circuito RL.

**Passo 5.** A resistência equivalente de Thévenin, encontrada examinando-se o circuito dos terminais do indutor, é

$$R_{Th} = 6 + 4 + 8$$

$$= 18 \Omega$$

Logo, a constante de tempo do circuito é

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{L}{R_{Th}} \\ &= \frac{2}{18} \\ &= \frac{1}{9} \text{ s} \end{aligned}$$

**Passo 6.** Da análise anterior,

$$K_1 = i(\infty) = 0$$

Então

$$K_2 = i(0+) - i(\infty) = -4$$

e dessa forma

$$i(t) = -4e^{-9t} \text{ A}$$

Note que, apesar de a corrente no indutor ser contínua no instante  $t = 0$ , a corrente  $i(t)$  nos resistores de  $4 \Omega$  e  $8 \Omega$  saltou abruptamente no instante  $t = 0$ , como mostrado na Figura 7.6e. ■

### Exercícios

**E7.3** No circuito mostrado na Figura E7.3, a chave abre no instante  $t = 0$ . Determine  $i_1(t)$  para  $t > 0$ .

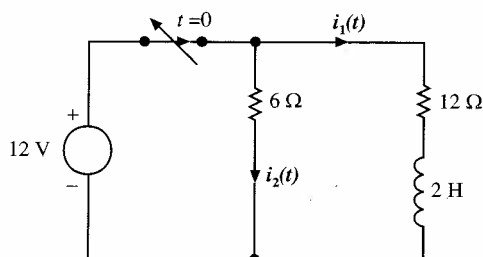


Figura E7.3

*Resp.:*  $i_1(t) = 1e^{-9t} \text{ A}$ .

**E7.4** Determine a expressão para  $i_2(t)$ ,  $t > 0$ , na Figura E7.3.

*Resp.:*  $i_2(t) = -1e^{-9t} \text{ A}$ .

**E7.5** Na Figura E7.3, se a chave for aberta para  $t < 0$  e então fechada no instante  $t = 0$ , determine  $i_1(t)$ , para  $t > 0$ .

*Resp.:*  $i_1(t) = 1 - e^{-6t} \text{ A}$ .

## 7.3 Circuitos com Funções de Entrada Constantes e Não-Constantes

Na Seção 7.2, estudou-se a resposta natural dos circuitos a certas condições iniciais. Em todos os casos, a variável  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Nesta seção, examinaremos circuitos alimentados tanto por funções de entrada constantes quanto por condições iniciais de armazenamento. Para se analisar tais circuitos, simplesmente empregaremos o mesmo procedimento geral descrito acima. Nesse caso, no entanto, achamos que  $K_1 = x(\infty) \neq 0$ ; isto é, o estado estacionário é diferente de zero.

### Exemplo 7.3

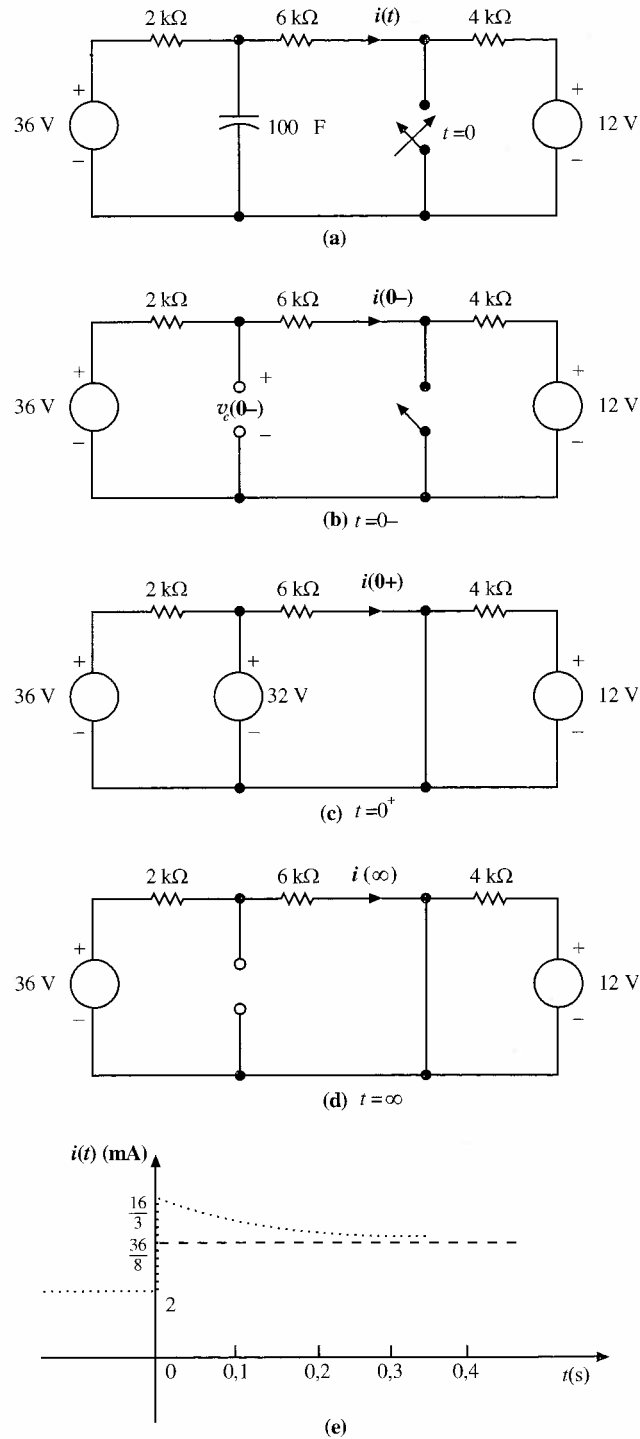
Considere o circuito mostrado na Figura 7.7a. O circuito está em regime permanente antes de  $t = 0$ , quando a chave é fechada. Vamos calcular a corrente  $i(t)$  para  $t > 0$ .

**Passo 1.**  $i(t)$  é da forma  $K_1 + K_2 e^{-t/T_c}$ .

**Passo 2.** A tensão inicial sobre o capacitor é calculada da Figura 7.7b como

$$\begin{aligned} v_C(0-) &= 36 - (2)(2) \\ &= 32 \text{ V} \end{aligned}$$

**Passo 3.** O novo circuito, válido somente para  $t = 0+$ , é mostrado na Figura 7.7c.



**Figura 7.7** Análise de um circuito transiente RC com uma função de entrada constante.

O valor da fonte de tensão que substitui o capacitor é  $v_C(0-) = v_C(0+) = 32$  V. Dessa maneira,

$$i(0+) = \frac{32}{6} = \frac{16}{3} \text{ mA}$$

**Passo 4.** O circuito equivalente, válido para  $t > 5T_C$ , é mostrado na Figura 7.7d. A corrente  $i(\infty)$  causada pela fonte de 36 V é

$$i(\infty) = \frac{36}{2+6} = \frac{36}{8} \text{ mA}$$

**Passo 5.** A resistência equivalente de Thévenin, obtida examinando-se o circuito aberto nos terminais do capacitor da Figura 7.7d, é

$$R_{Th} = \frac{(2)(6)}{2+6} = \frac{3}{2} \text{ k}\Omega$$

Portanto, a constante de tempo do circuito é

$$\begin{aligned} T_C &= R_{Th} C \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)(10^3)(100)(10^{-6}) \\ &= 0,15 \text{ s} \end{aligned}$$

**Passo 6.**

$$\begin{aligned} K_1 &= i(\infty) = \frac{36}{8} \text{ mA} \\ K_2 &= i(0+) - i(\infty) = i(0+) - K_1 \\ &= \frac{16}{3} - \frac{36}{8} \\ &= \frac{5}{6} \text{ mA} \end{aligned}$$

Portanto,

$$i(t) = \frac{36}{8} + \frac{5}{6} e^{-t/0,15} \text{ mA}$$

Mais uma vez vemos que, apesar de a tensão sobre o capacitor ser contínua em  $t = 0$ , a corrente  $i(t)$  no resistor de  $6 \Omega$ , no instante  $t = 0$ , salta de 2 mA para  $5 \frac{1}{3}$  mA e finalmente cai para  $4 \frac{1}{2}$  mA. ■

### Exemplo 7.4

Assumiu-se que o circuito mostrado na Figura 7.8a está em regime permanente antes do fechamento da chave no instante  $t = 0$ . Desejamos calcular a tensão  $v(t)$  para  $t > 0$ .

**Passo 1.**  $v(t)$  é da forma  $K_1 + K_2 e^{-t/T_C}$ .

**Passo 2.** Na Figura 7.8b vemos que

$$\begin{aligned} i_L(0-) &= \frac{24}{4 + \frac{(6)(3)}{6+3}} \left( \frac{6}{6+3} \right) \\ &= \frac{8}{3} \text{ A} \end{aligned}$$

**Passo 3.** O novo circuito, válido somente para  $t = 0+$ , é mostrado na Figura 7.8c, que é equivalente ao circuito mostrado na Figura 7.8d. O valor da fonte de corrente que substitui o indutor é  $i_L(0-) = i_L(0+) = 8/3$  A. A tensão nodal  $v_1(0+)$  pode ser determinada do circuito da Figura 7.8d usando-se uma equação de nó único, e  $v(0+)$  é igual à diferença entre a tensão da fonte e  $v_1(0+)$ . A equação para  $v_1(0+)$  é

$$\frac{v_1(0+) - 24}{4} + \frac{v_1(0+)}{6} + \frac{8}{3} + \frac{v_1(0+)}{12} = 0$$

ou

$$v_1(0+) = \frac{20}{3} \text{ V}$$

Então

$$\begin{aligned} v(0+) &= 24 - v_1(0+) \\ &= \frac{52}{3} \text{ V} \end{aligned}$$

**Passo 4.** O circuito equivalente para a condição em estado estacionário depois do fechamento da chave é dado na Figura 7.8e. Note que os resistores de  $6 \Omega$ ,  $12 \Omega$ ,  $1 \Omega$  e  $2 \Omega$  estão curto-circuitados, e portanto  $v(\infty) = 24 \text{ V}$ .

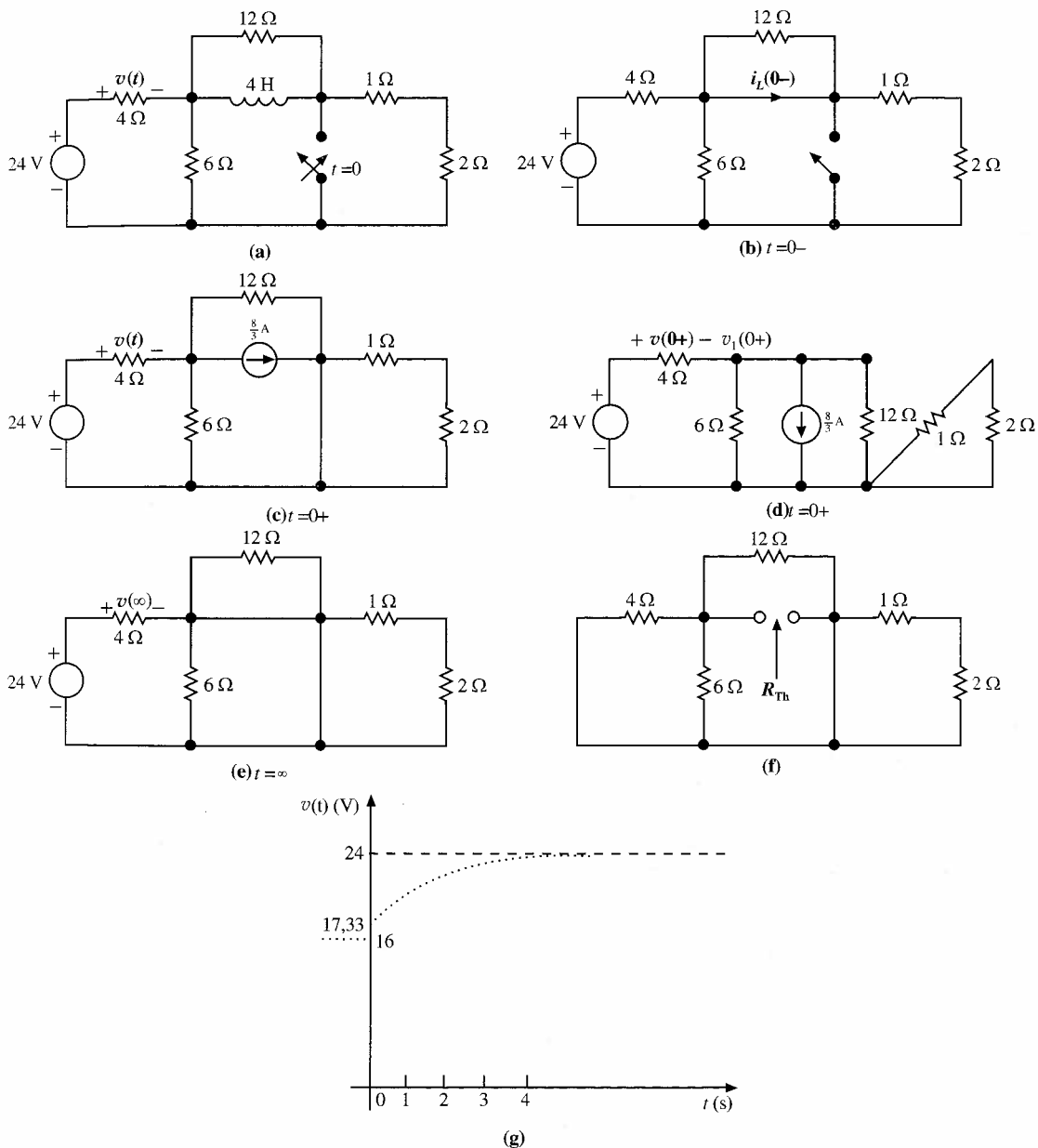


Figura 7.8 Análise transiente de um circuito RL com entrada constante.

**Passo 5.** A resistência equivalente de Thévenin é achada examinando-se o circuito a partir dos terminais do indutor. Esse circuito está mostrado na Figura 7.8f. Deve ser notado que  $R_{Th}$  é a combinação dos resistores de  $4 \Omega$ ,  $6 \Omega$  e  $12 \Omega$  em paralelo. Logo,  $R_{Th} = 2 \Omega$ , e a constante de tempo do circuito é



$$T_c = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{4}{2} = 2 \text{ s}$$

**Passo 6.** Da análise anterior, achamos que

$$K_1 = v(\infty) = 24$$

$$K_2 = v(0+) - v(\infty) = -\frac{20}{3}$$

e desse modo

$$v(t) = 24 - \frac{20}{3} e^{-t/2} \text{ V}$$

Da Figura 7.8b vemos que o valor de  $v(t)$  antes do fechamento da chave é de 16 V. Portanto, a resposta do circuito  $v(t)$ , no tempo, é mostrada na Figura 7.8g. ■

### Exercícios

**E7.6** Considere a rede da Figura E7.6. A chave se abre no instante  $t = 0$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

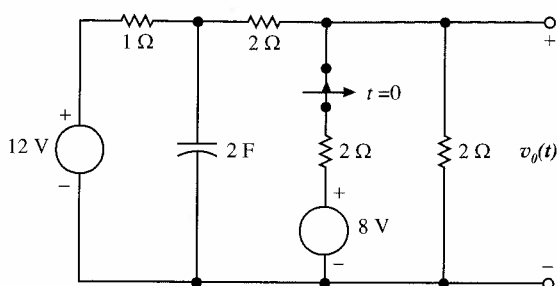


Figura E7.6

**Resp.:**  $v_o(t) = \frac{24}{5} + \frac{1}{5} e^{-(5/8)t} \text{ V}$ .

**E7.7** Considere a rede da Figura E7.7. Se a chave se abrir no instante  $t = 0$ , ache a tensão de saída  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

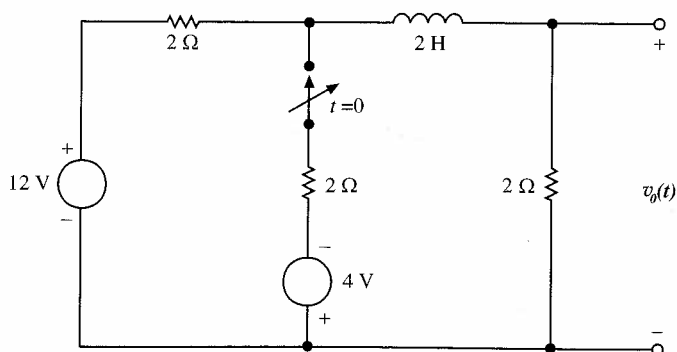


Figura E7.7

**Resp.:**  $v_o(t) = 6 - \frac{10}{3} e^{-2t} \text{ V}$ .

### Exemplo 7.5

O circuito mostrado na Figura 7.9a chegou ao estado estacionário com a chave na posição 1. No instante  $t = 0$ , a chave é mudada da posição 1 para a posição 2. Deseja-se calcular  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

**Passo 1.**  $v_o(t)$  é da forma  $K_1 + K_2 e^{-t/T_c}$ .

**Passo 2.** Utilizando o circuito da Figura 7.9b, podemos calcular  $i_L(0-)$ .

$$i_A = \frac{12}{4} = 3 \text{ A}$$

Então

$$i_L(0^-) = \frac{12 + 2i_A}{6} = \frac{18}{6} = 3 \text{ A}$$

**Passo 3.** O novo circuito, válido somente para  $t = 0^+$ , é mostrado na Figura 7.9c. O valor da fonte de corrente que substitui o indutor é  $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 3 \text{ A}$ . Por causa da fonte de corrente

$$v_o(0^+) = (3)(6) = 18 \text{ V}$$

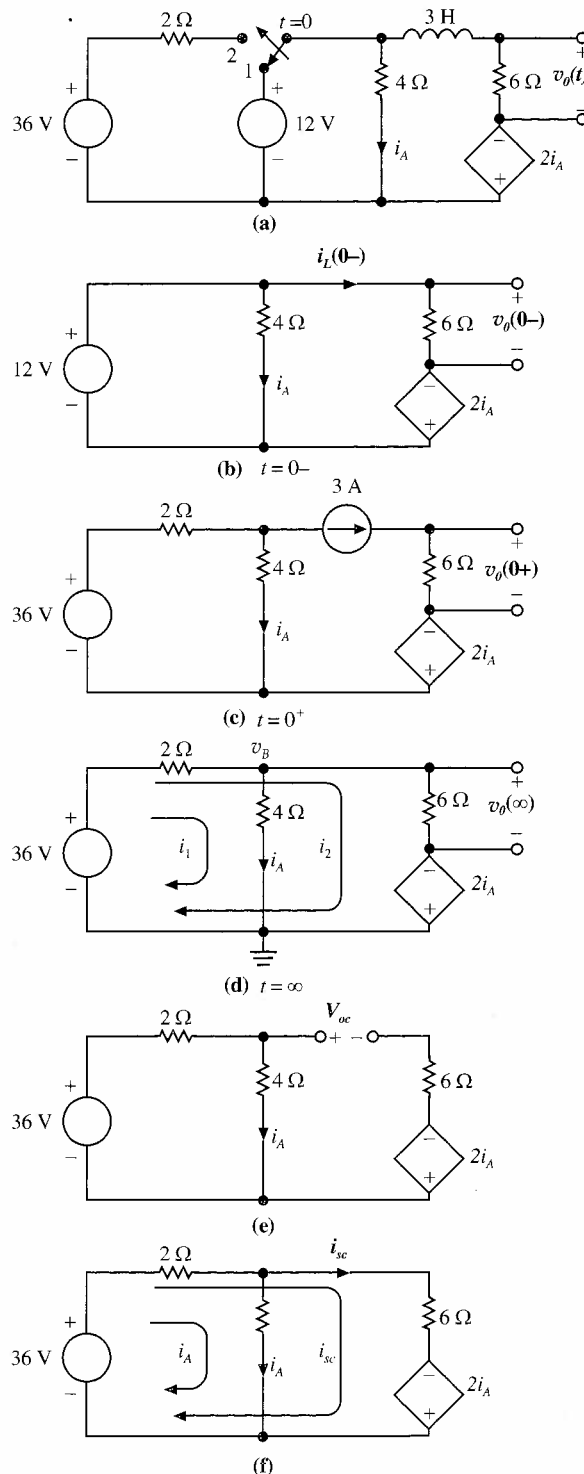


Figura 7.9 Análise transiente de um circuito RL contendo uma fonte dependente.

**Passo 4.** O circuito equivalente para a condição em regime permanente depois do fechamento é dado na Figura 7.9d. Utilizando as tensões e correntes definidas na figura, podemos calcular  $v_o(\infty)$  de várias maneiras. Por exemplo, utilizando equações nodais podemos achar  $v_o(\infty)$ , ou seja,

$$\frac{v_B - 36}{2} + \frac{v_B}{4} + \frac{v_B - 2i'_A}{6} = 0$$

$$i'_A = \frac{v_B}{4}$$

$$v_o(\infty) = v_B + 2i'_A$$

ou, usando equações de laço,

$$36 = 2(i_1 + i_2) + 4i_1$$

$$36 = 2(i_1 + i_2) + 6i_2 - 2i_1$$

$$v_o(\infty) = 6i_2$$

Usando um desses métodos, chegamos a  $v_o(\infty) = 27$  V.

**Passo 5.** A resistência equivalente de Thévenin pode ser obtida via  $v_{oc}$  e  $i_{sc}$ , por causa da presença da fonte dependente. Da Figura 7.9e, note que

$$i''_A = \frac{36}{2 + 4} = 6 \text{ A}$$

E, portanto,

$$v_{oc} = (4)(6) + 2(6)$$

$$= 36 \text{ V}$$

A partir da Figura 7.9f, podemos escrever as seguintes equações de laço:

$$36 = 2(i'''_A + i_{sc}) + 4i'''_A$$

$$36 = 2(i'''_A + i_{sc}) + 6i_{sc} - 2i'''_A$$

Resolvendo-se tais equações para  $i_{sc}$ , tem-se

$$i_{sc} = \frac{36}{8} \text{ A}$$

Logo,

$$R_{Th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{36}{36/8} = 8 \Omega$$

E, a partir daí, a constante de tempo do circuito é

$$T_C = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{3}{8} \text{ s}$$

**Passo 6.** Utilizando a informação acima, podemos derivar a equação final para  $v_o(t)$ :

$$K_1 = v_o(\infty) = 27$$

$$K_2 = v_o(0+) - v_o(\infty) = 18 - 27 = -9$$

Portanto,

$$v_o(t) = 27 - 9e^{-t(3/8)} \text{ V}$$

## Exercício

E7.8 Caso a chave na rede da Figura E7.8 se feche no instante  $t = 0$ , determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

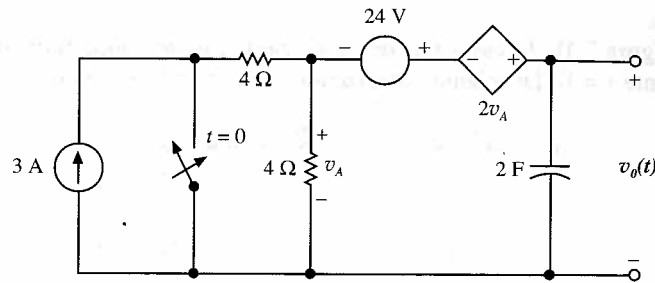


Figura E7.8

Resp.:  $v_0(t) = 24 + 36e^{-(t/12)} \text{ V}$ .

Neste ponto, é importante frisar que nem toda ação da chave ocorrerá no instante  $t = 0$ . Ela pode ocorrer a qualquer instante  $t_0$ . Nesse caso, os resultados da análise passo a passo produzirá as seguintes equações:

$$x(t_0) = K_1 + K_2$$

$$x(\infty) = K_1$$

e

$$x(t) = x(\infty) + [x(t_0) - x(\infty)]e^{-(t-t_0)/T_C} \quad t > t_0$$

A função é deslocada no tempo de  $t_0$  segundos.

Finalmente, deveríamos notar que se houver mais de uma fonte independente, podemos simplesmente empregar o princípio da superposição para obter a resposta total.

Até agora consideramos somente fontes que eram constantes. Apesar de isso representar um tipo importante de problema, não é de modo algum o único nem necessariamente o mais importante.

Retornando à Equação 7.1, perguntamos: “Qual será a solução se  $f(t)$  não for uma constante e a equação da rede for na verdade como se segue?”

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t) \quad (7.12)$$

Lembre-se que  $x(t)$  consiste de duas partes: a resposta natural (solução complementar) e a resposta forçada (solução particular). Isto é,

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (7.13)$$

onde  $x_c(t)$  e  $x_p(t)$  devem satisfazer as equações

$$\frac{dx_c(t)}{dt} + ax_c(t) = 0 \quad (7.14)$$

e

$$\frac{dx_p(t)}{dt} + ax_p(t) = f(t) \quad (7.15)$$

Assim  $x_c(t)$  deve ser da forma

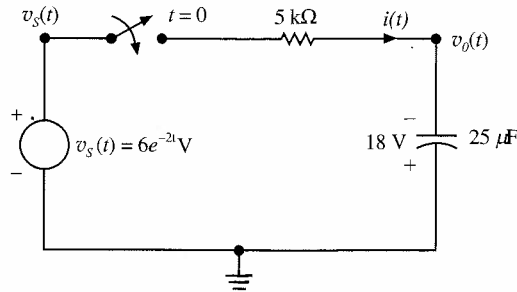
$$x_c(t) = k_2 e^{-at} \quad (7.16)$$

Entretanto, uma vez que  $f(t)$  não é mais uma constante,  $x_p(t)$  tampouco será. Apesar de haver inúmeros métodos matemáticos para determinar a forma apropriada para  $x_p(t)$ , empregaremos um método dedutivo aqui. Um método que é sistemático e frequentemente mais eficiente será introduzido no Capítulo 17.

Uma inspeção cuidadosa da Equação 7.15 sugere que  $x_p(t)$  deve consistir de termos semelhantes a  $f(t)$  e suas derivadas.

**Exemplo 7.6**

Considere o circuito da Figura 7.10. O capacitor tem uma carga inicial e uma fonte decrescente exponencialmente é aplicada no instante  $t = 0$ . Desejamos determinar tanto  $v_o(t)$  e  $i(t)$  para  $t > 0$ .



**Figura 7.10** Circuito RC com uma função de excitação não-constante.

Uma análise nodal produz a equação

$$C \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{v_o(t) - v_s(t)}{R} = 0 \quad t > 0$$

ou

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + 8v_o(t) = 48e^{-2t}$$

A resposta natural agora (solução complementar) deve, como acima, satisfazer a equação homogênea

$$\frac{dv_{oc}(t)}{dt} + 8v_{oc}(t) = 0$$

que conduz a

$$v_{oc}(t) = K_2 e^{-8t}$$

A resposta forçada (solução particular) deve satisfazer a equação

$$\frac{dv_{op}(t)}{dt} + 8v_{op}(t) = 48e^{-2t}$$

Deduzimos que  $v_{op}(t)$  deve ser da forma da função de entrada,  $e^{-2t}$ , e sua derivada, que nesse caso é também  $e^{-2t}$ . Além disso, assumimos que

$$v_{op}(t) = K_1 e^{-2t}$$

e, substituindo essa solução de volta na equação diferencial, podemos determinar o valor necessário de  $K_1$ .

$$\frac{d}{dt}(K_1 e^{-2t}) + 8(K_1 e^{-2t}) = 48e^{-2t}$$

$$(-2 + 8)(K_1 e^{-2t}) = 48e^{-2t}$$

$$K_1 = 8$$

Portanto, a solução total é

$$v_o(t) = 8e^{-2t} + K_2 e^{-8t}$$

No entanto, uma vez que  $v_o(0) = -18$ ,  $K_2$  pode ser obtida da expressão para  $v_o(t)$  como

$$v_o(0) = -18 = 8e^{-2(0)} + K_2 e^{-8(0)}$$

ou

$$K_2 = -26$$

e então

$$v_o(t) = 8e^{-2t} - 26e^{-8t} \text{ V} \quad t > 0$$

Para determinar  $i(t)$ , note que

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv_o(t)}{dt} \\ &= 25 \times 10^{-6} (-16e^{-2t} + 208e^{-8t}) \\ &= -0,4e^{-2t} + 5,2e^{-8t} \text{ mA} \quad t > 0 \end{aligned}$$

## 7.4 Resposta ao Pulso

Até agora temos examinado redes em que fontes de tensão ou corrente eram repentinamente conectadas aos circuitos. Como um dos resultados dessa aplicação repentina de uma fonte, tensões e correntes no circuito são forçadas a mudar abruptamente. Uma função de entrada cujo valor muda de uma maneira descontínua ou tem uma derivada descontínua é chamada de *função singular*. Duas dessas funções que são muito importantes na análise de circuitos são a função impulso unitário e a função degrau unitário. Adiademos a discussão da primeira até um capítulo posterior e nos concentraremos na última.

A função *degrau unitário* é definida da seguinte forma:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Em outras palavras, essa função adimensional é igual a zero para valores negativos do argumento e igual a 1 para valores positivos do argumento. Ela não é definida para um argumento zero, pois nesse ponto a função é descontínua. Um gráfico do degrau unitário é mostrado na Figura 7.11a. O degrau unitário é adimensional, e portanto uma tensão em degrau de  $V_o$  volts ou uma corrente em degrau de  $I_o$  ampères são escritas como  $V_o u(t)$  e  $I_o u(t)$ , respectivamente. Circuitos equivalentes para tensões em degrau são mostrados na Figura 7.11b e c. Circuitos equivalentes para correntes em degrau são mostrados na Figura 7.11d e e. Se usarmos a definição de degrau unitário, é fácil generalizar essa função substituindo o argumento  $t$  por  $t - t_0$ . Nesse caso,

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

Um gráfico dessa função é mostrado na Figura 7.11f. Note que  $u(t - t_0)$  é equivalente a atrasar  $u(t)$  de  $t_0$  segundos, para que a mudança abrupta ocorra no instante  $t = t_0$ .

Funções degrau podem ser usadas para construir um ou mais pulsos. Por exemplo, o pulso de tensão mostrado na Figura 7.12a pode ser formado iniciando um degrau unitário no instante  $t = 0$  e subtraindo um começando em  $t = T$ , como mostrado na Figura 7.12b. A equação para o pulso é

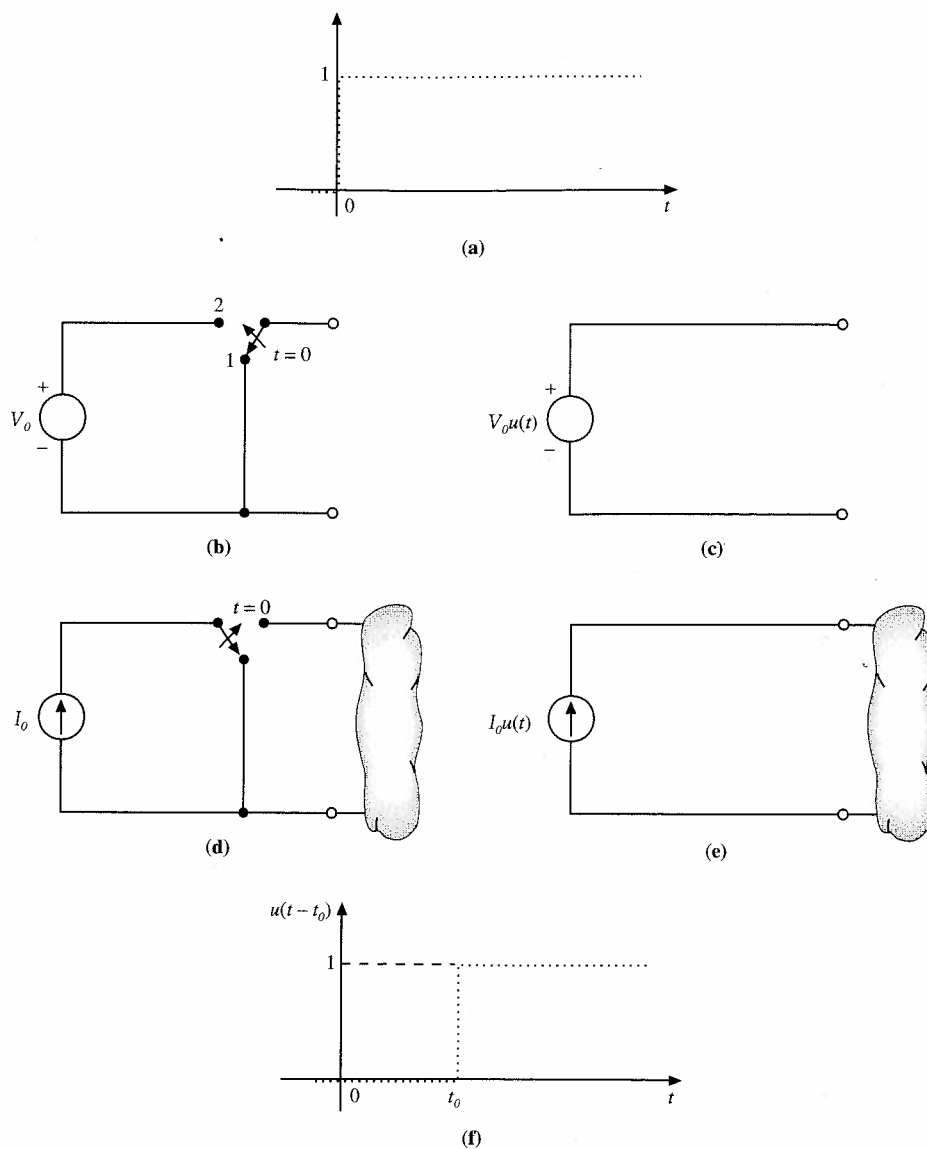
$$v(t) = A[u(t) - u(t - T)]$$

Se o pulso está para começar quando  $t = t_0$  e tem uma largura  $T$ , a equação seria

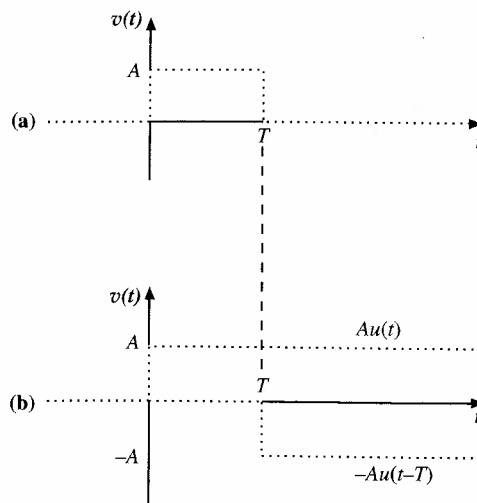
$$v(t) = A[u(t - t_0) - u(t - (t_0 + T))]$$

Utilizando esse procedimento, podemos escrever a equação para um pulso começando em qualquer instante e terminando em qualquer instante. Similarmente, utilizando esse procedimento, poderíamos escrever a equação para uma série de pulsos, chamada um *trem de pulsos*, simplesmente formando uma soma de pulsos construídos da forma ilustrada acima.

O exemplo a seguir servirá para ilustrar muitos dos conceitos que acabamos de apresentar.



**Figura 7.11** Gráficos e modelos de uma função degrau unitário.



**Figura 7.12** Construção de um pulso via duas funções degrau.

### Exemplo 7.7

Considere o circuito mostrado na Figura 7.13a. A função de entrada é o pulso de tensão mostrado na Figura 7.13b. Já que a fonte é zero para tempo negativo, as condições iniciais para a rede são zero [isto é,  $v_C(0^-) = 0$ ]. A resposta  $v_o(t)$  para  $0 < t < 0,3$  é devida à aplicação da tensão da fonte, que é constante, no instante  $t = 0$  e não é influenciada por nenhuma mudança de fonte que aconteça mais tarde. No instante  $t = 0,3$  s, a função de entrada se torna zero e portanto  $v_o(t)$  para  $t > 0,3$  s é a resposta natural ou sem fontes da rede.

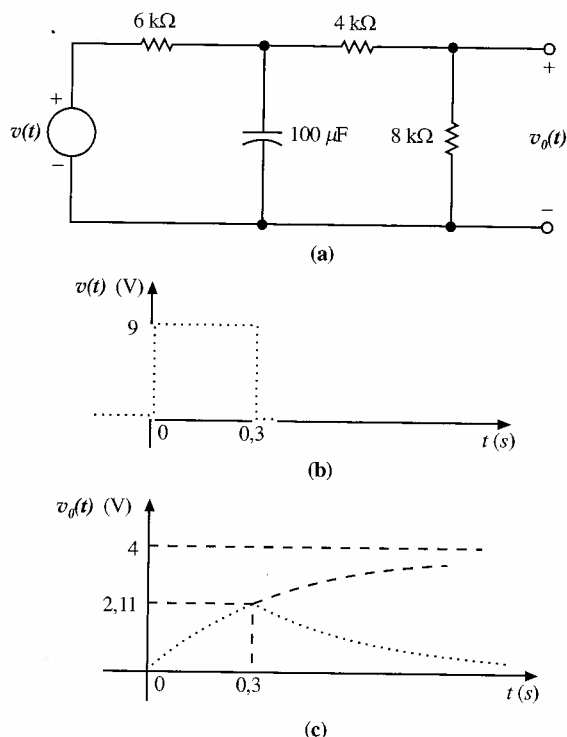


Figura 7.13 Resposta ao pulso de uma rede.

Uma vez que o sinal de saída  $v_o(t)$  é uma parcela da tensão do capacitor, e a tensão inicial sobre o capacitor é zero, sabemos que  $v_o(0^+) = 0$ .

Se nenhuma mudança for feita na fonte depois de  $t = 0$ , o valor em regime permanente de  $v_o(t)$  [ou seja,  $v_o(\infty)$ ] devido à aplicação do degrau unitário no instante  $t = 0$  seria

$$\begin{aligned} v_o(\infty) &= \frac{9}{6 + 4 + 8} (8) \\ &= 4 \text{ V} \end{aligned}$$

A resistência equivalente de Thévenin é

$$\begin{aligned} R_{\text{Th}} &= \frac{(6)(12)}{6 + 12} \\ &= 4 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Portanto, a constante de tempo do circuito  $T_c$  é

$$\begin{aligned} T_c &= R_{\text{Th}} C \\ &= (4)(10^3)(100)(10^{-6}) \\ &= 0,4 \text{ s} \end{aligned}$$

Logo, a resposta  $v_o(t)$  para o período  $0 < t < 0,3$  s é

$$v_o(t) = 4 - 4e^{-t/0,4} \text{ V} \quad 0 < t < 0,3 \text{ s}$$



A tensão do capacitor pode ser calculada usando a divisão de tensão  $v_o(t) = 2/3 v_C(t)$ . Daí,

$$v_C(t) = \frac{3}{2} (4 - 4e^{-t/0,4}) \text{ V}$$

Uma vez que a tensão do capacitor é contínua,

$$v_C(0,3-) = v_C(0,3+)$$

e portanto

$$\begin{aligned} v_o(0,3+) &= \frac{2}{3} v_C(0,3-) \\ &= 4(1 - e^{-0,3/0,4}) \\ &= 2,11 \text{ V} \end{aligned}$$

Uma vez que a fonte é zero para  $t > 0,3$  s o valor final para  $v_o(t)$  como  $t \rightarrow \infty$  é zero. Consequentemente, a expressão para  $v_o(t)$  para  $t > 0,3$  s é

$$v_o(t) = 2,11e^{-(t-0,3)/0,4} \text{ V} \quad t > 0,3 \text{ s}$$

O termo  $e^{-(t-0,3)/0,4}$  indica que a queda da exponencial se inicia no instante  $t = 0,3$  s. A solução completa pode ser escrita usando-se o princípio da superposição como

$$v_o(t) = 4(1 - e^{-t/0,4})u(t) - 4(1 - e^{-(t-0,3)/0,4})u(t-0,3)$$

ou, equivalentemente, a solução completa é

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 4(1 - e^{-t/0,4}) \text{ V} & 0 < t < 0,3 \text{ s} \\ 2,11e^{-(t-0,3)/0,4} \text{ V} & 0,3 \text{ s} < t \end{cases}$$

que em forma matemática é

$$v_o(t) = 4(1 - e^{-t/0,4})[u(t) - u(t-0,3)] + 2,11e^{-(t-0,3)/0,4}u(t-0,3) \text{ V}$$

Note que o termo  $[u(t) - u(t-0,3)]$  age como uma janela que captura somente a parte da resposta ao degrau que existe no intervalo de tempo  $0 < t < 0,3$  s. A saída em função do tempo é mostrada na Figura 7.13c.

## Exercícios

**E7.9** A fonte de tensão da rede da Figura E7.9a é mostrada na Figura E7.9b. A corrente inicial do indutor deve ser zero. (Por quê?) Determine a tensão de saída  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

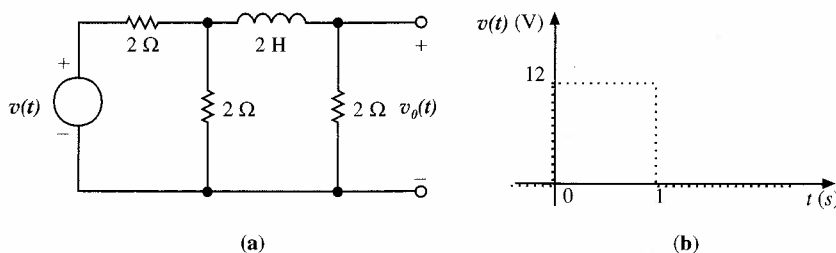


Figura E7.9

**Resp.:**  $v_o(t) = 0$  para  $t < 0$ ,  $4(1 - e^{-(3/2)t})$  V para  $0 \leq t \leq 1$  e  $3,11e^{-(3/2)(t-1)}$  V para  $1 < t$ .

**E7.10** A fonte de corrente na rede da Figura E7.10a está definida na Figura E7.10b. A tensão inicial sobre o capacitor deve ser zero. (Por quê?) Determine a corrente  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

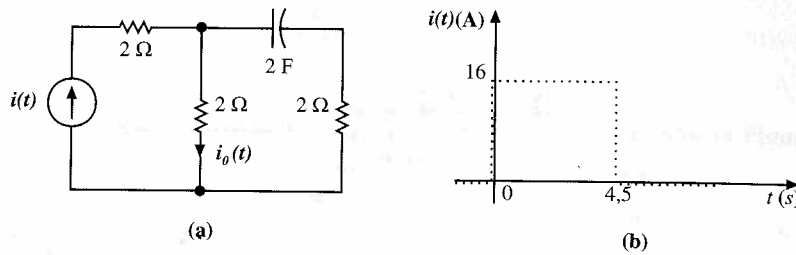


Figura E7.10

Resp.:  $i_o(t) = 0$  para  $t < 0$ ,  $6 - 3e^{-t/8}$  A para  $0 \leq t \leq 4,5$  e  $1,29e^{-(1/8)(t - 4,5)}$  A para  $t > 4,5$ .

Temos examinado a resposta de uma rede a um número limitado de tipos de entrada. Uma outra função de entrada importante — a senoidal — será vista em detalhes no Capítulo 9. No Capítulo 17, demonstraremos que uma variedade de fontes de entrada pode ser manipulada simultaneamente com facilidade, utilizando métodos de transformação.

## 7.5 Circuitos RC com Amplificadores Operacionais

Dois importantes circuitos RC amp-op são o diferenciador e o integrador. Esses circuitos são derivados do circuito para um amp-op inversor, tendo substituído os resistores  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente, por um capacitor. Considere, por exemplo, o circuito mostrado na Figura 7.14a. As equações do circuito são

$$C_1 \frac{d}{dt}(v_1 - v_-) + \frac{v_0 - v_-}{R_2} = i_-$$

No entanto,  $v_- = 0$  e  $i_- = 0$ . Portanto,

$$v_0(t) = -R_2 C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} \quad (7.17)$$

e assim a saída do circuito amp-op é proporcional à derivada da entrada.

As equações para a configuração amp-op na Figura 7.14b são

$$\frac{v_1 - v_-}{R_1} + C_2 \frac{d}{dt}(v_0 - v_-) = i_-$$

porém uma vez que  $v_- = 0$  e  $i_- = 0$ , a equação se reduz a

$$\frac{v_1}{R_1} = -C_2 \frac{dv_0}{dt}$$

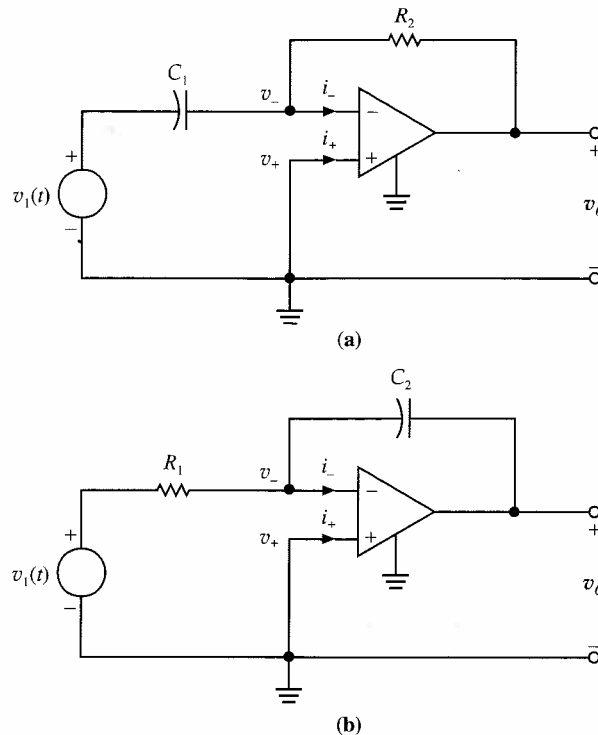
ou

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \frac{-1}{R_1 C_2} \int_{-\infty}^t v_1(x) dx \\ &= \frac{-1}{R_1 C_2} \int_0^t v_1(x) dx + v_0(0) \end{aligned} \quad (7.18)$$

Se o capacitor está inicialmente carregado, então  $v_0(0) = 0$  e desse modo

$$v_0(t) = \frac{-1}{R_1 C_2} \int_0^t v_1(x) dx \quad (7.19)$$

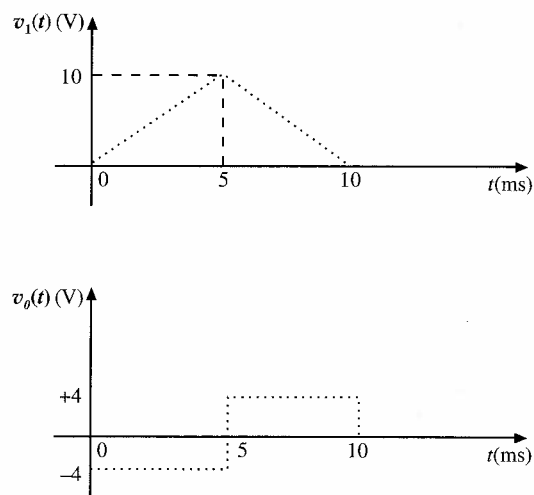
e assim a tensão de saída do circuito amp-op é proporcional à integral da tensão da entrada.



**Figura 7.14** Circuitos diferenciadores e integradores amplificadores operacionais.

### Exemplo 7.8

A forma de onda da Figura 7.15a é aplicada na entrada do circuito diferenciador mostrado na Figura 7.14a. Se  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$  e  $C_1 = 2 \text{ }\mu\text{F}$ , determine a forma de onda de saída do amp-op.



**Figura 7.15** Formas de onda de entrada e saída para um circuito diferenciador.

Utilizando a Equação 7.17, descobrimos que a saída do amp-op é

$$\begin{aligned} v_o(t) &= -R_2 C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} \\ &= -(2)10^{-3} \frac{dv_1(t)}{dt} \end{aligned}$$

$dv_1(t)/dt = (2)10^3$  para  $0 \leq t < 5 \text{ ms}$ , e portanto

$$v_o(t) = -4 \text{ V} \quad 0 \leq t < 5 \text{ ms}$$

$dv_1(t)/dt = -(2)10^3$  para  $5 \leq t < 10$  ms, e portanto

$$v_0(t) = 4 \text{ V} \quad 5 \leq t < 10 \text{ ms}$$

Dessa maneira, a forma de onda de saída do diferenciador é mostrada na Figura 7.15b. ■

### Exemplo 7.9

Se o integrador mostrado na Figura 7.14b possui os parâmetros  $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$  e  $C_2 = 0,2 \mu\text{F}$ , determine a forma de onda na saída do amp-op, caso a forma de onda de entrada seja a dada na Figura 7.16a e o capacitor esteja inicialmente descarregado.

A saída do integrador é dada pela expressão

$$v_0(t) = \frac{-1}{R_1 C_2} \int_0^t v_1(x) dx$$

que preenchida com os parâmetros do circuito dado é

$$v_0(t) = 10^3 \int_0^t v_1(x) dx$$

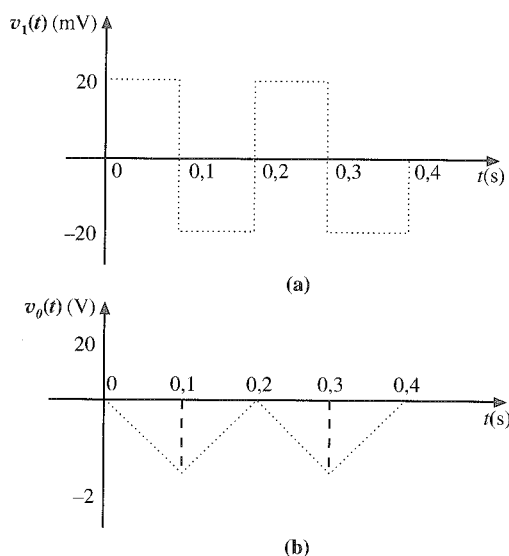


Figura 7.16 Formas de onda de entrada e saída para um circuito integrador.

No intervalo  $0 \leq t < 0,1$  s,  $v_1(t) = 20 \text{ mV}$ . Dessa maneira,

$$\begin{aligned} v_0(t) &= -10^3 (20) 10^{-3} t \quad 0 \leq t < 0,1 \text{ s} \\ &= -20t \end{aligned}$$

No instante  $t = 0,1$  s,  $v_0(t) = -2 \text{ V}$ . No intervalo de 0,1 a 0,2 s, o integrador produz uma saída de declive positivo de  $20t$  de  $v_0(0,1) = -2 \text{ V}$  até  $v_0(0,2) = 0 \text{ V}$ . Essa forma de onda de  $t = 0$  até  $t = 0,2$  s é repetida no intervalo de  $t = 0,2$  até  $t = 0,4$  s, e portanto a Figura 7.16b mostra a forma de onda de saída. ■

### Exercício

**E7.11** A forma de onda da Figura E7.11 é aplicada aos terminais de entrada do circuito amp-op diferenciador. Determine a forma de onda de saída caso os parâmetros do circuito amp-op sejam  $C_1 = 2 \text{ F}$  e  $R_2 = 2 \Omega$ .

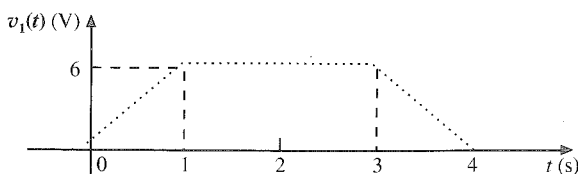
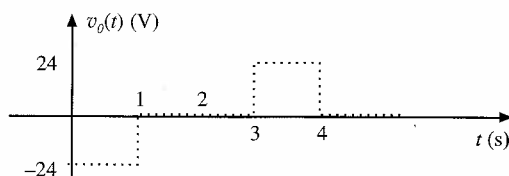


Figura E7.11

Resp.:



## 7.6 Análise Transiente de Circuitos Utilizando PSPICE

Ao iniciarmos este tópico, é importante notar que todo o material descrito no Capítulo 4 também se aplica aqui. Os circuitos são descritos exatamente da mesma maneira e, na realidade, uma análise dc é automaticamente realizada antes da análise transiente para determinar as condições iniciais de um circuito. Uma variável independente em análise transiente é sempre o tempo, e as variáveis do circuito são tabuladas e/ou mostradas em forma de gráfico como funções do tempo. É também importante notar que o circuito sendo analisado não pode conter um laço de fontes de tensão e/ou indutores e não pode conter um corte básico (ver Capítulo 3) de fontes de corrente e/ou capacitores.

Introduziremos agora alguns novos comandos de dados, controle de soluções e especificação de saída que serão úteis na análise transiente. Os exemplos indicarão a facilidade de se executar análises que seriam difíceis de serem manipuladas matematicamente.

### Comandos de Ramo para Indutores e Capacitores

A forma geral do comando para tais elementos é

```
BXXXXXXX N1 N2 VALUE
```

B é a letra L ou C, dependendo do tipo de elemento. XXXXXXXX denota uma cadeia arbitrária alfanumérica que identifica unicamente o elemento em particular. N1 e N2 são os nós aos quais o elemento está conectado. VALUE é o valor do elemento. A capacitância está expressa em farads e a indutância em henrys.

### Comandos de Ramo para Fontes Variáveis no Tempo

Para qualquer fonte independente, pode ser atribuído um valor dependente do tempo para análise transiente. Caso um valor dependente do tempo seja atribuído a uma fonte, o valor no instante zero será usado para qualquer análise dc que seja solicitada. As fontes variáveis no tempo podem ser de quatro tipos diferentes: pulso, exponencial, senoidal ou linear por partes. O tipo de fonte é especificado no comando de dados que define a fonte.

O comando de dados para fontes de pulso é da forma

```
VXXXXXXX N+ N- PULSE (V1 V2 TD TR TF PW PER)
```

V1 é o valor inicial da fonte em volts ou ampères, e V2 é o valor da fonte durante o pulso. TD é o atraso puro de tempo entre o instante zero e o início do pulso em segundos. TR, TF e PW são o tempo de subida, o tempo de descida e a largura do pulso em segundos. PER é o período em segundos para um trem de pulsos. Pontos intermediários no pulso são determinados por interpolação linear. Portanto, a Tabela 7.1 descreve unicamente o pulso mostrado na Figura 7.17.

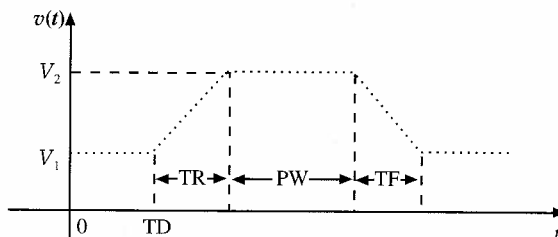


Figura 7.17 Forma geral de um pulso.

Tabela 7.1<sup>1</sup>

| Tempo             | Valor |
|-------------------|-------|
| 0                 | V1    |
| TD                | V1    |
| TD + TR           | V2    |
| TD + TR + PW      | V2    |
| TD + TR + PW + TF | V1    |

Os valores e unidades *default* para os parâmetros da fonte do pulso estão resumidos na Tabela 7.2.

Tabela 7.2

| Parâmetro               | Valor Default | Unidades         |
|-------------------------|---------------|------------------|
| V1—tensão inicial       |               | volts ou ampères |
| V2—valor do pulso       |               | volts ou ampères |
| TD—atraso puro de tempo | 0,0           | segundos         |
| TR—tempo de subida      | TSTEP         | segundos         |
| TF—tempo de descida     | TSTEP         | segundos         |
| PW—largura de pulso     | TSTOP         | segundos         |
| PER—período             | TSTOP         | segundos         |

Fontes exponenciais são descritas utilizando o formato

VXXXXXXX N+ N- EXP(V1 V2 TD1 TAU1 TD2 TAU2)

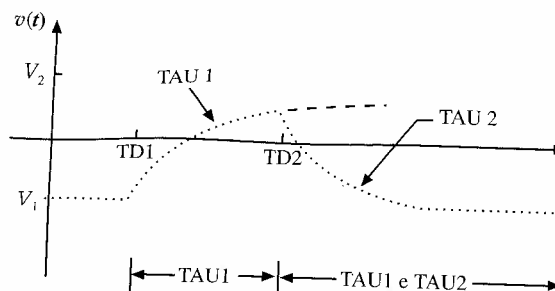
V1 é o valor inicial em volts ou ampères. V2 é o valor de pico em volts ou ampères. TD1 e TAU1 são constantes de atraso puro de tempo (na subida) e do tempo de subida, respectivamente. TD2 e TAU2 são constantes de atraso puro de tempo (na descida) e tempo de descida, respectivamente. Todos os tempos são expressos em segundos. A forma de onda mostrada na Figura 7.18 é descrita pelas expressões

Intervalo de 0 a TD1:  $V1$

Intervalo de TD1 a TD2:  $V1 + (V2 - V1) * (1 - \exp(-(TIME - TD1) / TAU1))$

Intervalo de TD2 a TSTOP:  $V1 + (V2 - V1) * (1 - \exp(-(TIME - TD1) / TAU1)) + (V1 - V2) * (1 - \exp(-(TIME - TD2) / TAU2))$

1. N.T.: As iniciais TD de *delay time*, TR de *rise time*, TF de *fall time* e PW de *pulse width* serão mantidas devido à sua presença nessa forma no PSPICE.



**Figura 7.18** Forma geral de uma fonte exponencial.

Os valores e unidades *default* para os parâmetros da fonte exponencial estão resumidos na Tabela 7.3.

**Tabela 7.3**

| Parâmetro                          | Valor Default | Unidades         |
|------------------------------------|---------------|------------------|
| V1-tensão inicial                  |               | volts ou ampères |
| V2-valor do pulso                  |               | volts ou ampères |
| TD1-atraso de tempo na subida      | 0,0           | segundos         |
| TAU1-constante de tempo da subida  | TSTEP         | segundos         |
| TD2-atraso de tempo na descida     | TD1 + TSTEP   | segundos         |
| TAU2-constante de tempo na descida | TSTEP         | segundos         |

O comando de dado para fontes senoidais da forma mostrada na Figura 7.19 é  
 VXXXXXXXX N+ N- SIN(VO VA FREQ TD THETA)

A forma de onda é descrita pela equação

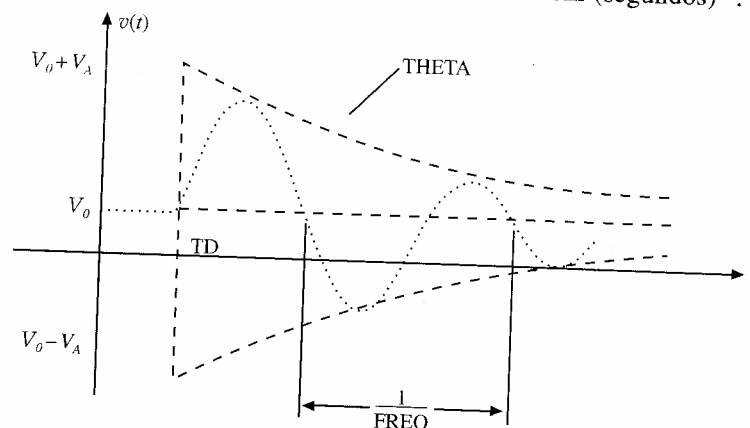
Intervalo de 0 a TD:

$$VO$$

Intervalo de TD até TSTOP

$$VO + VA * \exp(-(TIME - TD) * THETA) * \sin(2\pi * FREQ * (TIME + TD))$$

VO é o *offset* em volts ou ampères. VA é a amplitude em volts ou ampères. FREQ é a frequência em hertz. TD é o atraso em segundos, e THETA é o fator de amortecimento em  $(\text{segundos})^{-1}$ .



**Figura 7.19** Forma geral de uma fonte senoidal.

Os valores e unidades *default* para os parâmetros da fonte senoidal estão resumidos na Tabela 7.4.

Tabela 7.4

| Parâmetro                    | Valor Default | Unidades         |
|------------------------------|---------------|------------------|
| VO-offset                    |               | volts ou ampères |
| VA-amplitude                 |               | volts ou ampères |
| FREQ-frequência              | 1/TSTOP       | hertz            |
| TD-atraso                    | 0,0           | segundos         |
| THETA-fator de amortecimento | 0,0           | 1 por segundo    |

Fontes lineares por partes são descritas usando o formato

XXXXXXXXX N+ N- PWL (T1 V1 T2 V2 T3 V3 ...)

Como mostrado na Figura 7.20, cada par de valores (TI, VI) especifica que o valor da fonte é VI volts ou ampères no instante TI. O valor da fonte nos valores intermediários de tempo é determinado por interpolação linear. Valores de TI devem sempre estar ordenados de forma crescente no tempo.

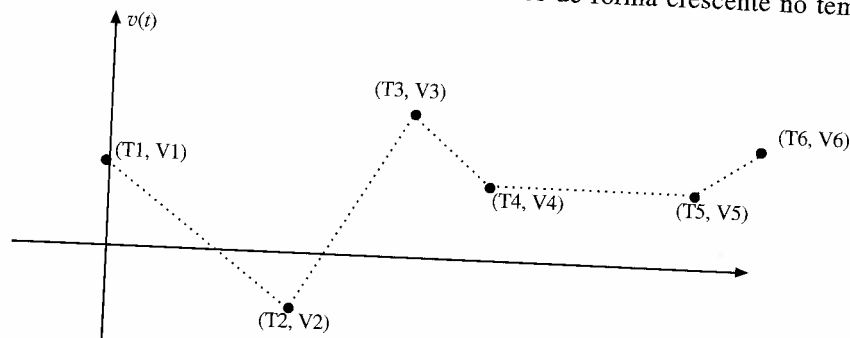


Figura 7.20 Forma geral de uma fonte linear por partes.

### Comandos de Controle de Solução

Análise transiente em PSPICE é chamada usando-se o comando .TRAN no formato

.TRAN TSTEP TSTOP TSTART TMAX

TSTEP é o incremento de impressão para saídas em impressora de linha. TSTART e TSTOP são os instantes de início e término para a análise. Caso TSTART seja omitido, ele é considerado zero. A análise transiente sempre começa no instante zero. No intervalo [0, TSTART], o circuito é analisado, porém nenhuma saída é armazenada. No intervalo [TSTART, TSTOP], a análise continua e as saídas são armazenadas. TMAX é o incremento de tempo máximo que o PSPICE usará e os defaults para um valor de (TSTOP-TSTART)/50 ou TSTEP, o que for menor.

Se as condições iniciais para os elementos capacitivos e indutivos são conhecidas e deseja-se empregá-las na análise PSPICE, pode-se usar o comando .TRAN que inclui a palavra-chave UIC (use initial conditions - utilize as condições iniciais) como mostrado a seguir.

.TRAN TSTEP TSTOP TSTART TMAX UIC

Se a palavra-chave for especificada, o PSPICE utilizará os valores iniciais que podem ser adicionados aos comandos de dado da forma

CXXXXXXXX N+ N- VALUE IC= INCOND  
LYYYYYYYY N+ N- VALUE IC= INCOND

Para o capacitor, a condição inicial é o valor inicial (instante-zero) da tensão sobre o capacitor em volts. Para o indutor, a condição inicial é o valor inicial (instante-zero) da corrente no indutor em ampères



que flui de  $N^+$ , através do indutor, para  $N^-$ . Na utilização do UIC, o PSPICE utiliza os valores iniciais nos comandos de dados como a condição inicial transiente e continua com a análise.

Caso o UIC não seja incluído no comando .TRAN, o PSPICE executará uma  $t = 0$  análise dc para determinar as condições iniciais.

### Comandos de Especificação de Saída

Os comandos .PRINT e .PROBE empregados na análise dc são úteis aqui também. Em uma análise transiente, eles têm a forma

```
.PRINT TRAN OV1 ... OV8
.PROBE
```

### Exemplo 7.10

Desejamos traçar  $v_o(t)$  e  $i_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura 7.21a.

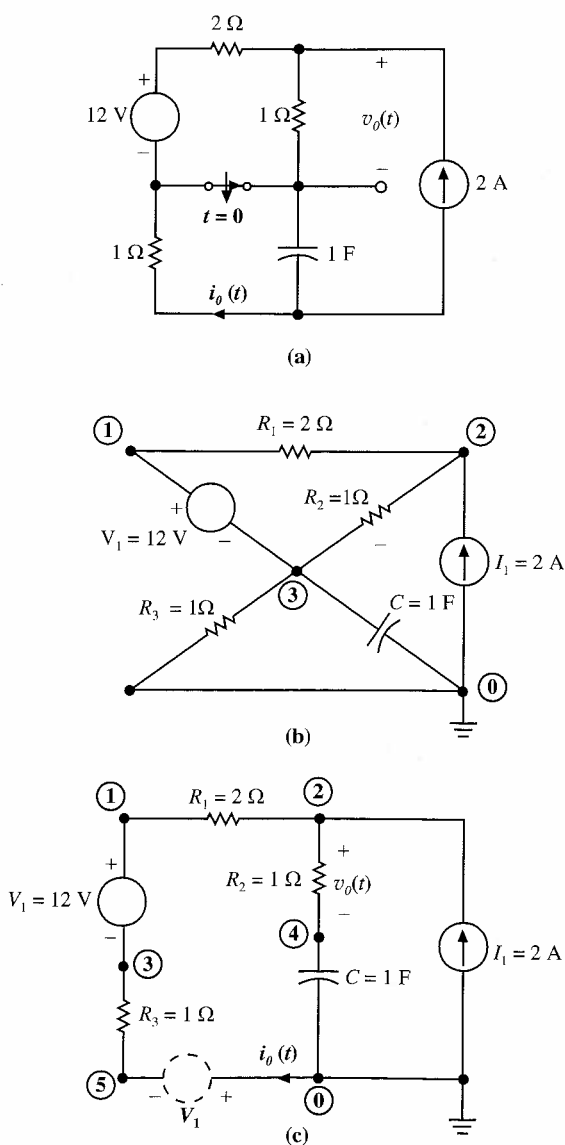


Figura 7.21 Redes utilizadas no Exemplo 7.10.

As condições iniciais são determinadas do circuito da Figura 7.21b. O programa PSPICE utilizado para computar a tensão inicial do capacitor é

```
CIRCUIT USED TO DETERMINE INITIAL CONDITIONS
*DC VOLTAGE SOURCE
V1 1 3 DC 12
*DC CURRENT SOURCE
I1 0 2 DC 2
*RESISTOR VALUES
R1 1 2 2
R2 2 3 1
R3 3 0 1
*CAPACITOR VALUE
C1 3 0 1
.END
```

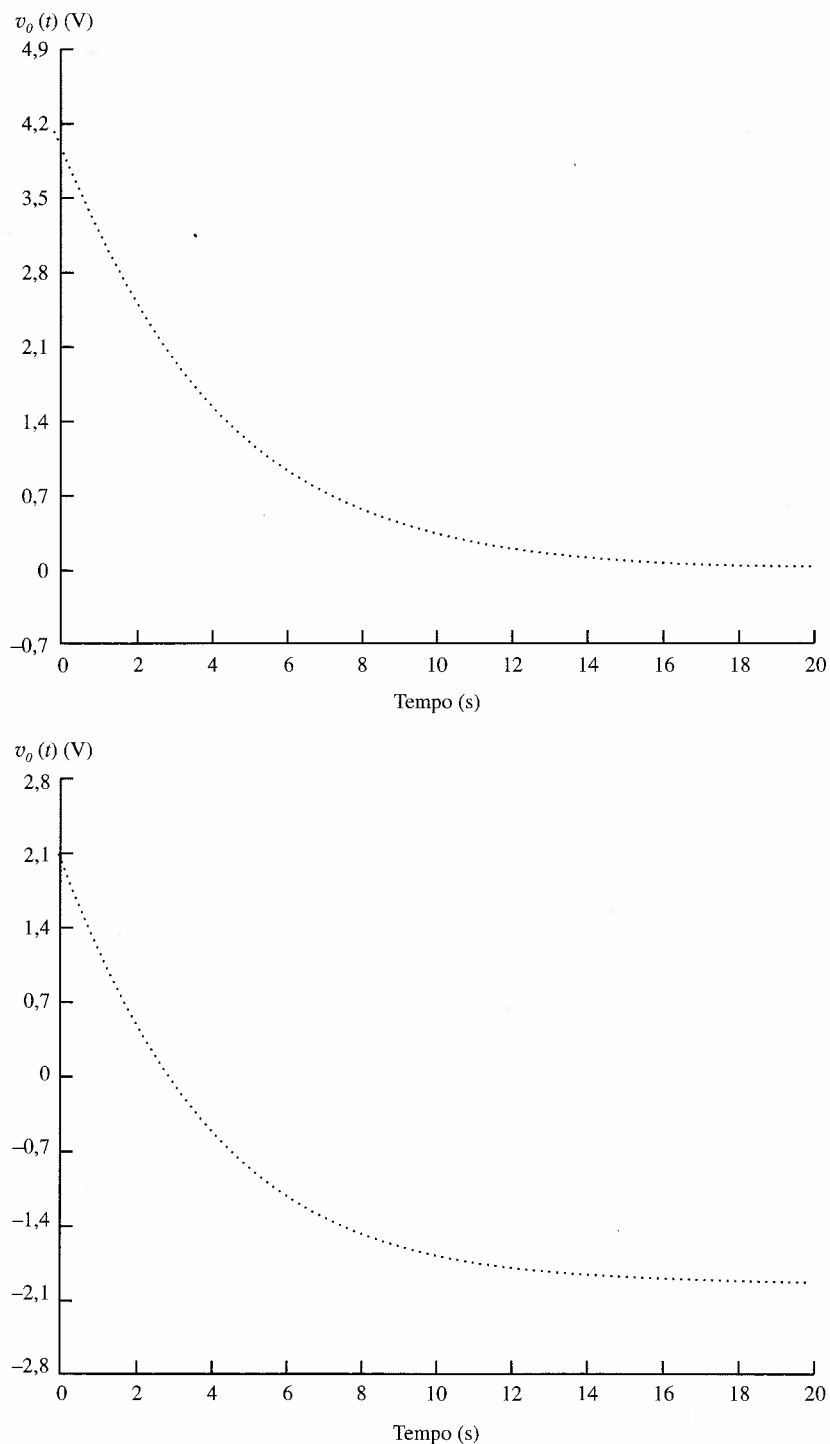
Caso selecionemos 'Browse Output' do submenu 'Files', podemos revisar o programa, que ilustra que a tensão inicial do capacitor é 2 V.

Agora sabemos que a tensão inicial do capacitor é de 2 V. A rede para  $t > 0$  é mostrada na Figura 7.21c. O programa PSPICE que traçará a saída de um intervalo de 20 segundos utilizando um incremento de tamanho de 200 ms é listado a seguir.

```
CIRCUIT USED TO COMPUTE OUTPUT RESPONSE
*CIRCUIT CONDITION AT TIME T=0+
*DC VOLTAGE SOURCE
V1 1 3 DC 12
*TEST SOURCE
VT 0 5 DC 0
*DC CURRENT SOURCE
I1 0 2 DC 2
*RESISTOR VALUES
R1 1 2 2
R2 2 4 1
R3 3 5 1
*CAPACITOR VALUE
C1 4 0 1 IC=2.0
.TRAN 200MS 20S UIC
.PROBE
.END
```

Ao finalizar a análise transiente, a tela exibirá um gráfico em branco e uma linha de menu abaixo do gráfico. Pressione a tecla 'Enter'. Isto seleciona a opção 'Add\_trace' do menu. Digite 'I(VT) V(2,4)' e pressione 'Enter' novamente. Um gráfico da corrente e tensão selecionadas aparece na tela. Uma cópia impressa pode ser obtida utilizando as setas até colocar em realce a opção 'Hard\_copy' do menu. Pressione 'Enter' uma vez que tal opção estiver em realce. O usuário pode então sair do programa Probe selecionando a opção 'Exit' do menu da mesma maneira descrita acima.

Os gráficos para  $v_o(t)$  e  $i_o(t)$  estão mostrados na Figura 7.22a e b, respectivamente. ■



**Figura 7.22** Gráficos de saída para o Exemplo 7.10.

### Exemplo 7.11

Dada a rede da Figura 7.23a, produza o gráfico de  $v_o(t)$  e  $i_o(t)$  no intervalo  $0 - t - 10$  s utilizando incrementos de 100 ms.

A rede da Figura 7.23b é usada para determinar a corrente inicial do indutor. O programa PSPICE que produzirá a condição inicial é

```

COMPUTE INITIAL CONDITION
*DC VOLTAGE SOURCE
V1 1 0 DC 12
*TEST SOURCE TO DETERMINE CURRENT THROUGH L
VT 3 0 DC 0
*RESISTOR VALUES
R1 1 2 2
R2 2 0 2
R3 2 0 2
*INDUCTO VALUE
L1 2 3 2
.END

```

A saída do programa inclui o seguinte:

```

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
V1        -6.000D+00
VT         6.000D+00

```

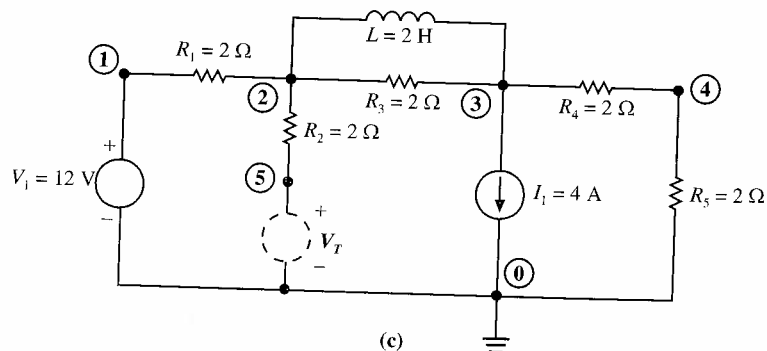
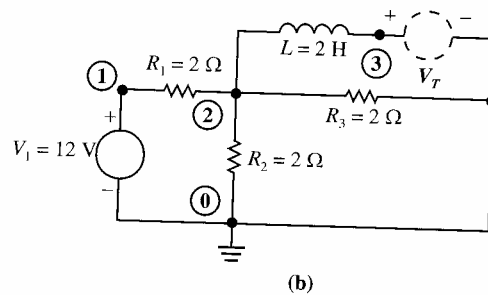
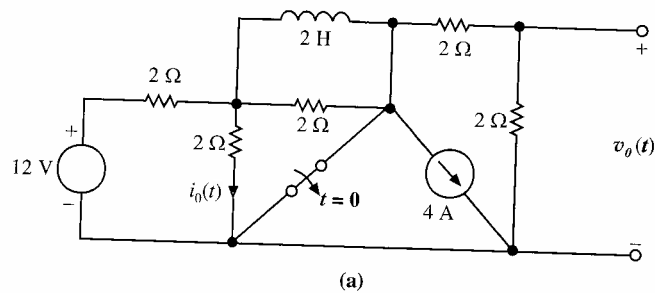


Figura 7.23 Redes usadas no Exemplo 7.11.

A rede para  $t > 0$  é mostrada na Figura 7.23c. O programa PSPICE que produzirá os gráficos de saída dada uma corrente inicial no indutor de 6 A está listado abaixo.

```

OUTPU RESPONSE PROGRAM
*CIRCUIT CONDITIONS AT TIME T=0+
*DC VOLTAGE SOURCE
V1 1 0 DC 12
*DC CURRENT SOURCE
IL 3 0 DC 4
*TEST SOURCE TO DETERMINE SPECIFIED VOLTAGE
VT 5 0 DC 0
RESISTOR VALUES
R1 1 2 2
R2 2 5 2
R3 2 3 2
R4 3 4 2
R5 4 0 2
*INDUCTOR VALUE
L1 2 3 2 IC=6.0
.TRAN 100 MS 10S UIC
.PROBE
.END

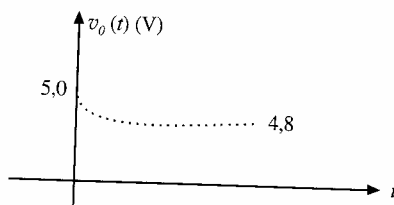
```

Os gráficos para  $v_o(t)$  e  $i_o(t)$  estão mostrados na Figura 7.24a e b, respectivamente.

### Exercícios

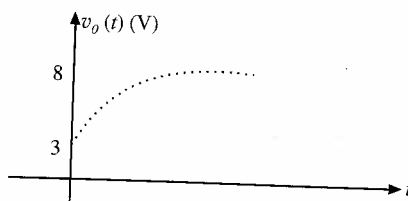
**E7.12** Utilizando o PSPICE, produza o gráfico para  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura E7.6.

**Resp.:**



**E7.13** Dada a rede da Figura E7.7, produza o gráfico para  $v_o(t)$  para  $t > 0$  utilizando o PSPICE.

**Resp.:**



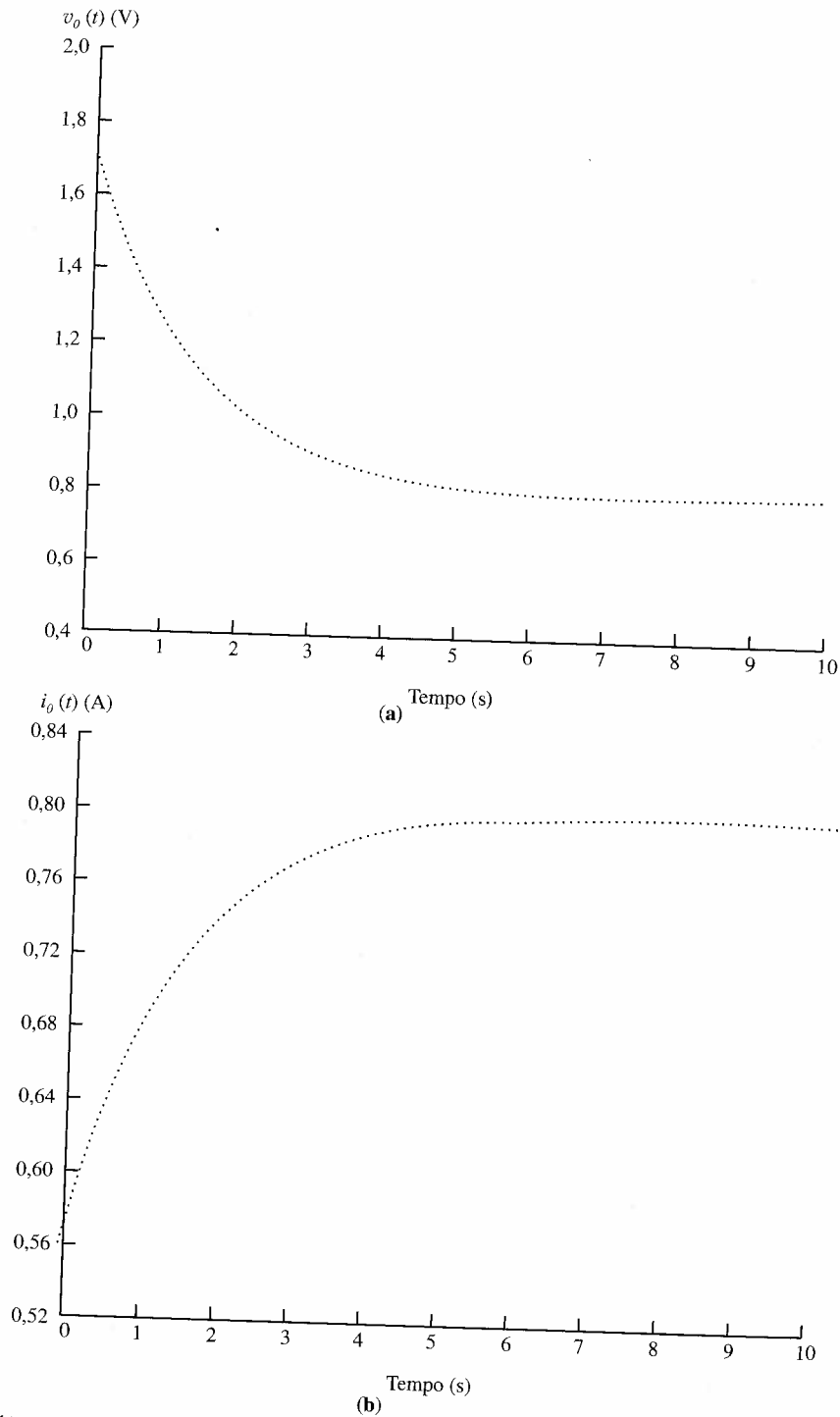


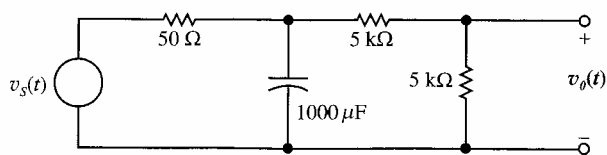
Figura 7.24 Gráficos de saída para o Exemplo 7.11.

### Exemplo 7.12

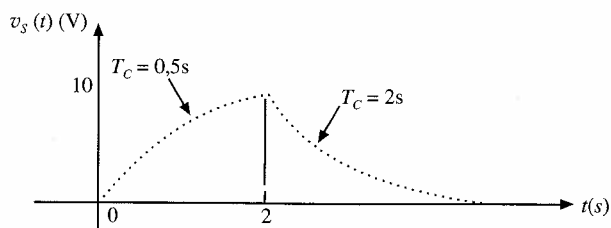
Considere a rede da Figura 7.25a. O sinal de entrada para a rede está mostrado na Figura 7.25b e é dado pela equação

$$v_s(t) = 10(1 - e^{-t/0,5}) \text{ V} \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ s}$$

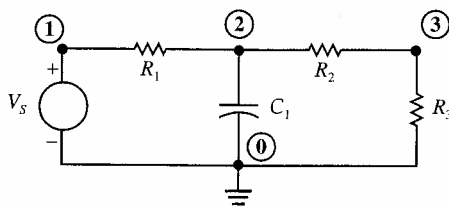
$$v_s(t) = 10(1 - e^{-t/0,5}) + 10e^{-(t-2)/2} \text{ V} \quad 2 \text{ s} \leq t$$



(a)



(b)



(c)

**Figura 7.25** Figuras usadas no Exemplo 7.12.

Desejamos produzir um gráfico para o sinal de saída  $v_o(t)$  em um intervalo de 10 segundos utilizando um incremento de 50 ms.

A rede está redesenhada para uma análise PSpice na Figura 7.25c. O programa para essa rede é

```
EXAMPLE 7.12
VS 1 0 EXP(0 10 0 .5 2 2)
R1 1 2 50
R2 2 3 5K
R3 3 0 5K
C1 2 0 1000U
*ANALYSIS
.TF V(3) VS
.TRAN .05 10
.PROBE
.END
```

Um gráfico, tanto para a entrada como para as tensões de saída, é mostrado na Figura 7.26. ■

### Exemplo 7.13

Dada a rede da Figura 7.25a, vamos mostrar a resposta da saída em um intervalo de dois segundos com um incremento de 10 ms caso a entrada seja dada pela expressão

$$v_s(t) = 10e^{-2t} \sin[2\pi(4)t] \text{ V}$$

O programa para a rede na Figura 7.25c com o novo sinal de entrada é

```
EXAMPLE 7.13
VS 1 0 SIN(0 10 4 0 2 0)
R1 1 2 50
R2 2 3 5K
```

```

R3 3 0 5K
C1 2 0 1000U
*ANALYSIS
.TF V(3) VS
.TRAN .01 2
.PROBE
.END

```

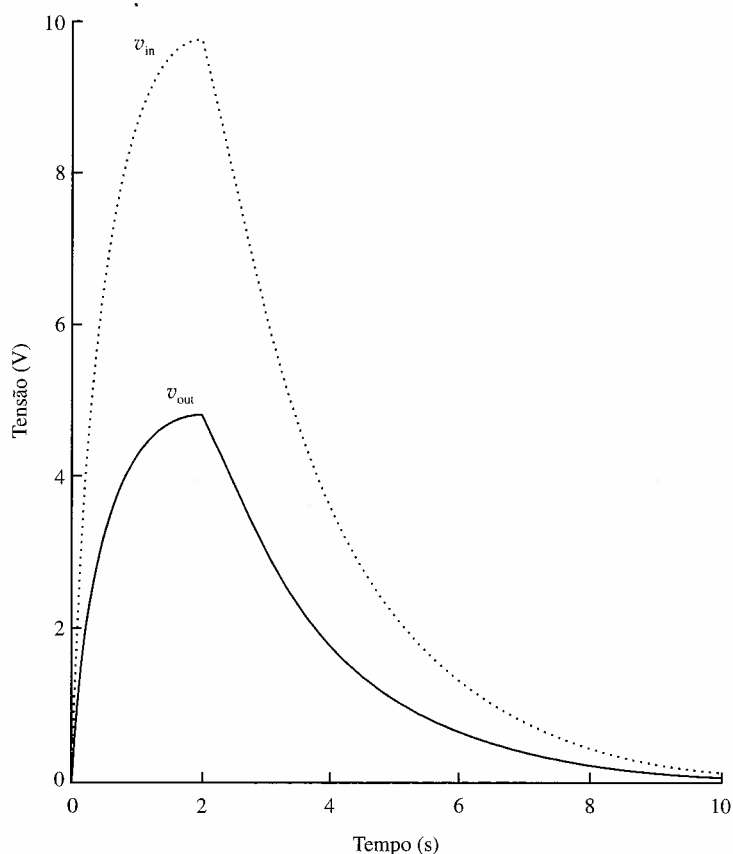


Figura 7.26 Formas de onda de entrada e saída para o Exemplo 7.12.

As formas de onda, tanto para a entrada como para a saída, são mostradas na Figura 7.27. ■

### Exemplo 7.14

Para a rede da Figura 7.25a, vamos gerar o gráfico para a resposta da saída durante um intervalo de dois segundos com um incremento de 10 ms caso a entrada para a rede seja a mostrada na Figura 7.28.

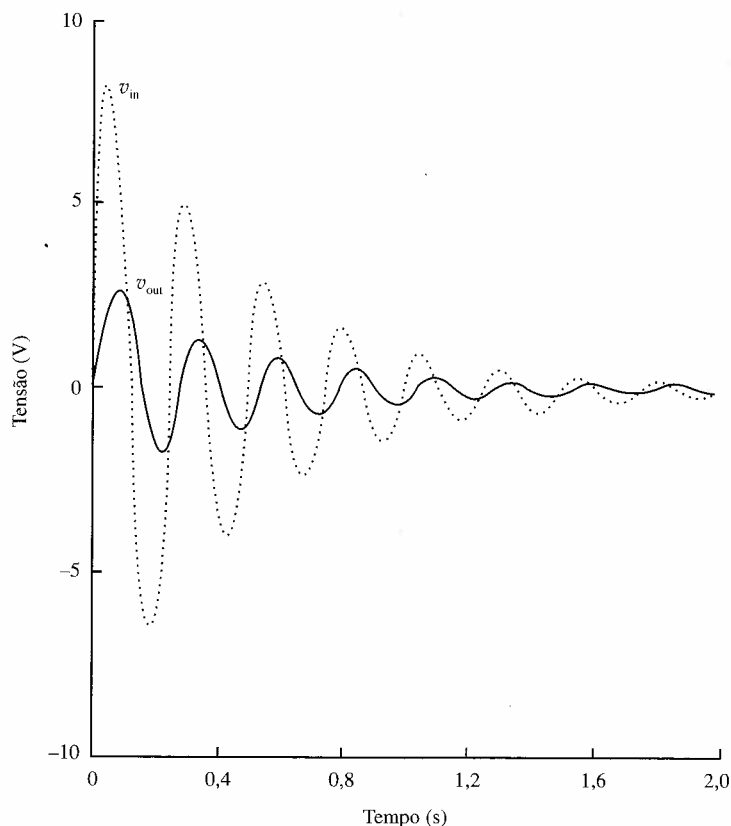
O programa para a rede na Figura 7.25c com o sinal de entrada mostrado na Figura 7.28 é

```

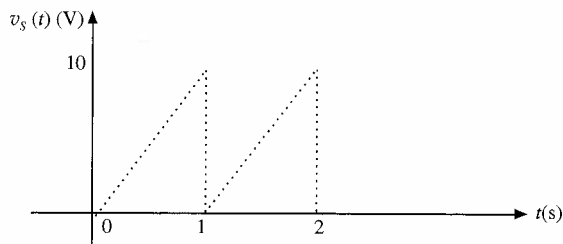
EXAMPLE 7.14
VS 1 0 PULSE(0 10 0 1 0 .1US 1)
R1 1 2 50
R2 2 3 5K
R3 3 0 5K
C1 2 0 1000U
*ANALYSIS
.TF V(3) VS
.TRAN .01 2
.PROBE
.END

```





**Figura 7.27** Formas de onda de entrada e saída para o Exemplo 7.13.



**Figura 7.28** Forma de onda de entrada do tipo dente-de-serra.

As formas de onda, tanto da entrada como da saída, são mostradas na Figura 7.29. ■

### Exemplo 7.15

Para a rede da Figura 7.25a, vamos gerar o gráfico para a resposta de saída em um intervalo de dois segundos com um incremento de 10 ms caso a entrada da rede seja a mostrada na Figura 7.30.

O programa para a rede na Figura 7.25c com a forma de onda de entrada na Figura 7.30 é

```
EXAMPLE 7.15
VS 1 0 PULSE(-10 10 0 0 0 1 2)
R1 1 2 50
R2 2 3 5K
R3 3 0 5K
C1 2 0 1000U
*ANALYSIS
.TF V(3) VS
.TRAN .01 2
.PROBE
.END
```

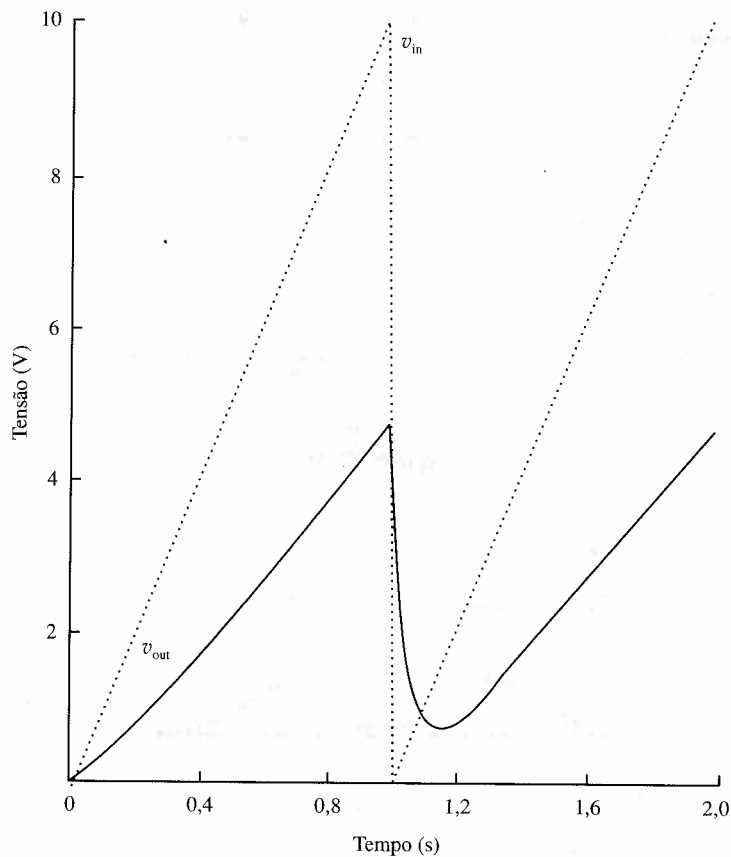


Figura 7.29 Formas de onda de entrada e saída para o Exemplo 7.14.

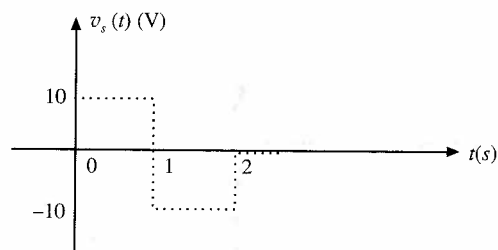


Figura 7.30 Forma de onda de entrada de um pulso.

Os gráficos, tanto da entrada como da saída, são mostrados na Figura 7.31. ■

### Exercícios

- E7.14** Dada a rede da Figura E7.14a, trace o gráfico para a tensão de saída em um intervalo de 10 segundos usando um incremento de 50 ms caso a tensão de entrada seja a mostrada na Figura E7.14b.

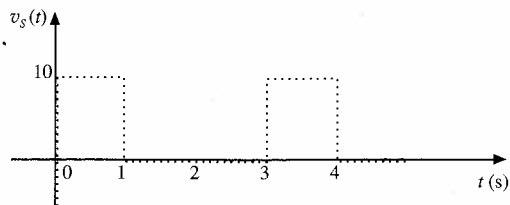
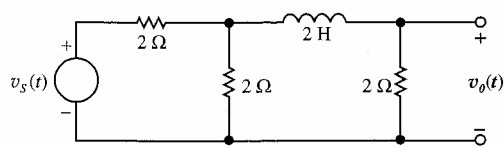


Figura E7.14

Resp.:

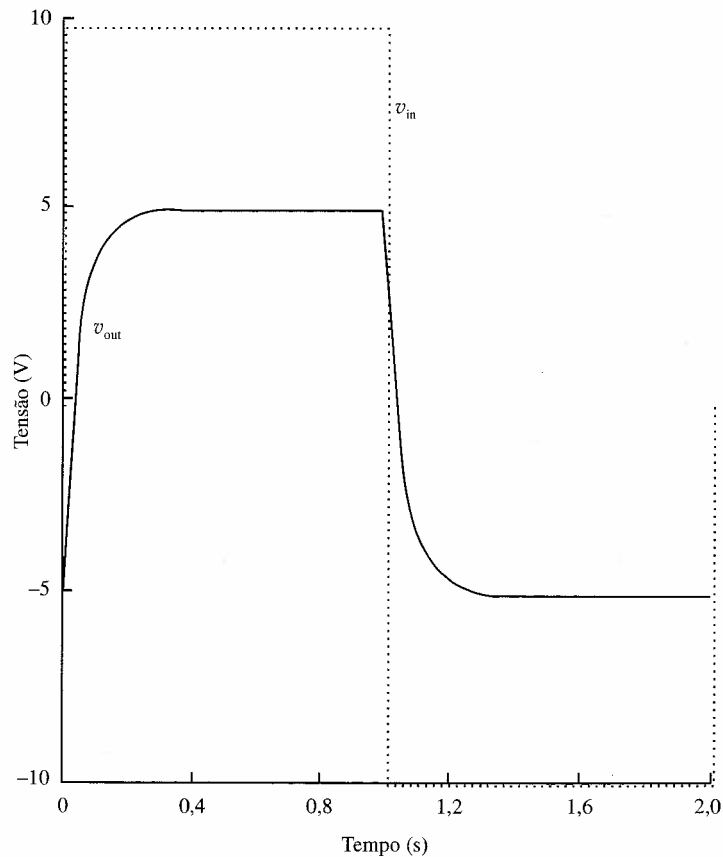
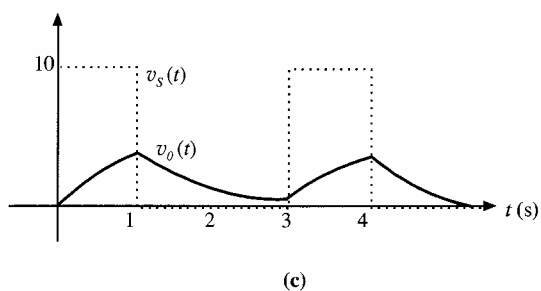
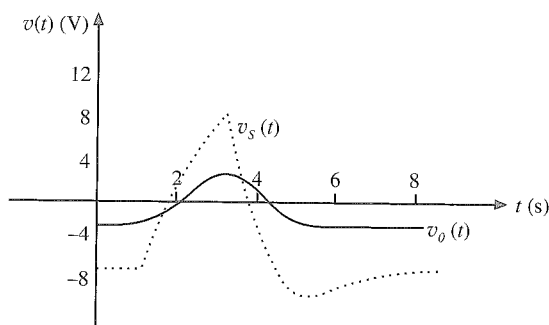


Figura 7.31 Formas de onda de entrada e saída para o Exemplo 7.15.

**E7.15** Para a rede da Figura E7.14a, trace o gráfico para a tensão de saída em um intervalo de 10 segundos usando um incremento de 50 ms caso a tensão de entrada seja

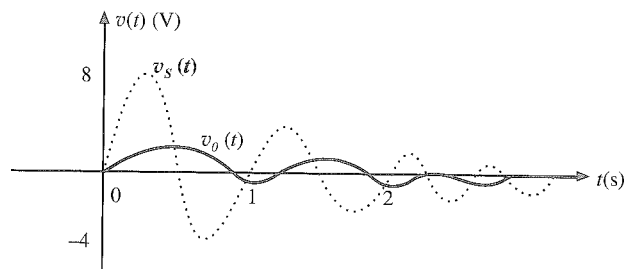
$$\begin{aligned} v_s(t) &= -5 \text{ V} & 0 \leq t \leq 1 \text{ s} \\ &= -5 + 15(1 - e^{-(t-1)/2}) \text{ V} & 1 \leq t \leq 3 \text{ s} \\ &= -5 + 15(1 - e^{-(t-1)/2}) - 15e^{-(t-3)/1} \text{ V} & 3 \leq t \end{aligned}$$

**Resp.:**

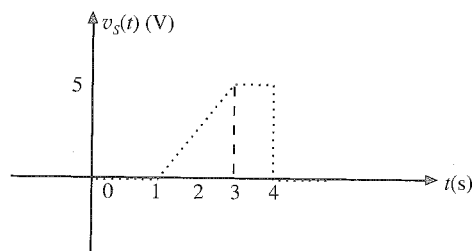


**E7.16** Para a rede da Figura E7.14a, trace o gráfico para a tensão de saída em um intervalo de quatro segundos usando um incremento de 20 ms caso a tensão de entrada seja

**Resp.:**  $v_s(t) = 10e^{-t} \sin 2\pi t \text{ V}$

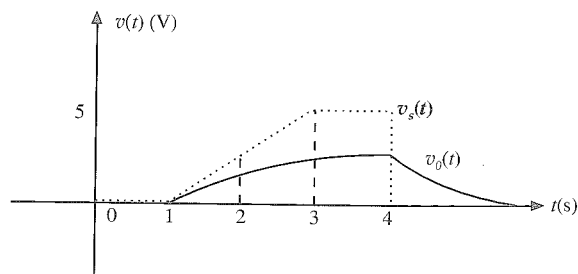


**E7.17** Para a rede da Figura E7.14a, trace o gráfico para a tensão de saída em um intervalo de 10 segundos usando um incremento de 50 ms caso a tensão de entrada seja a mostrada na Figura E7.17.



**Resp.:**

**Figura E7.17**



## 7.7 Resumo

Mostramos que a solução para circuitos  $RC$  e  $RL$  que têm somente um elemento único de armazenamento de energia (ou seja,  $C$  ou  $L$ ) envolve a resolução de uma equação diferencial de primeira ordem. Um método geral de resolução foi desenvolvido e um procedimento passo a passo descrito para determinar a solução. Tanto a resposta natural ou forçada dessas redes foram examinadas. Descobriu-se que a resposta do circuito na forma de uma exponencial decrescente era controlada por uma constante de tempo do circuito e que a resposta cai essencialmente para seu valor final em cinco constantes de tempo. As constantes de tempo para circuitos  $RC$  e  $RL$  são  $R_{Th}C$  e  $L/R_{Th}$ , respectivamente, onde  $R_{Th}$  é a resistência equivalente de Thévenin vista dos terminais do elemento de armazenagem.

Finalmente, a aplicação do PSPICE em problemas  $RC$  e  $RL$  foi apresentada.

### Pontos-Chave

- Em qualquer lugar de um circuito  $RC$  ou  $RL$ , a tensão ou corrente é obtida resolvendo-se uma equação diferencial de primeira ordem.
- Uma solução para a equação

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = A \quad \text{é} \quad x(t) = \frac{A}{a} + k_2 e^{-at}$$

onde  $A/a$  é a solução em regime permanente e  $1/a$  é chamada a constante de tempo.

- A função  $e^{-at}$  cai para um valor que é menos que 1% de seu valor inicial depois de um período de  $5/a$  segundos.
- Caso uma rede tenha uma constante de tempo pequena, sua resposta a alguma entrada irá rapidamente chegar ao seu valor de regime permanente; no entanto, caso a constante de tempo seja grande, um longo tempo será necessário para que a rede alcance tal estado.
- Um circuito  $RC$  tem uma constante de tempo de  $R_{Th}C$  segundos e um circuito  $RL$  tem uma constante de tempo de  $L/R_{Th}$  segundos.

### Problemas

7.1 Na rede da Figura P7.1, determine  $v_c(t)$  para  $t > 0$ .

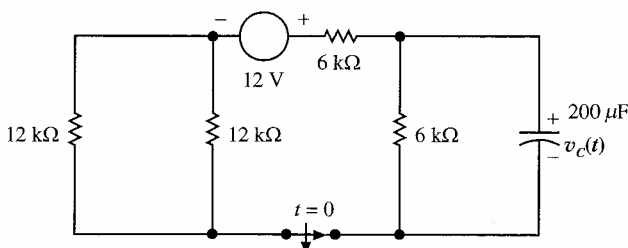


Figura P7.1

7.2 Na rede da Figura P7.2, determine  $v_c(t)$  para  $t > 0$ .

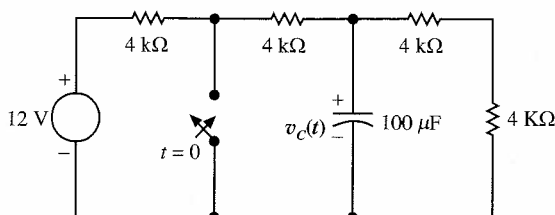


Figura P7.2

- 7.3 No circuito da Figura P7.3, determine  $i_L(t)$  para  $t > 0$ .

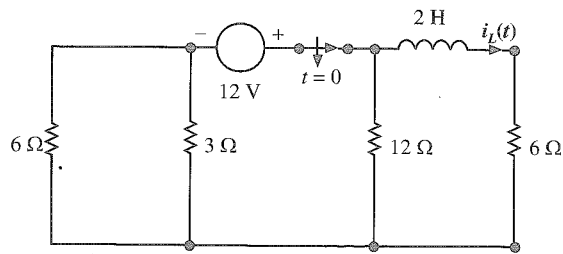


Figura P7.3

- 7.4 No circuito da Figura P7.4, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

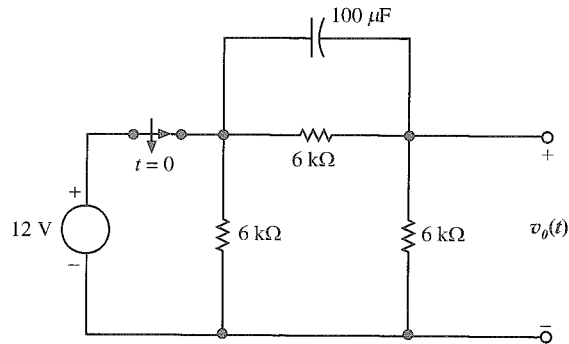


Figura P7.4

- 7.5 Na rede da Figura P7.5, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

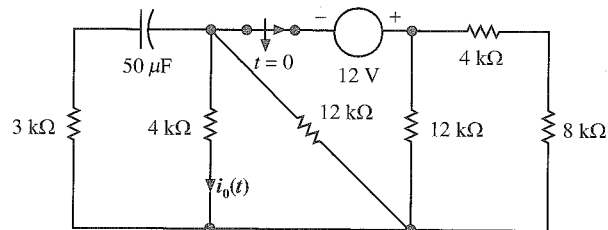


Figura P7.5

- 7.6 Na rede da Figura P7.6, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

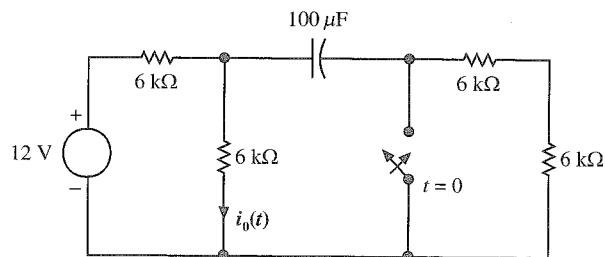


Figura P7.6

- 7.7 Na rede da Figura P7.7, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

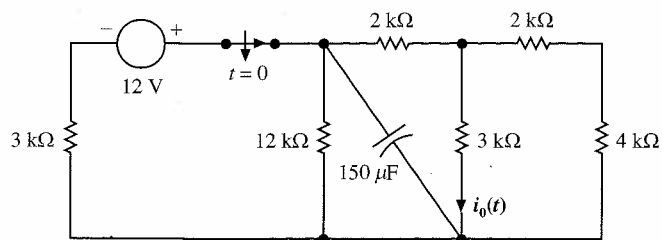


Figura P7.7

7.8 No circuito da Figura P7.8, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

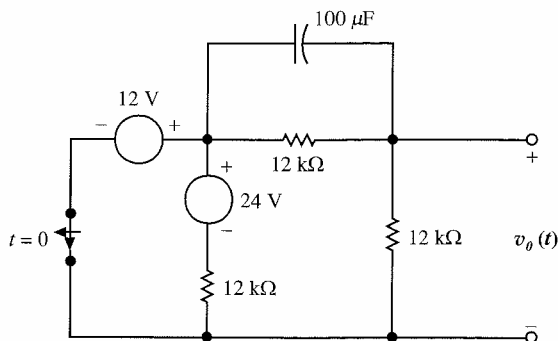


Figura P7.8

7.9 Na rede da Figura P7.9, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

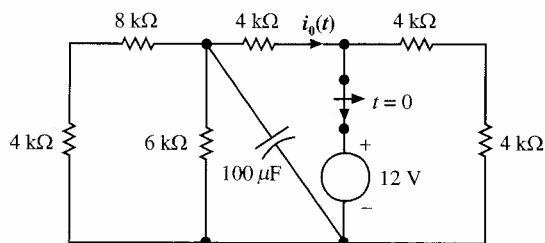


Figura P7.9

7.10 No circuito da Figura P7.10, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

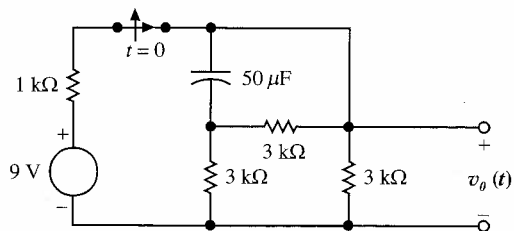


Figura P7.10

7.11 Na rede da Figura P7.11, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

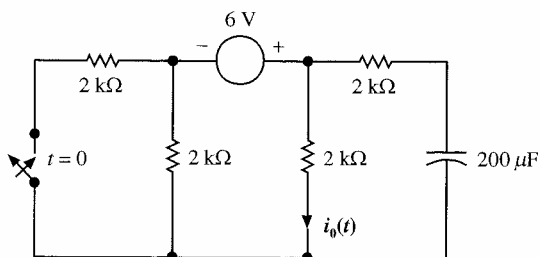


Figura P7.11

7.12 Na rede da Figura P7.12, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

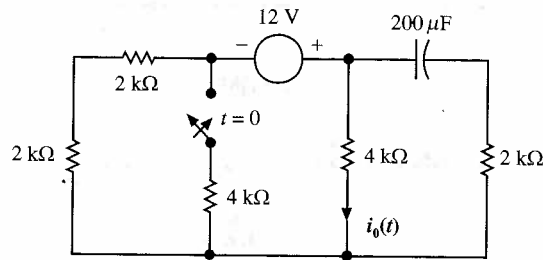


Figura P7.12

7.13 No circuito da Figura P7.13, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

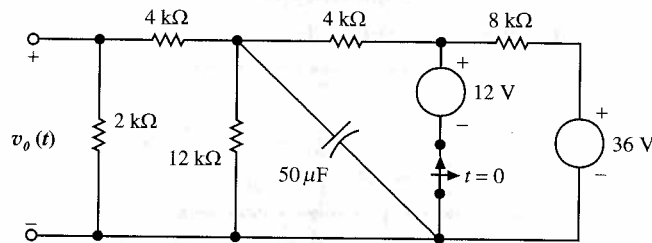


Figura P7.13

7.14 Na rede da Figura P7.14, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

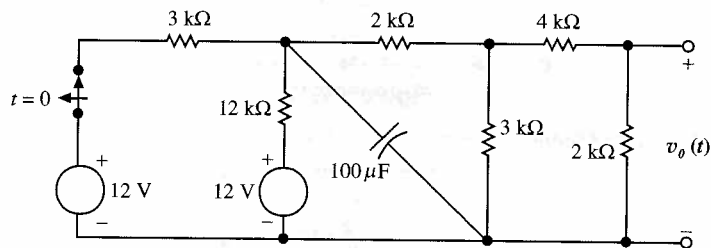


Figura P7.14

7.15 Na rede da Figura P7.15, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

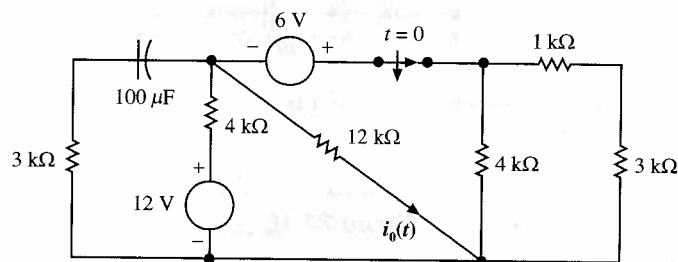


Figura P7.15



7.16 No circuito da Figura P7.16, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

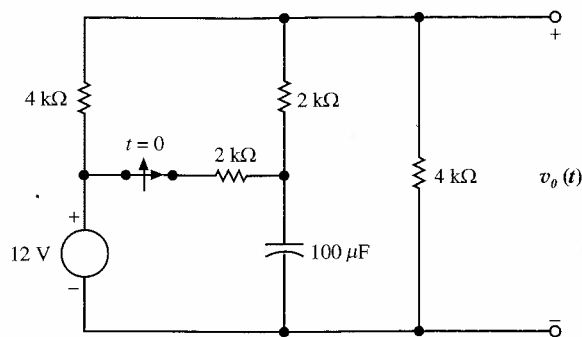


Figura P7.16

7.17 No circuito da Figura P7.17, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

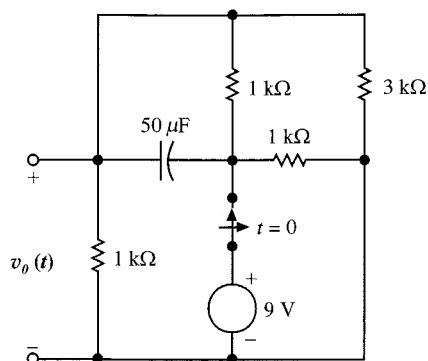


Figura P7.17

7.18 Na rede da Figura P7.18, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

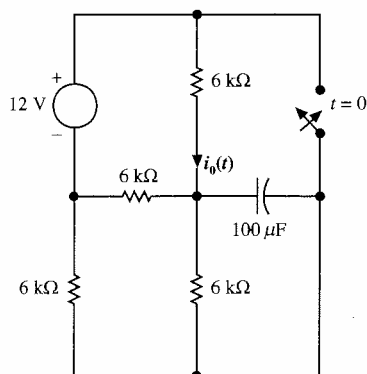


Figura P7.18

7.19 No circuito da Figura P7.19, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

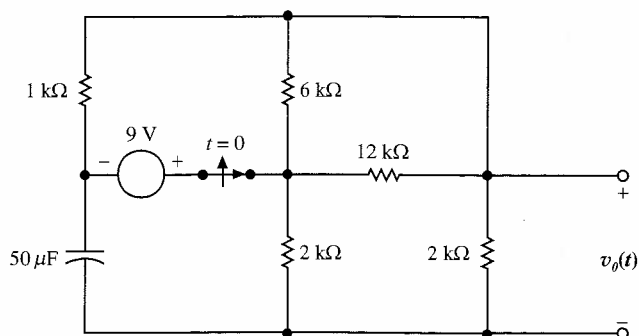


Figura P7.19

7.20 No circuito da Figura P7.20, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

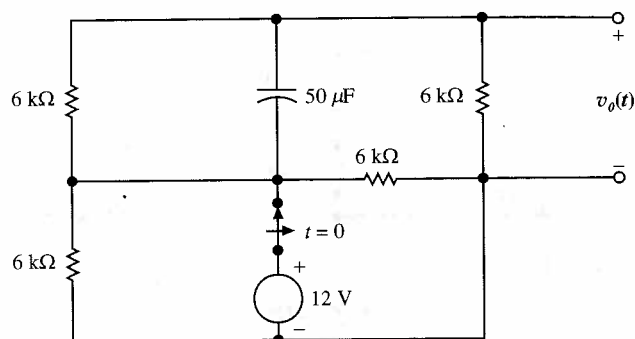


Figura P7.20

7.21 Na rede da Figura P7.21, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

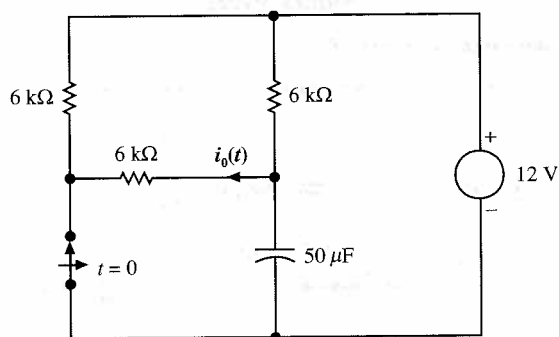


Figura P7.21

7.22 No circuito da Figura P7.22, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

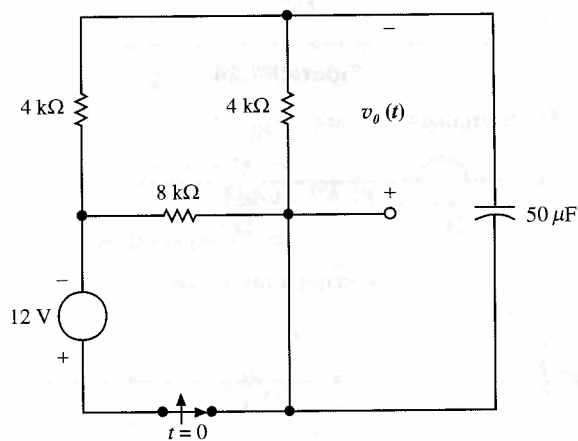


Figura P7.22

7.23 Na rede da Figura P7.23, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

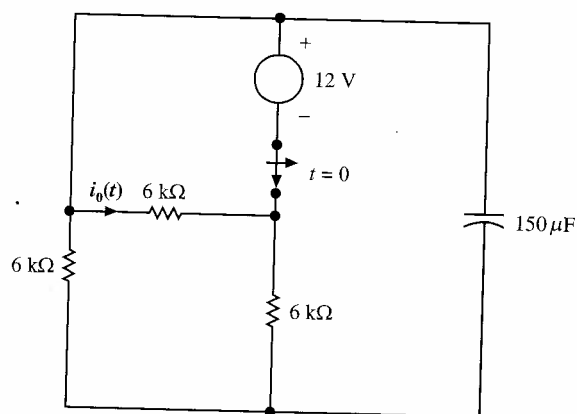


Figura P7.23

7.24 Na rede da Figura P7.24, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

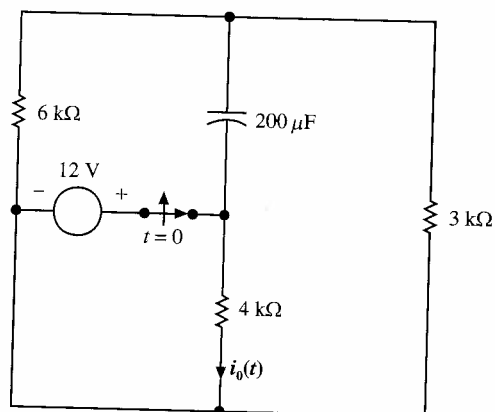


Figura P7.24

7.25 No circuito da Figura P7.25, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

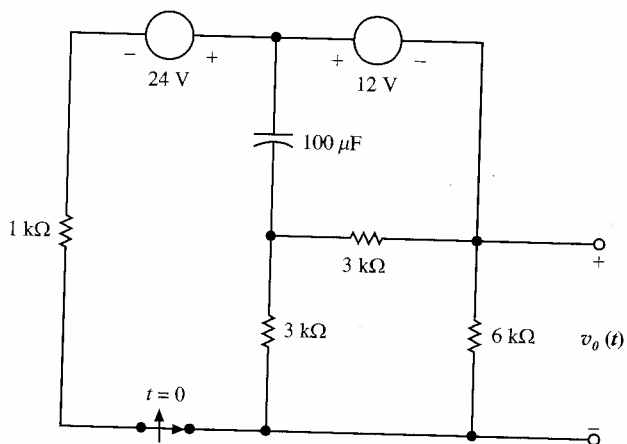


Figura P7.25

7.26 Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  no circuito da Figura P7.26.

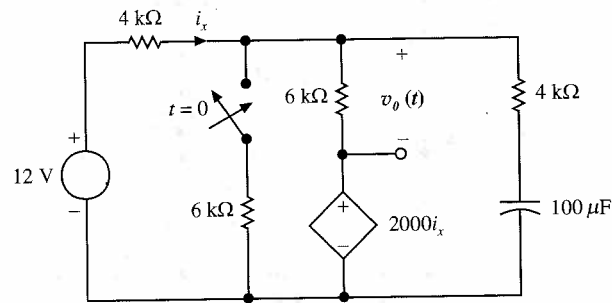


Figura P7.26

7.27 Na Figura P7.27, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

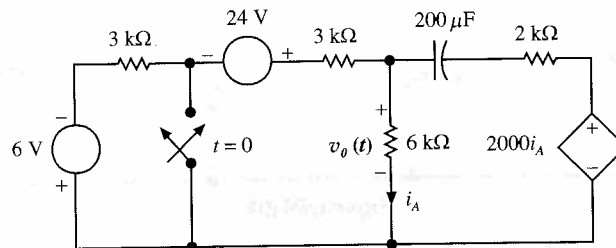


Figura P7.27

7.28 Determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P7.28.

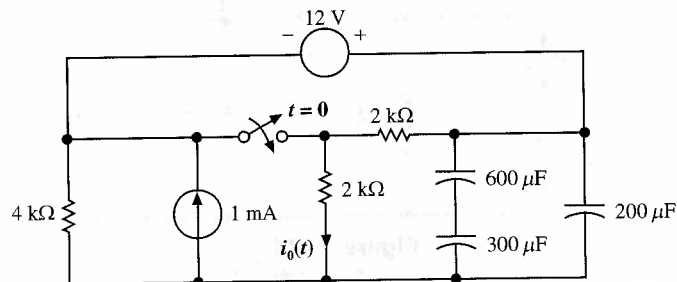


Figura P7.28

7.29 Determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P7.29.

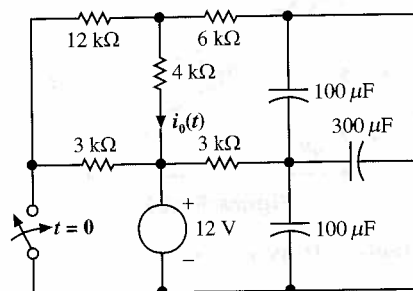


Figura P7.29

7.30 Determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P7.30.

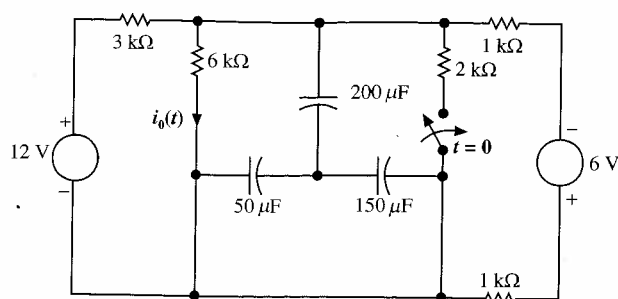


Figura P7.30

7.31 No circuito da Figura P7.31, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

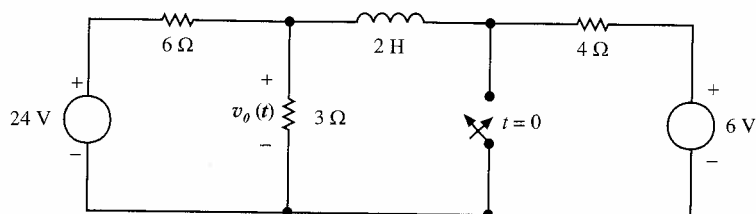


Figura P7.31

7.32 No circuito da Figura P7.32, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

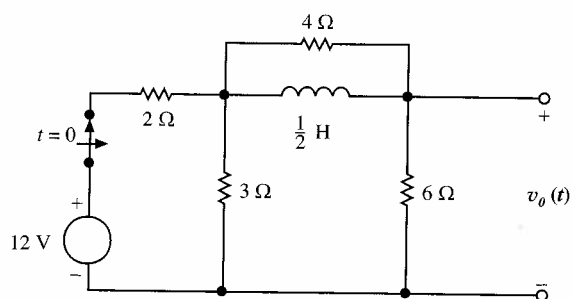


Figura P7.32

7.33 Na rede da Figura P7.33, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

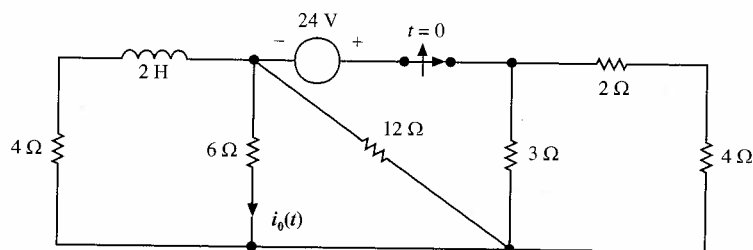


Figura P7.33

7.34 No circuito da Figura P7.34, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

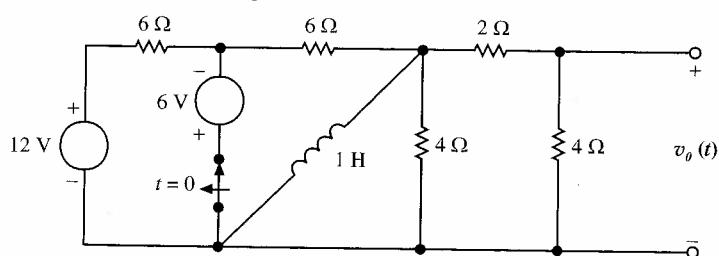


Figura P7.34

7.35 Na rede da Figura P7.35, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

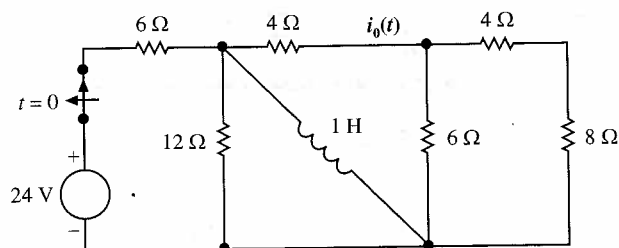


Figura P7.35

7.36 No circuito da Figura P7.36, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

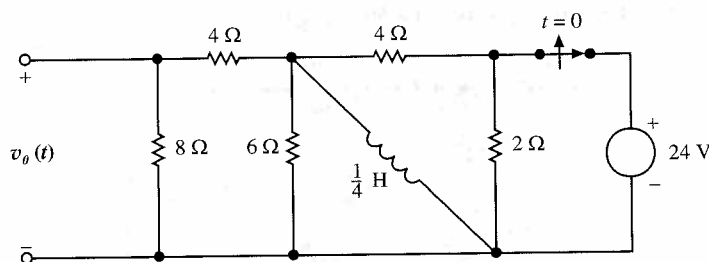


Figura P7.36

7.37 Na rede da Figura P7.37, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

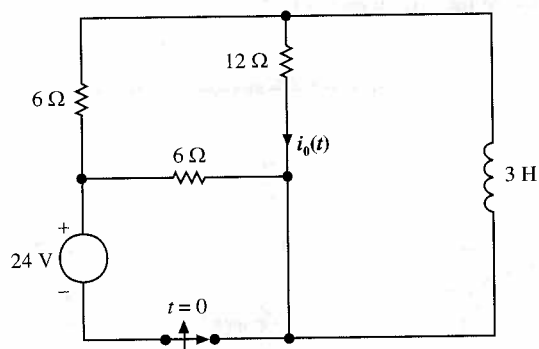


Figura P7.37

7.38 No circuito da Figura P7.38, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

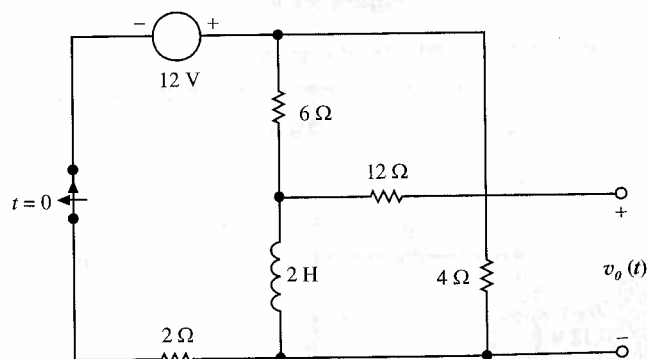


Figura P7.38

7.39 No circuito da Figura P7.39, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

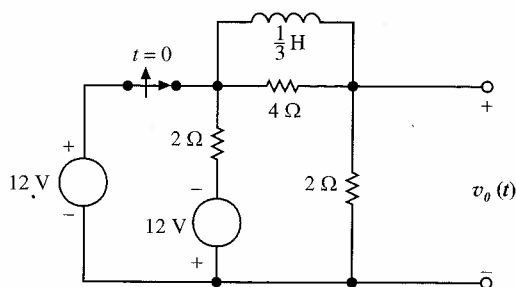


Figura P7.39

7.40 Na rede da Figura P7.40, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

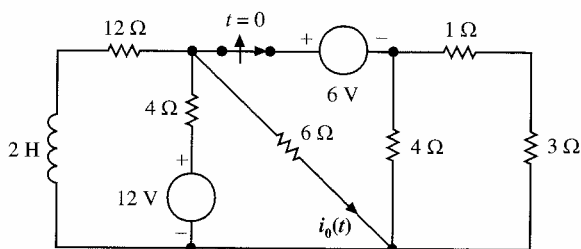


Figura P7.40

7.41 Na rede da Figura P7.41, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

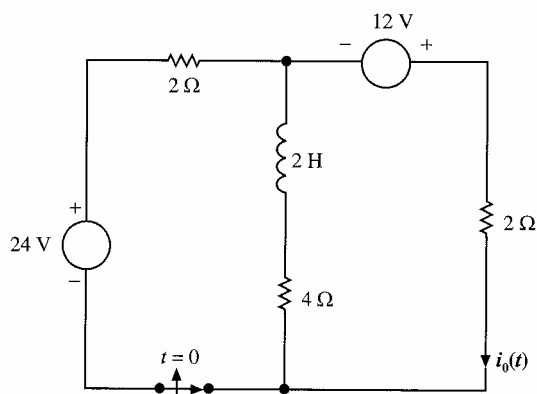


Figura P7.41

7.42 Na rede da Figura P7.42, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

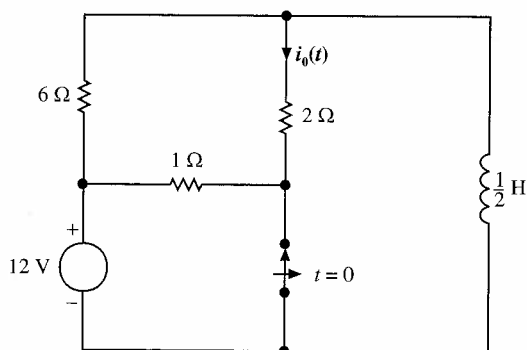


Figura P7.42

7.43 Na rede da Figura P7.43, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

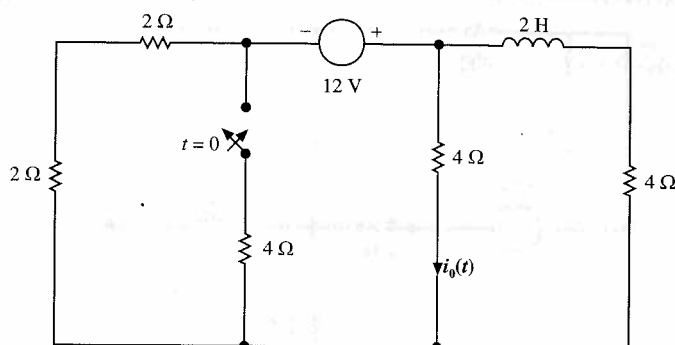


Figura P7.43

7.44 Na rede da Figura P7.44, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

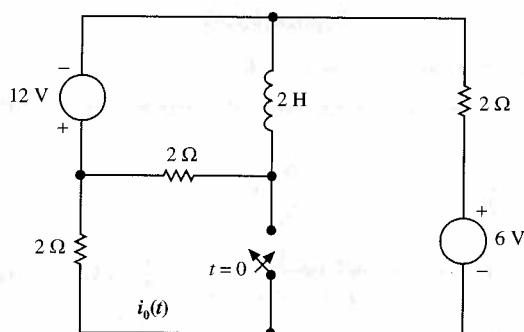


Figura P7.44

7.45 No circuito da Figura P7.45, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

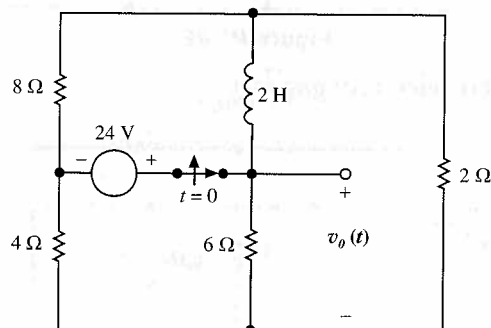


Figura P7.45

7.46 No circuito da Figura P7.46, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

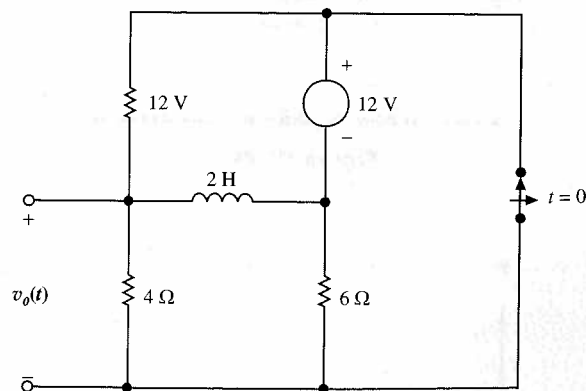


Figura P7.46



7.47 Na rede da Figura P7.47, determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

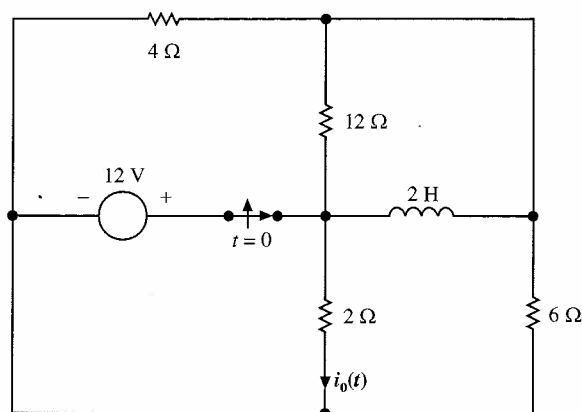


Figura P7.47

7.48 No circuito da Figura P7.48, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

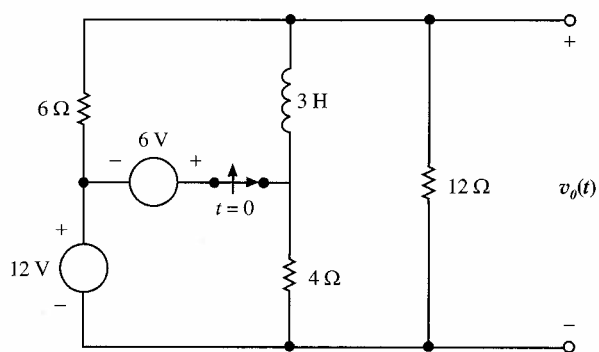


Figura P7.48

7.49 No circuito da Figura P7.49, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

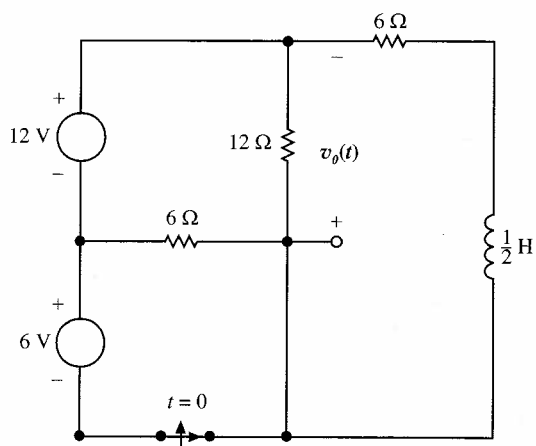


Figura P7.49

7.50 No circuito da Figura P7.50, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

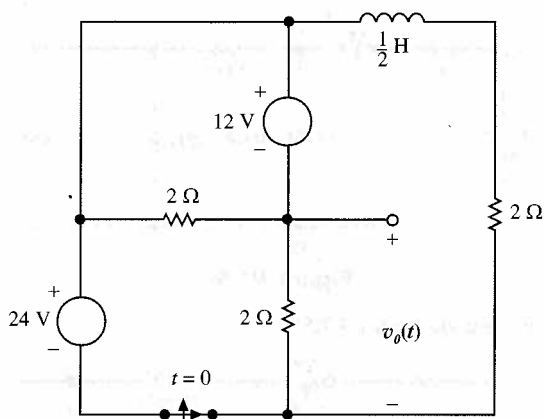


Figura P7.50

7.51 No circuito da Figura P7.51, determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

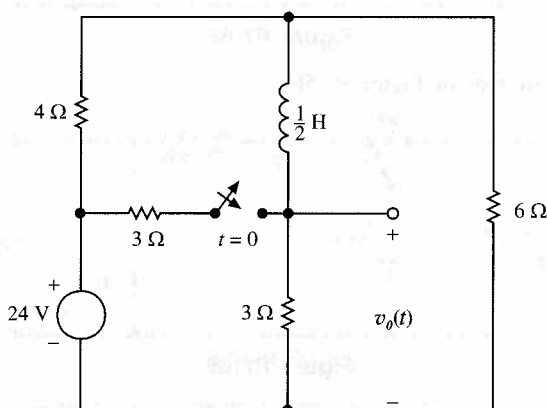


Figura P7.51

7.52 Determine a expressão para  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , na rede da Figura P7.52.

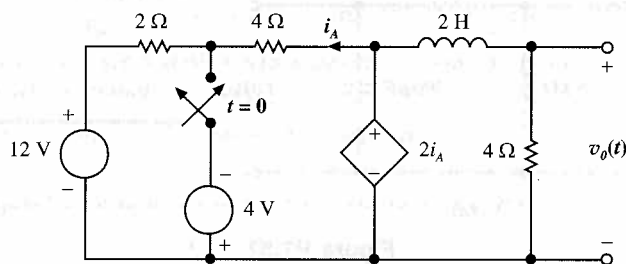


Figura P7.52

7.53 Determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P7.53.

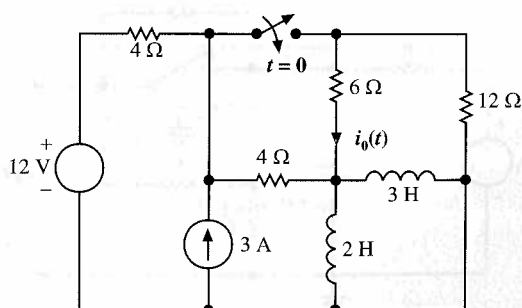


Figura P7.53

7.54 Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P7.54. A tensão inicial do capacitor é mostrada na figura.

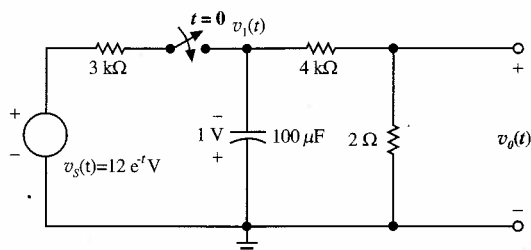


Figura P7.54

7.55 Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P7.55.

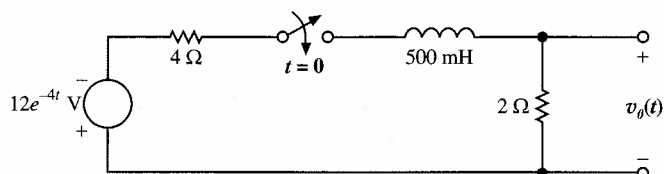


Figura P7.55

7.56 Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P7.56.

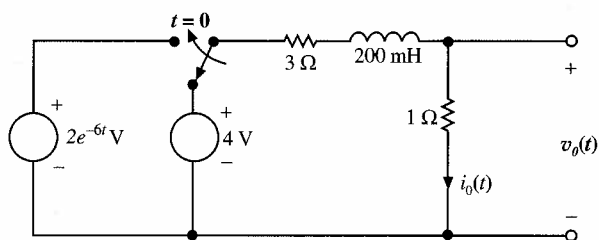


Figura P7.56

7.57 Determine a equação para a tensão  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , na Figura P7.57a quando sujeita ao pulso de entrada mostrado na Figura P.57b.

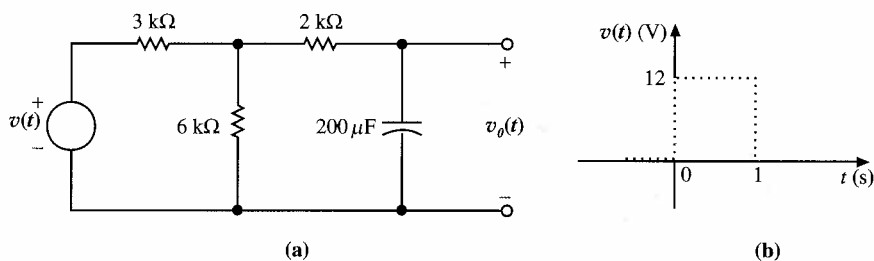


Figura P7.57

7.58 Determine o relacionamento entre as tensões de entrada e saída para os circuitos mostrados na Figura P7.58.

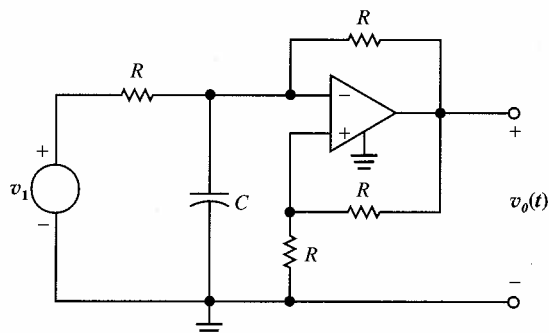


Figura P7.58

- 7.59 Dada a rede da Figura P7.26, trace o gráfico para  $v_o(t)$  para  $0 \leq t \leq 3$  s utilizando um incremento de 30 ms e usando o PSPICE.
- 7.60 Dada a rede da Figura P7.27, trace o gráfico para  $v_o(t)$  para  $0 \leq t \leq 4$  s utilizando um incremento de 40 ms e usando o PSPICE.
- 7.61 Dada a rede da Figura P7.61a, trace o gráfico para  $i_o(t)$  para um intervalo de quatro segundos e utilizando um incremento de 20 ms caso a fonte de entrada  $i_S(t)$  seja a mostrada na Figura P7.61b.

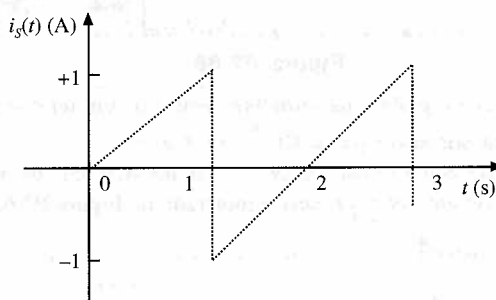
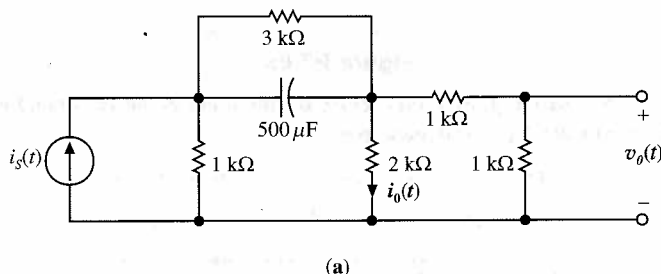


Figura P7.61

- 7.62 Para a rede da Figura P7.61a, trace o gráfico para a corrente  $i_o(t)$  em um intervalo de 10 segundos utilizando um incremento de 50 ms caso a entrada  $i_S(t)$  seja dada pela expressão

$$i_S(t) = 10(1 - e^{-t/4}) \text{ A} \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ s}$$

$$= 10(1 - e^{-t/4}) - 10e^{-(t-2)} \text{ A} \quad 2 \text{ s} \leq t$$

- 7.63 Para a rede da Figura 7.61a, trace o gráfico para a tensão  $v_o(t)$  em um intervalo de dois segundos utilizando um incremento de 10 ms caso a entrada  $i_S(t)$  seja

$$i_S(t) = 10 e^{-2t} \sin 4\pi t \text{ A}$$

- 7.64 Para a rede da Figura P7.61a, trace o gráfico para a corrente  $i_o(t)$  em um intervalo de quatro segundos utilizando um incremento de 20 ms caso a entrada  $i_S(t)$  seja como a mostrada na Figura P7.64.

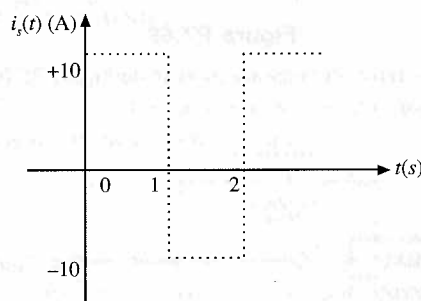


Figura P7.64

- 7.65 Determine a tensão de saída  $v_o(t)$  na rede da Figura P7.65 caso a tensão de entrada seja

$$v_i(t) = 5[u(t) - u(t - 0,05)] \text{ V}$$

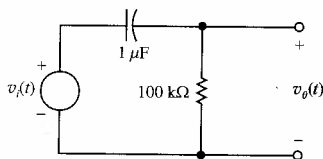


Figura P7.65

- 7.66 Dada a rede da Figura P7.66, trace o gráfico  $v(t)$  dentro de um intervalo de 10 segundos utilizando um incremento de 50 ms caso a fonte de entrada  $v_S(t)$  seja dada por

$$\begin{aligned} v_S(t) &= 15(1 - e^{-t/2}) \text{ V} & 0 \leq t \leq 2 \text{ s} \\ &= 15(1 - e^{-t/2}) - 15e^{-(t-2)} \text{ V} & 2 \leq t \end{aligned}$$

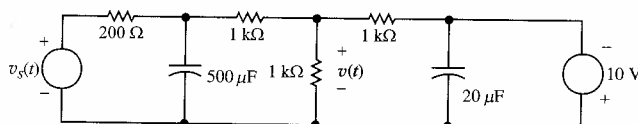


Figura P7.66

- 7.67 Para a rede da Figura P7.66, trace o gráfico da saída  $v(t)$  dentro de um intervalo de dois segundos utilizando um incremento de 10 ms caso a entrada seja  $v_S(t) = 10e^{-2t} \sin 4\pi t$  V.
- 7.68 Para a rede da Figura P7.66, trace o gráfico da tensão  $v(t)$  em um intervalo de dois segundos utilizando um incremento de 10 ms caso a tensão de entrada  $v_S(t)$  seja a mostrada na Figura P7.68.

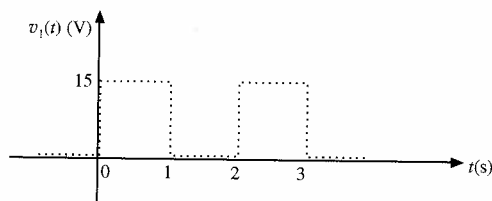


Figura P7.68

- 7.69 Para a rede da Figura P7.66, trace o gráfico da tensão  $v(t)$  durante um intervalo de seis segundos utilizando um incremento de 30 ms caso a tensão de entrada  $v_S(t)$  seja como a mostrada na Figura P7.69.

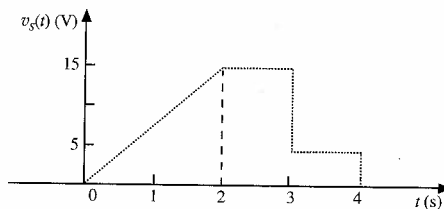


Figura P7.69

- 7.70 Utilize o PSPICE para determinar o pulso de resposta da rede da Figura 7.70a caso a entrada seja a mostrada na Figura P7.70b. Modele o amp-op com  $A = 10^5$ ,  $R_i = \infty$  e  $R_o = 0$ .

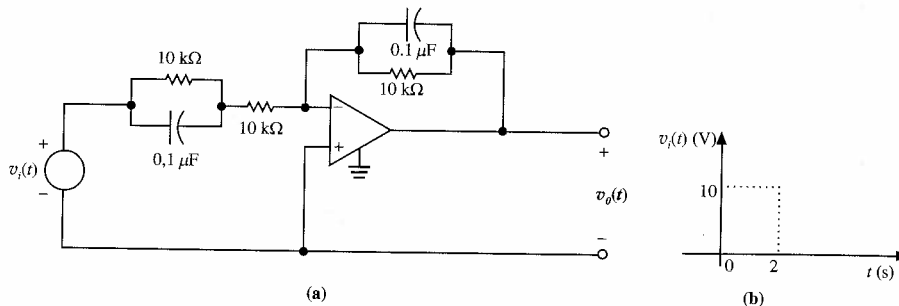


Figura P7.70

# Circuitos RLC

Neste capítulo estenderemos nossa análise dos circuitos que contêm somente um elemento de armazenamento àqueles em que um indutor e um capacitor estão presentes simultaneamente. Apesar de os circuitos *RLC* serem mais complicados que aqueles analisados no Capítulo 7, usaremos um desenvolvimento semelhante ao descrito anteriormente para obter uma solução.

Nossa apresentação trata somente de circuitos simples, uma vez que a análise pode se tornar muito complexa para redes que contenham mais de um laço ou mais de um nó além do nó de referência. Uma vez que tenhamos apresentado o desenvolvimento matemático das equações de resposta, vamos analisar várias redes em que os parâmetros tenham sido escolhidos para ilustrar os diferentes tipos de resposta. Além disso, estenderemos a análise usando PSPICE a redes que contenham um indutor e um capacitor.

Um método eficiente para obter uma solução matemática geral para as redes *RLC* será apresentado no Capítulo 17.

## 8.1 A Equação Básica do Circuito

Para iniciar nosso desenvolvimento, vamos considerar os dois circuitos *RLC* básicos mostrados na Figura 8.1. Vamos assumir que alguma energia está inicialmente armazenada tanto no capacitor como no indutor. A equação nodal para o circuito *RLC* em paralelo é

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx + i_L(t_0) + C \frac{dv}{dt} = i_s(t)$$

Do mesmo modo, a equação de laço para o circuito *RLC* em série é

$$Ri + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx + v_C(t_0) + L \frac{di}{dt} = v_s(t)$$

Note que a equação para a tensão nodal no circuito em paralelo é da mesma forma que a da corrente de laço no circuito em série. Portanto, a solução desses dois circuitos depende apenas de resolvermos somente uma equação. Se as duas equações acima são derivadas em relação ao tempo, temos que

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = \frac{di_s}{dt}$$

e

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dv_s}{dt}$$

Uma vez que ambos os circuitos conduzem a uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes, iremos concentrar nossa análise nesse tipo de equação.

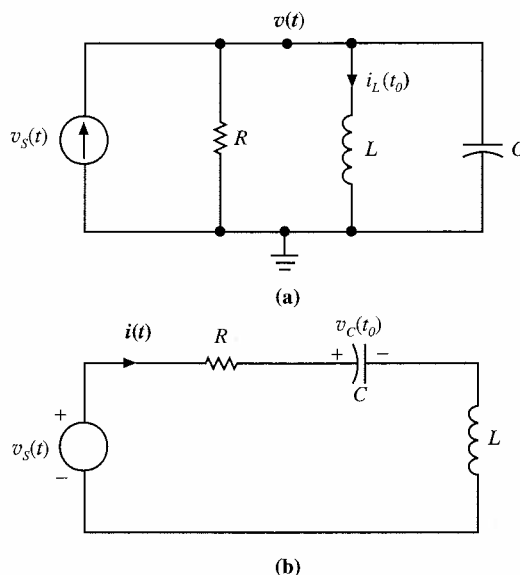


Figura 8.1 Circuitos RLC em série e em paralelo.

## 8.2 Desenvolvimento Matemático das Equações de Resposta

De acordo com o nosso desenvolvimento da solução de uma equação diferencial de primeira ordem que resulta da análise de um circuito *RL* ou *RC*, como mostrado no Capítulo 7, empregaremos aqui o mesmo método para obter a solução de uma equação diferencial de segunda ordem que resulta da análise de circuitos *RLC*. Como regra geral, nesse caso somos confrontados com uma equação da forma

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = f(t) \quad (8.1)$$

Mais uma vez utilizamos o fato de que se  $x(t) = x_p(t)$  é uma solução para a Equação 8.1, e se  $x(t) = x_p(t)$  é uma solução para a equação homogênea

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = 0$$

então

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t)$$

é uma solução para a Equação original 8.1. Se novamente nos restringirmos a uma função de entrada constante [ou seja,  $f(t) = A$ ], o desenvolvimento no início do Capítulo 7 mostra que a solução da Equação 8.1 será da forma

$$x(t) = \frac{A}{a_2} + x_c(t) \quad (8.2)$$

Vamos considerar a solução da equação homogênea

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = 0$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são constantes. Para simplificar, escrevemos a equação na forma

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (8.3)$$

onde fizemos as seguintes substituições simples para as constantes  $a_1 = 2\alpha$  e  $a_2 = \omega_0^2$ . Seguindo o desenvolvimento de uma solução para a equação diferencial homogênea de primeira ordem do Capítulo 7, a solução da Equação 8.3 deve ser uma função cujas derivadas de primeira e segunda ordem têm a mesma forma, para que o lado esquerdo da Equação 8.3 se torne idêntico a zero para todo  $t$ . Novamente assumimos que

$$x(t) = Ke^{st}$$

Substituindo essa expressão na Equação 8.3, tem-se

$$s^2 Ke^{st} + 2\alpha s Ke^{st} + \omega_0^2 Ke^{st} = 0$$

Dividindo-se ambos os lados da equação por  $Ke^{st}$ , tem-se

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \quad (8.4)$$

Essa equação é normalmente chamada de *equação característica*.  $\alpha$  é chamado de *coeficiente de amortecimento* exponencial e  $\omega_0$  é referido como a *frequência de ressonância não-amortecida*. A importância dessa terminologia se tornará clara à medida que prosseguirmos com o desenvolvimento. Se essa equação for satisfeita, nossa solução assumida  $x(t) = Ke^{st}$  está correta. Empregando-se a fórmula quadrática, temos que a Equação 8.4 é satisfeita se

$$\begin{aligned} s &= \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2}}{2} \\ &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Portanto, existem dois valores de  $s$ ,  $s_1$  e  $s_2$  que satisfazem a Equação 8.4.

$$\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Isto significa que  $x_1(t) = K_1 e^{s_1 t}$  é uma solução da Equação 8.3 e que  $x_2(t) = K_2 e^{s_2 t}$  é também uma solução da Equação 8.3; isto é,

$$\frac{d^2}{dt^2} (K_1 e^{s_1 t}) + 2\alpha \frac{d}{dt} (K_1 e^{s_1 t}) + \omega_0^2 K_1 e^{s_1 t} = 0$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2} (K_2 e^{s_2 t}) + 2\alpha \frac{d}{dt} (K_2 e^{s_2 t}) + \omega_0^2 K_2 e^{s_2 t} = 0$$

A soma dessas duas equações produz a igualdade

$$\frac{d^2}{dt^2} (K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}) + 2\alpha \frac{d}{dt} (K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}) + \omega_0^2 (K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}) = 0$$

Note que a soma dessas duas soluções é também uma solução. Portanto, em geral, a solução complementar da Equação 8.1 é da forma

$$x_c(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (8.7)$$

$K_1$  e  $K_2$  são constantes que podem ser avaliadas a partir das condições iniciais  $x(0)$  e  $dx(0)/dt$ . Por exemplo, uma vez que



$$x(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

então

$$x(0) = K_1 + K_2$$

e

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{dx(0)}{dt} = s_1 K_1 + s_2 K_2$$

Dessa forma,  $x(0)$  e  $dx(0)/dt$  produzem duas equações simultâneas que, quando resolvidas, produzem as constantes  $K_1$  e  $K_2$ .

Examinando em detalhes as equações 8.6 e 8.7, vemos que a forma da solução da equação homogênea depende da magnitude relativa dos valores de  $\alpha$  e  $\omega_0$ . Por exemplo, se  $\alpha > \omega_0$ , as raízes da equação característica,  $s_1$  e  $s_2$ , também chamadas de *freqüências naturais* porque determinam a resposta natural (não-forçada) da rede, são reais e diferentes; se  $\alpha < \omega_0$ , as raízes são números complexos; e finalmente se  $\alpha = \omega_0$ , as raízes são reais e iguais. Todos esses casos são muito importantes; desse modo examinaremos cada um deles em detalhes.

**Caso 1,  $\alpha > \omega_0$ .** Esse caso é normalmente chamado de sobre-amortecido.  $s_1$  e  $s_2$  são reais e distintas e, portanto, a resposta natural da rede descrita pela equação diferencial de segunda ordem é da forma

$$x_c(t) = K_1 e^{-(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} + K_2 e^{-(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \quad (8.8)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são achadas a partir das condições iniciais. Isto indica que a resposta natural é a soma de duas exponenciais decrescentes.

**Caso 2,  $\alpha < \omega_0$ .** Esse caso é chamado de sub-amortecido. Uma vez que  $\omega_0 > \alpha$ , as raízes da equação característica dadas na Equação 8.6 podem ser escritas como

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + j\omega_n$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - j\omega_n$$

onde  $j = \sqrt{-1}$  e  $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ . Nesse caso,  $s_1$  e  $s_2$  são números complexos. A resposta natural é então

$$x_c(t) = K_1 e^{-(\alpha - j\omega_n)t} + K_2 e^{-(\alpha + j\omega_n)t}$$

Essa equação pode ser simplificada da seguinte maneira. Em primeiro lugar, a equação pode ser re-escrita como

$$x_c(t) = e^{-\alpha t} (K_1 e^{j\omega_n t} + K_2 e^{-j\omega_n t})$$

Usando-se então as identidades de Euler,

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

e

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

obtemos então

$$x_c(t) = e^{-\alpha t} [K_1 (\cos \omega_n t + j \sin \omega_n t) + K_2 (\cos \omega_n t - j \sin \omega_n t)]$$

$$= e^{-\alpha t} [(K_1 + K_2) \cos \omega_n t + (jK_1 - jK_2) \sin \omega_n t] \quad (8.9)$$

$$= e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$ , como  $K_1$  e  $K_2$ , são constantes, as quais são avaliadas usando-se as condições iniciais  $x(0)$  e  $dx(0)/dt$ . Caso  $x_c(t)$  seja real,  $K_1$  e  $K_2$  serão complexos e  $K_2 = K_1^*$ .  $A_1 = K_1 + K_2$  é portanto duas vezes a parte real de  $K_1$ , e  $A_2 = jK_1 - jK_2$  é  $-2$  vezes a parte imaginária de  $K_1$ .  $A_1$  e  $A_2$  são números reais. Isto ilustra que a resposta natural é uma resposta oscilatória exponencialmente amortecida.

**Caso 3,  $\alpha = \omega_0$ .** Esse caso, chamado de *criticamente amortecido*, resulta em

$$s_1 = s_2 = -\alpha$$

como mostrado na Equação 8.6. Portanto, a Equação 8.7 reduz-se à

$$x_c(t) = K_3 e^{-\alpha t}$$

onde  $K_3 = K_1 + K_2$ . No entanto, esta não pode ser uma solução para a equação diferencial de segunda ordem 8.3 porque geralmente não é possível satisfazer as duas condições iniciais  $x(0)$  e  $dx(0)/dt$  com a constante única  $K_3$ .

No caso em que a equação característica tem raízes repetidas, uma solução pode ser obtida da seguinte maneira. Se  $x_1(t)$  é conhecida como uma solução da equação homogênea de segunda ordem, então por meio da substituição  $x(t) = x_1(t)y(t)$  podemos transformar a equação diferencial dada em uma equação de primeira ordem em  $dy(t)/dt$ . Uma vez que essa equação resultante é somente uma função de  $y(t)$ , ela pode ser resolvida para acharmos a solução geral  $x(t) = x_1(t)y(t)$ .

Para o caso em questão,  $s_1 = s_2 = -\alpha$ , e a partir daí a equação básica é

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \alpha^2 x(t) = 0 \quad (8.10)$$

e uma solução conhecida é

$$x_1(t) = K_3 e^{-\alpha t}$$

Empregando-se a substituição,

$$x_2(t) = x_1(t)y(t) = K_3 e^{-\alpha t} y(t)$$

a Equação 8.10 se torna

$$\frac{d^2}{dt^2} [K_3 e^{-\alpha t} y(t)] + 2\alpha \frac{d}{dt} [K_3 e^{-\alpha t} y(t)] + \alpha^2 K_3 e^{-\alpha t} y(t) = 0$$

Avaliando-se as derivadas, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [K_3 e^{-\alpha t} y(t)] &= -K_3 \alpha e^{-\alpha t} y(t) + K_3 e^{-\alpha t} \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{d^2}{dt^2} [K_3 e^{-\alpha t} y(t)] &= K_3 \alpha^2 e^{-\alpha t} y(t) - 2K_3 \alpha e^{-\alpha t} \frac{dy(t)}{dt} + K_3 e^{-\alpha t} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

Substituindo-se essas expressões na equação acima, tem-se

$$K_3 e^{-\alpha t} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0$$

Logo,

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0$$

e dessa forma

$$y(t) = A_1 + A_2 t$$

Portanto, a solução geral é

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(t)y(t) \\ &= K_3 e^{-\alpha t} (A_1 + A_2 t) \end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$x_2(t) = B_1 e^{-\alpha t} + B_2 t e^{-\alpha t} \quad (8.11)$$

onde  $B_1$  e  $B_2$  são constantes derivadas das condições iniciais.

É interessante ver os gráficos das respostas naturais para estes três casos discutidos: sobre-amortecido, Equação 8.8; subamortecido, Equação 8.9; e criticamente amortecido, Equação 8.11. A Figura 8.2 ilustra graficamente os três casos para as situações em que  $x_c(0) = 0$ . Note que a resposta criticamente amortecida sobe e desce mais rapidamente do que a resposta sobre-amortecida. A resposta subamortecida é uma senóide exponencialmente amortecida cuja taxa de queda é dependente do fator  $\alpha$ . Na realidade, os

termos  $\pm e^{-\alpha t}$  definem o que é chamado de *envelope* de resposta, e as oscilações amortecidas (ou seja, as oscilações de amplitude decrescente) mostradas pela forma de onda da Figura 8.2b estão confinadas a esse envelope.

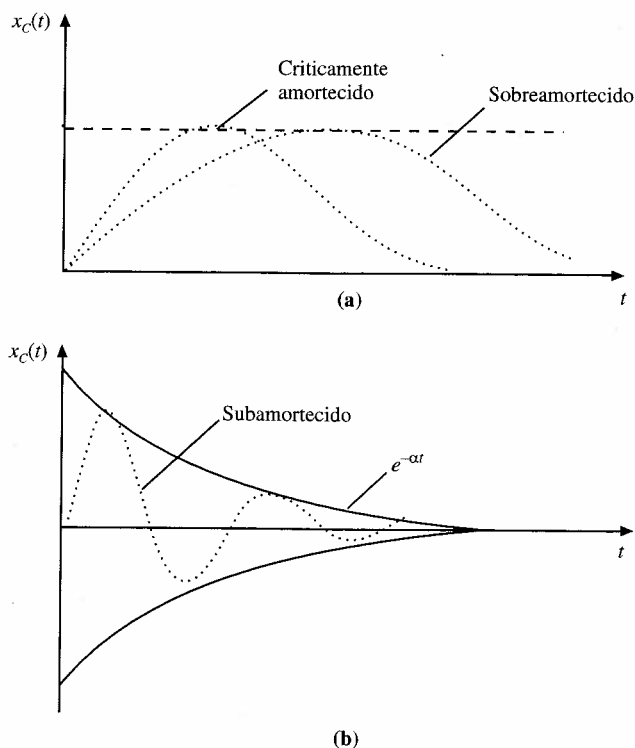


Figura 8.2 Comparação de respostas sobreamortecida, criticamente amortecida e subamortecida.

### Exercícios

- E8.1** Um circuito  $RLC$  em paralelo possui os seguintes parâmetros:  $R = 1 \, \Omega$ ,  $L = 2 \, \text{H}$  e  $C = 2 \, \text{F}$ . Calcule o quociente de amortecimento e a frequência natural não-amortecida dessa rede.  
**Resp.:**  $\alpha = 0,25$ ,  $\omega_0 = 0,5 \, \text{rad/s}$ .
- E8.2** Um circuito  $RLC$  em série consiste de  $R = 2 \, \Omega$ ,  $L = 1 \, \text{H}$  e um capacitor. Determine o tipo de resposta apresentada pela rede caso (a)  $C = \frac{1}{2} \, \text{F}$ , (b)  $C = 1 \, \text{F}$  e (c)  $C = 2 \, \text{F}$ .  
**Resp.:** (a) Subamortecido, (b) criticamente amortecido, (c) sobreamortecido.

## 8.3 A Resposta da Rede

Analisaremos agora um número de redes  $RLC$  simples que contêm tanto condições iniciais diferentes de zero como funções de entrada constante. Serão considerados circuitos sobreamortecidos, subamortecidos e criticamente amortecidos. O enfoque aqui mostrará não somente técnicas de equações diferenciais, mas também a maneira como circuitos equivalentes, válidos em  $t = 0+$  e  $t = \infty$ , são utilizados nessa análise. Os exemplos seguintes servirão para demonstrar as técnicas de análise.

### Exemplo 8.1

Consideremos o circuito em paralelo mostrado na Figura 8.3. A equação diferencial de segunda ordem que descreve a tensão  $v(t)$  é

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

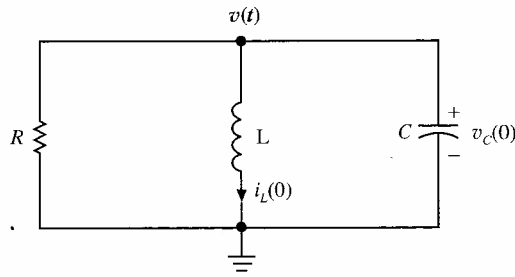


Figura 8.3 Circuito RLC em paralelo.

Uma comparação dessa equação com as equações 8.3 e 8.4 indica que para o circuito RLC em paralelo o quociente de amortecimento é  $\frac{1}{2}RC$  e a frequência de ressonância é  $1/\sqrt{LC}$ . Caso os parâmetros do circuito sejam  $R = 2 \, \Omega$ ,  $C = 1/5 \, \text{F}$  e  $L = 5 \, \text{H}$ , a equação se torna

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2,5 \frac{dv}{dt} + v = 0$$

Vamos assumir que as condições iniciais nos elementos de armazenamento são  $i_L(0) = -1 \, \text{A}$  e  $v_C(0) = 4 \, \text{V}$ .

A equação característica para a rede é

$$s^2 + 2,5s + 1 = 0$$

e as raízes são

$$s_1 = -2$$

$$s_2 = -0,5$$

Uma vez que as raízes são reais e diferentes, o circuito é sobreamortecido, e  $v(t)$  é da forma

$$v(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-0,5t}$$

As condições iniciais são agora empregadas para determinar as constantes  $K_1$  e  $K_2$ . Uma vez que  $v(t) = v_C(t)$ ,

$$v_C(0) = v(0) = 4 = K_1 + K_2$$

A segunda equação necessária para determinar  $K_1$  e  $K_2$  é normalmente obtida da expressão

$$\frac{dv(t)}{dt} = -2K_1 e^{-2t} - 0,5K_2 e^{-0,5t}$$

No entanto, a segunda condição inicial não é  $dv(0)/dt$ . Se fosse esse o caso, avaliaríamos simplesmente a equação acima no instante  $t = 0$ . Isto produziria uma segunda equação nas variáveis  $K_1$  e  $K_2$ . Podemos, entretanto, contornar esse problema notando que a equação nodal para o circuito pode ser escrita como

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + i_L(t) = 0$$

ou

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{-1}{RC} v(t) - \frac{i_L(t)}{C}$$

No instante  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dv(0)}{dt} &= \frac{-1}{RC} v(0) - \frac{1}{C} i_L(0) \\ &= -2,5(4) - 5(-1) \\ &= -5 \end{aligned}$$

Porém, uma vez que

$$\frac{dv(t)}{dt} = -2K_1 e^{-2t} - 0,5K_2 e^{-0,5t}$$

então no instante  $t = 0$

$$-5 = -2K_1 - 0,5K_2$$

Essa equação, juntamente com

$$4 = K_1 + K_2$$

produz as constantes  $K_1 = 2$  e  $K_2 = 2$ . Logo, a equação final para a tensão é

$$v(t) = 2e^{-2t} + 2e^{-0,5t} \text{ V}$$

Note que a equação da tensão satisfaz a condição inicial  $v(0) = 4 \text{ V}$ .

Antes de darmos esse exemplo por terminado, vamos examinar o problema de outro ponto de vista. Uma vez que o circuito é linear, a equação característica para qualquer corrente ou tensão na rede será a mesma. Portanto, a corrente no indutor deve ser da forma

$$i_L(t) = K_3 e^{-2t} + K_4 e^{-0,5t}$$

Utilizando as condições iniciais, podemos calcular as constantes  $K_3$  e  $K_4$ , e daí obter uma expressão exata para  $i_L(t)$ .

$$i_L(0) = -1 = K_3 + K_4$$

e

$$\frac{di_L(0)}{dt} = -2K_3 - 0,5K_4$$

No entanto, mais uma vez não conhecemos  $di_L(0)/dt$ . Sabemos apenas que

$$v(0) = L \frac{di_L(0)}{dt}$$

e portanto

$$\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v(0)}{L} = \frac{4}{5}$$

Dessa forma,

$$\frac{4}{5} = -2K_3 - 0,5K_4$$

Essa equação, juntamente com

$$-1 = K_3 + K_4$$

englobam as duas equações simultâneas linearmente independentes em  $K_3$  e  $K_4$ . Resolvendo-se essas duas equações, tem-se que  $K_3 = -1/5$  e  $K_4 = -4/5$ . Portanto,  $i_L(t)$  é

$$i_L(t) = \frac{1}{5} e^{-2t} - \frac{4}{5} e^{-0,5t} \text{ A}$$

A tensão sobre o indutor está relacionada à corrente no indutor pela expressão

$$\begin{aligned} v(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} \\ &= 5 \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{5} e^{-2t} - \frac{4}{5} e^{-0,5t} \right) \\ &= 2e^{-2t} + 2e^{-0,5t} \text{ V} \end{aligned}$$

que é, obviamente, igual à expressão derivada anteriormente. A curva de resposta para essa tensão  $v(t)$  é mostrada na Figura 8.4.

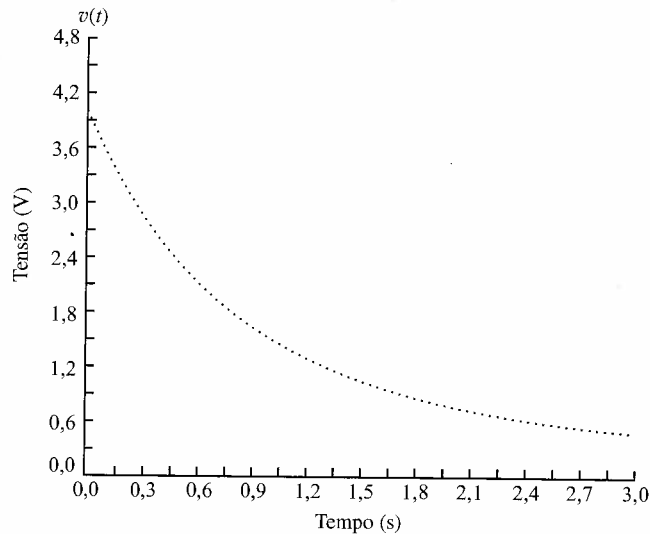


Figura 8.4 Resposta sobreamortecida.

Em comparação com os circuitos  $RC$  e  $RL$  analisados no Capítulo 7, a resposta desse circuito  $RLC$  é determinada por duas constantes de tempo. O primeiro termo tem uma constante de tempo de  $\frac{1}{2}$  e o segundo termo, de 2. ■

### Exemplo 8.2

O circuito  $RLC$  em série mostrado na Figura 8.5 tem os seguintes parâmetros:  $C = 0,04 \text{ F}$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $R = 6 \, \Omega$ ,  $i_L(0) = 4 \text{ A}$  e  $v_C(0) = -4 \text{ V}$ . A equação para a corrente no circuito é dada pela expressão

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

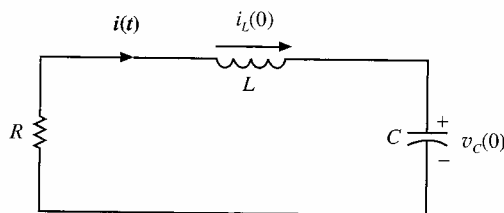


Figura 8.5 Circuito  $RLC$  em série.

Uma comparação dessa equação com as equações 8.3 e 8.4 ilustra que para um circuito  $RLC$  em série o coeficiente de amortecimento é  $R/2L$  e a frequência de ressonância é  $1/\sqrt{LC}$ . Substituindo-se os valores dos elementos do circuito na equação acima, tem-se

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 6 \frac{di}{dt} + 25i = 0$$

A equação característica é então

$$s^2 + 6s + 25 = 0$$

e as raízes são

$$s_1 = -3 + j4$$

$$s_2 = -3 - j4$$

Uma vez que as raízes são complexas, o circuito é subamortecido, e a expressão para  $i(t)$  é

$$i(t) = K_1 e^{-3t} \cos 4t + K_2 e^{-3t} \sen 4t$$

Utilizando as condições iniciais, temos que

$$i(0) = 4 = K_1$$

e

$$\frac{di}{dt} = -4K_1 e^{-3t} \sin 4t - 3K_1 e^{-3t} \cos 4t + 4K_2 e^{-3t} \cos 4t - 3K_2 e^{-3t} \sin 4t$$

e daí

$$\frac{di(0)}{dt} = -3K_1 + 4K_2$$

Apesar de não conhecermos  $di(0)/dt$ , podemos achá-la via LKT. Do circuito vemos que

$$Ri(0) + L \frac{di(0)}{dt} + v_C(0) = 0$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{di(0)}{dt} &= -\frac{R}{L} i(0) - \frac{v_C(0)}{L} \\ &= -\frac{6}{1} (4) + \frac{4}{1} \\ &= -20 \end{aligned}$$

Portanto,

$$-3K_1 + 4K_2 = -20$$

e uma vez que  $K_1 = 4$ ,  $K_2 = -2$ . A expressão então para  $i(t)$  é

$$i(t) = 4e^{-3t} \cos 4t - 2e^{-3t} \sin 4t \text{ A}$$

Veja que essa expressão satisfaz a condição inicial  $i(0) = 4$ .

A tensão sobre o capacitor poderia ser determinada via LKT usando-se esta corrente:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

ou

$$v_C(t) = -Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt}$$

Substituindo a expressão acima para  $i(t)$  nessa equação, chega-se a

$$v_C(t) = -4e^{-3t} \cos 4t + 22e^{-3t} \sin 4t \text{ V}$$

Veja que essa equação satisfaz a condição inicial  $v_C(0) = -4 \text{ V}$ .

Uma vez que a equação característica era conhecida, poderíamos simplesmente assumir que  $v_C(t)$  era da forma

$$v_C(t) = K_3 e^{-3t} \cos 4t + K_4 e^{-3t} \sin 4t$$

As constantes  $K_3$  e  $K_4$  podem ser obtidas a partir das condições iniciais

$$v_C(0) = -4 = K_3$$

e

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -3K_3 e^{-3t} \cos 4t - 4K_3 e^{-3t} \sin 4t - 3K_4 e^{-3t} \sin 4t + 4K_4 e^{-3t} \cos 4t$$

Essa expressão pode ser relacionada às condições iniciais conhecidas utilizando-se a expressão

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

ou

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i(t)}{C}$$

Igualando as duas expressões acima e avaliando a equação resultante no instante  $t = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned}\frac{i(0)}{C} &= -3K_3 + 4K_4 \\ 100 &= -3K_3 + 4K_4\end{aligned}$$

Já que  $K_3 = -4$ ,  $K_4 = 22$ , logo

$$v_C(t) = 4e^{-3t} \cos 4t + 22e^{-3t} \sin 4t \text{ V}$$

que é equivalente à expressão derivada anteriormente. Um gráfico da função  $v_C(t)$  é mostrado na Figura 8.6■

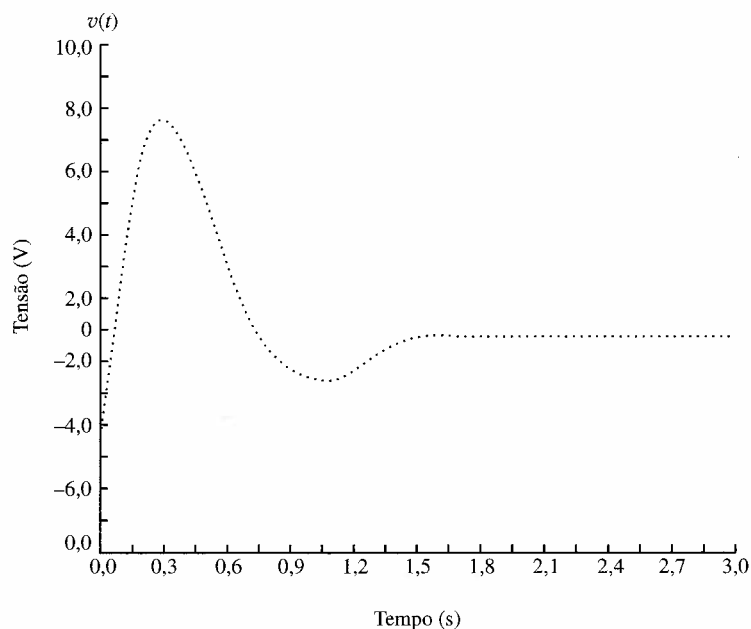


Figura 8.6 Resposta subamortecida.

### Exemplo 8.3

Vamos examinar o circuito da Figura 8.7, que é um pouco mais complicado do que os dois últimos considerados. As duas equações que descrevem a rede são

$$L \frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) + v(t) = 0$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2}$$

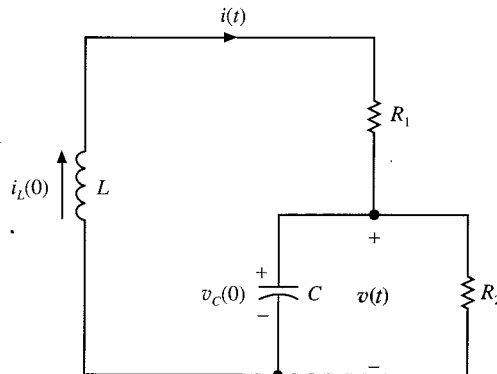
Substituindo a segunda equação na primeira, tem-se

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} v = 0$$

Se os parâmetros do circuito e as condições iniciais são

$$\begin{aligned}R_1 &= 10 \, \Omega & C &= \frac{1}{8} \text{ F} & v_C(0) &= 1 \text{ V} \\ R_2 &= 8 \, \Omega & L &= 2 \text{ H} & i_L(0) &= \frac{1}{2} \text{ A}\end{aligned}$$





**Figura 8.7** Circuito *RLC* em série/paralelo.

a equação diferencial se torna

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 6 \frac{dv}{dt} + 9v = 0$$

A equação característica é então

$$s^2 + 6s + 9 = 0$$

e desse modo as raízes são

$$s_1 = -3$$

$$s_2 = -3$$

Uma vez que as raízes são reais e iguais, o circuito é criticamente amortecido. O termo  $v(t)$  é então dado pela expressão

$$v(t) = K_1 e^{-3t} + K_2 t e^{-3t}$$

Já que  $v(t) = v_c(t)$ ,

$$v(0) = v_c(0) = 1 = K_1$$

Além disso,

$$\frac{dv(t)}{dt} = -3K_1 e^{-3t} + K_2 e^{-3t} - 3K_2 t e^{-3t}$$

Entretanto,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} - \frac{v(t)}{R_2 C}$$

Igualando essas duas expressões e avaliando a equação resultante em  $t = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{1/8} - \frac{1}{1} &= -3K_1 + K_2 \\ 3 &= -3K_1 + K_2 \end{aligned}$$

Uma vez que  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 6$  e a expressão para  $v(t)$  é

$$v(t) = e^{-3t} + 6t e^{-3t} \text{ V}$$

Note que a expressão satisfaz a condição inicial  $v(0) = 1$ .

Como demonstrado nos exemplos anteriores, uma vez que as raízes da equação característica sejam conhecidas, a corrente  $i(t)$  poderia ser expressa como

$$i(t) = K_3 e^{-3t} + K_4 t e^{-3t}$$

As constantes podem ser avaliadas como se segue:

$$i(0) = \frac{1}{2} = K_3$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -3K_3e^{-3t} + K_4e^{-3t} - 3K_4te^{-3t}$$

porém

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L}i(t) - \frac{v(t)}{L}$$

Igualando as duas expressões e avaliando a equação resultante em  $t = 0$ , tem-se

$$-3 = -3K_3 + K_4$$

Desse modo,

$$K_4 = -\frac{3}{2}$$

Portanto,

$$i(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}te^{-3t} \text{ A}$$

Se essa expressão para a corrente é empregada na equação do circuito,

$$v(t) = -L \frac{di(t)}{dt} - R_1i(t)$$

obtemos

$$v(t) = e^{-3t} + 6te^{-3t} \text{ V}$$

que é idêntica à expressão derivada anteriormente. Essa função é mostrada na Figura 8.8. ■

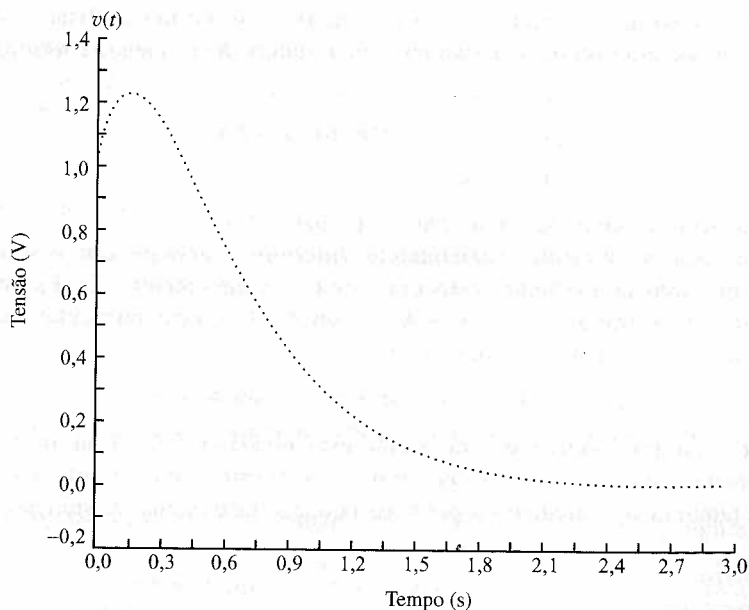


Figura 8.8 Resposta criticamente amortecida.

### Exercícios

**E8.3** A chave da rede da Figura E8.3 se abre no instante  $t = 0$ . Determine  $i(t)$  para  $t > 0$ .

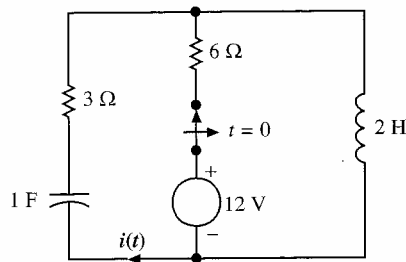


Figura E8.3

**Resp.:**  $i(t) = -2e^{-t/2} + 4e^{-t}$  A.

**E8.4** A chave da rede da Figura E8.4 se move da posição 1 para a posição 2 no instante  $t = 0$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

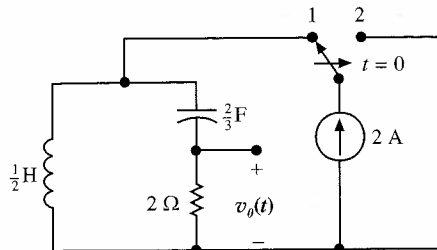


Figura E8.4

**Resp.:**  $v_o(t) = 2(e^{-t} - 3e^{-3t})$  V.

### Exemplo 8.4

Consideremos o circuito mostrado na Figura 8.9. Esse circuito é o mesmo analisado no Exemplo 8.2, com exceção da função de entrada constante. Os parâmetros do circuito são os mesmos usados no Exemplo 8.2:

$$\begin{aligned} C &= 0,04 \text{ F} & i_L(0) &= 4 \text{ A} \\ L &= 1 \text{ H} & v_C(0) &= -4 \text{ V} \\ R &= 6 \Omega \end{aligned}$$

Queremos determinar uma expressão para  $v_C(t)$  para  $t > 0$ .

Baseados em desenvolvimentos matemáticos anteriores, sabemos que a solução geral para esse problema consiste de uma solução particular mais uma solução complementar. Do Exemplo 8.2 sabemos que a solução complementar é da forma  $K_3 e^{-3t} \cos 4t + K_4 e^{-3t} \sin 4t$ . A solução particular é uma constante, já que a entrada é uma constante e, portanto, a solução geral é

$$v_C(t) = K_3 e^{-3t} \cos 4t + K_4 e^{-3t} \sin 4t + K_5$$

Examinando o circuito, vemos que no estado estacionário o valor final de  $v_C(t)$  é 12 V, uma vez que em regime permanente o indutor é um curto-circuito e o capacitor é um circuito aberto. Portanto  $K_5 = 12$ . O valor final poderia também ser calculado a partir da equação diferencial. A solução tem então a seguinte forma geral

$$v_C(t) = K_3 e^{-3t} \cos 4t + K_4 e^{-3t} \sin 4t + 12$$

As condições iniciais podem agora ser usadas para determinar as constantes  $K_3$  e  $K_4$ .

$$\begin{aligned} v_C(0) &= -4 = K_3 + 12 \\ -16 &= K_3 \end{aligned}$$

Uma vez que a derivada de uma constante é zero, os resultados do Exemplo 8.2 mostram que

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i(0)}{C} = 100 = -3K_3 + 4K_4$$

e daí  $K_3 = -16$ ,  $K_4 = 13$ . Portanto, a solução geral para  $v_C(t)$  é

$$v_C(t) = 12 - 16e^{-3t} \cos 4t + 13e^{-3t} \sin 4t \text{ V}$$

Note que essa equação satisfaz a condição inicial  $v_C(0) = -4$ , e a condição final  $v_C(\infty) = 12 \text{ V}$ .

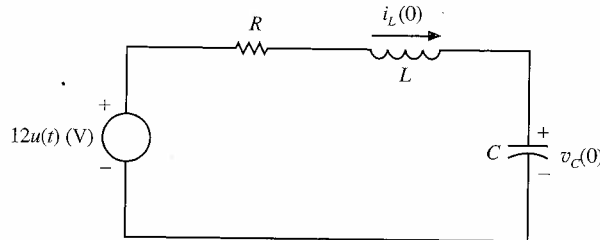


Figura 8.9 Circuito RLC em série com uma função degrau de entrada.

### Exemplo 8.5

Vamos examinar o circuito mostrado na Figura 8.10. Examinando esse circuito em detalhes, vemos que ele é idêntico àquele mostrado no Exemplo 8.3, exceto pela presença de uma entrada constante. Assumimos que o circuito está em um estado estacionário em  $t = 0^-$ . As equações que descrevem o circuito para  $t > 0$  são

$$L \frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) = v(t) = 24$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2}$$

Combinando essas equações, obtemos

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} v(t) = \frac{24}{LC}$$

Caso os parâmetros do circuito sejam  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $L = 2 \text{ H}$  e  $C = 1/4 \text{ F}$ , a equação diferencial para a tensão de saída se reduz a

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 7 \frac{dv(t)}{dt} + 12v(t) = 48$$

A equação característica é

$$s^2 + 7s + 12 = 0$$

e daí as raízes são

$$s_1 = -3$$

$$s_2 = -4$$

A resposta do circuito está sobreamortecida, e portanto a solução geral é da forma

$$v(t) = K_1 e^{-3t} + K_2 e^{-4t} + K_3$$

O valor da tensão em regime permanente,  $K_3$ , pode ser calculado da Figura 8.11a. Note que

$$v(\infty) = 4 \text{ V} = K_3$$

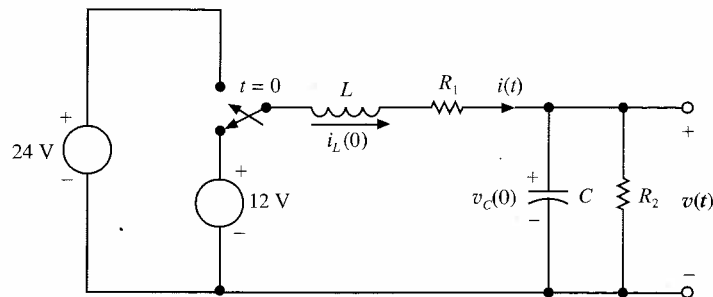
As condições iniciais podem ser calculadas da Figura 8.11b e c, que são válidas em  $t = 0^-$  e  $t = 0^+$ , respectivamente. Note que  $v(0^+) = 2 \text{ V}$  e desse modo da equação de resposta

$$v(0^+) = 2 \text{ V} = K_1 + K_2 + 4$$

$$-2 = K_1 + K_2$$

A Figura 8.11c ilustra que  $i(0^+) = 1$ . Da equação de resposta vemos que

$$\frac{dv(0)}{dt} = -3K_1 - 4K_2$$



**Figura 8.10** Circuito  $RLC$  em série/paralelo com uma função de entrada constante.

e uma vez que

$$\begin{aligned}\frac{dv(0)}{dt} &= \frac{i(0)}{C} - \frac{v(0)}{R_2 C} \\ &= 4 - 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

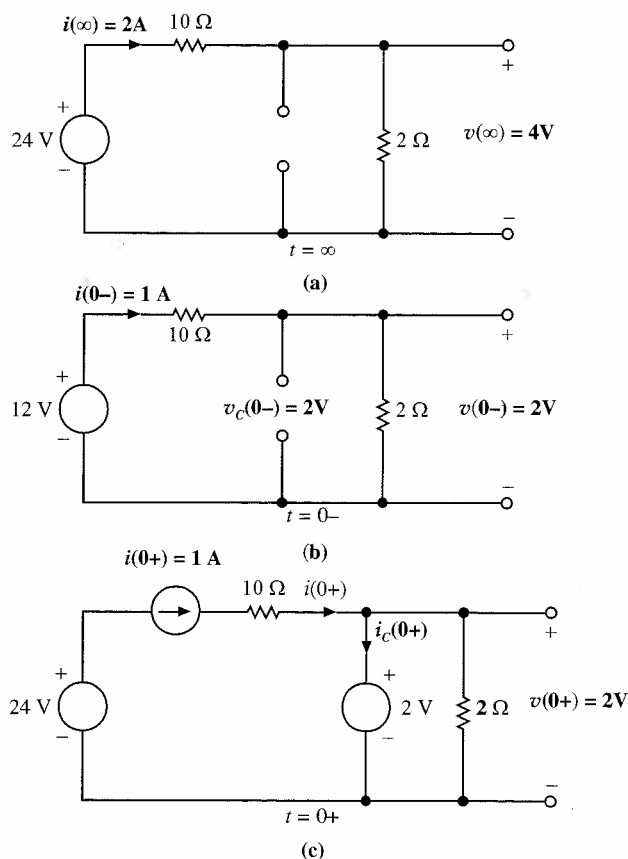
então

$$0 = -3K_1 - 4K_2$$

Resolvendo-se as duas equações para  $K_1$  e  $K_2$ , obtém-se  $K_1 = -8$  e  $K_2 = 6$ . Portanto, a solução geral para a resposta da tensão é

$$v(t) = 4 - 8e^{-3t} + 6e^{-4t} \text{ V}$$

Repare que essa equação satisfaz tanto os valores iniciais como os finais de  $v(t)$ .



**Figura 8.11** Circuitos equivalentes em  $t = \infty$ ,  $t = 0^-$  e  $t = 0^+$  para o circuito da Figura 8.10.

## Exercício

**E8.5** A chave na rede da Figura E8.5 se move da posição 1 para a posição 2 no instante  $t = 0$ . Calcule  $i_o(t)$  para  $t > 0$  e utilize essa corrente para determinar  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

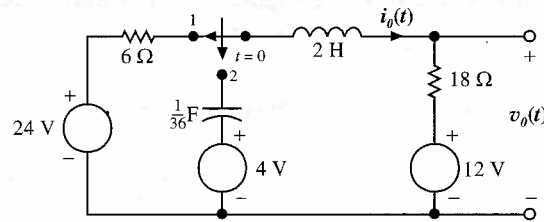


Figura E8.5

**Resp.:**  $i_o(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t} + e^{-6t}$  A,  $v_o(t) = 12 + 18i_o(t)$  V.

Esses exemplos indicam claramente que mesmo a solução geral de circuitos RLC simples pode ser bastante complicada. Apesar de podermos continuar com a nossa análise matemática atual e as técnicas presentes para resolver redes mais genéricas, existem métodos melhores. Por exemplo, no Capítulo 17 a técnica de transformada de Laplace será aplicada para analisar circuitos RLC com funções variadas de entrada, então o leitor descobrirá que a técnica da transformada não só é mais fácil de usar como também fornece uma visão adicional na análise.

## 8.4 Análise PSPICE de Circuitos RLC

Nas seções anteriores deste capítulo, nossas técnicas de análise foram de natureza matemática. Apesar de o método matemático indicar o tipo de resposta que a rede vai produzir, ele não nos conduz rapidamente a uma solução. Por outro lado, um programa como o PSPICE, que consiste de somente alguns comandos, é o suficiente para produzir resultados que exibem facilmente o comportamento do circuito. Agora, usando o PSPICE, vamos reexaminar alguns dos circuitos que foram tratados nos exemplos anteriores e ilustrar a facilidade como tal programa pode ser genericamente aplicado.

## Exemplo 8.6

O circuito RLC no Exemplo 8.2 foi redesenhado para uma análise com PSPICE na Figura 8.12. Vamos escrever o programa PSPICE que vai traçar o gráfico da tensão no capacitor em intervalos de 0,1 s dentro de um intervalo de três segundos.

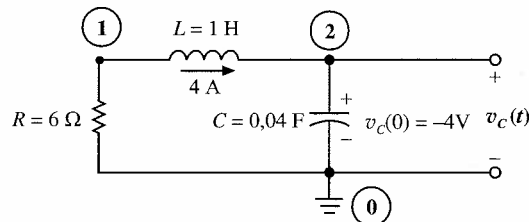


Figura 8.12 Circuito da Figura 8.5 redesenhado para análise PSPICE.

O seguinte programa produz a curva da tensão sobre o capacitor:

EXAMPLE 8.6 PLOT OF CAPACITOR VOLTAGE IN

\*EXAMPLE 8.2

```
R 1 0 6
L 1 2 1 IC=4
C 2 0 0.04 IC=-4
.TRAN 0.1 3 UIC
.PROBE
.END
```

A curva da tensão no capacitor é mostrada na Figura 8.6.

### Exemplo 8.7

O circuito  $RLC$  no Exemplo 8.3 foi redesenhado na Figura 8.13 para análise com PSPICE. Vamos escrever o programa PSPICE que produzirá a curva da tensão  $v(t)$  no intervalo de 0,1 s a 3 s. O programa PSPICE referente à Figura 8.13 é

```
EXAMPLE 8.7 PLOT OF V(T) IN EXAMPLE 8.3
L 0 1 2 IC=0.5
R1 1 2 10
C 2 0 0.125 IC=1
R2 2 0 8
.TRAN 0.1 3 UIC
.PROBE
.END
```

O gráfico com a curva da tensão  $v(t)$  está mostrado na Figura 8.8.

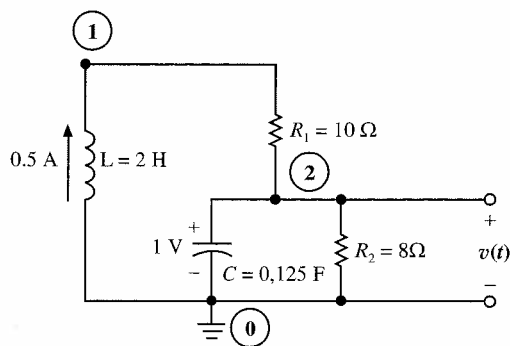


Figura 8.13 Circuito do Exemplo 8.3 redesenhado para análise com PSPICE.

### Exemplo 8.8

Dada a rede da Figura 8.14a, vamos traçar o gráfico de  $v_o(t)$  e  $i_o(t)$  para  $t > 0$  em um intervalo de 10 segundos utilizando um incremento de 100 ms.

As condições iniciais são derivadas da rede da Figura 8.14b. O programa PSPICE para tal circuito é

```
INITIAL NETWORK
V1 1 0 DC 12
VX 2 5 DC 0
R1 1 2 3
R2 3 0 6
R3 4 0 2
L1 5 3 1
C1 3 4 2
* USE DC ANALYSIS
.DC V1 12 1
.PRINT DC I(VX) V(3) V(4)
.END
```

O PSPICE não fornece a tensão entre os nós 3 e 4. No entanto,  $V(3)$  e  $V(4)$  podem ser utilizados para determinar  $V(3) - V(4) = 8$  V.  $I(VX) = 1,33$  A. A rede para  $t > 0$  é mostrada na Figura 8.14c. O programa para essa rede é

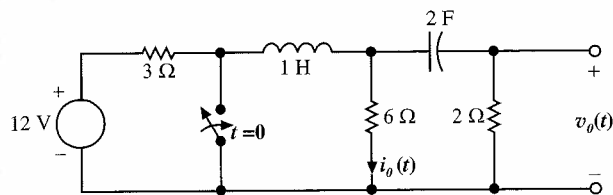
```
FINAL NETWORK
R1 1 3 6
R2 2 0 2
L1 1 0 1 IC=1.33A
```

```

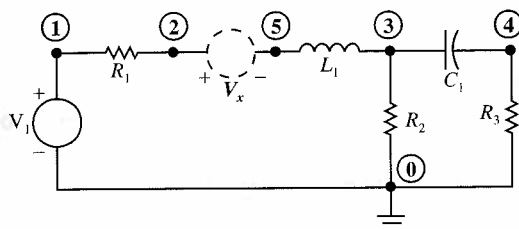
C1 2 1 2 IC=8V
VX 3 0 DC 0
* USE TRANSIENT ANALYSIS
.TRAN .1 10 UIC
.PROBE
.END

```

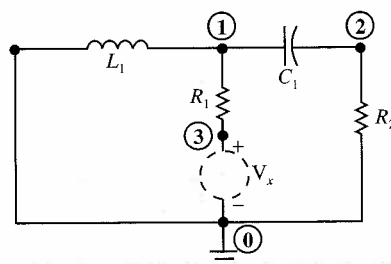
Os gráficos para  $v_o(t)$  e  $i_o(t)$  estão mostrados na Figura 8.15a e b, respectivamente. ■



(a)



(b)



(c)

Figura 8.14 Redes utilizadas no Exemplo 8.8.

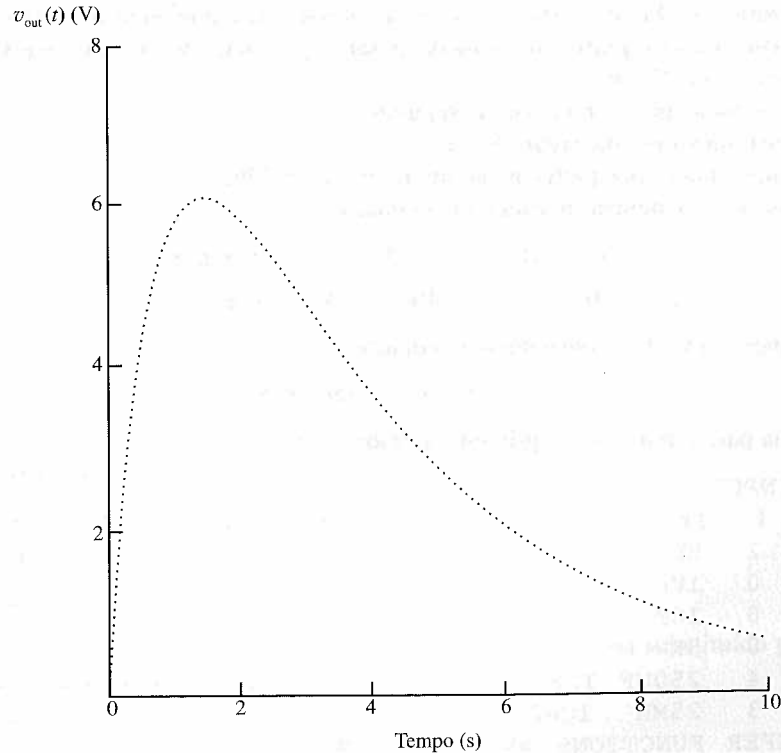
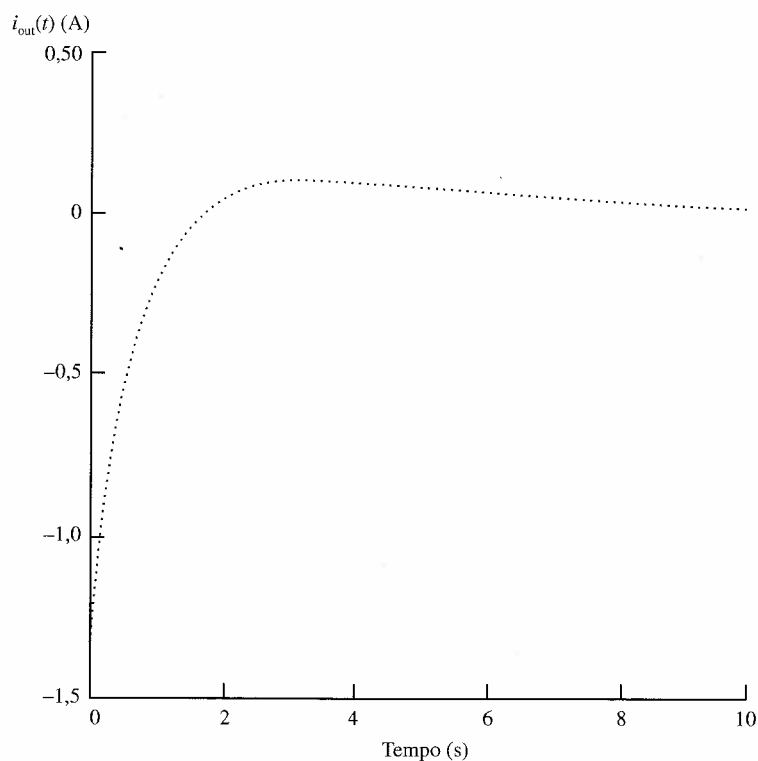


Figura 8.15a Curva de saída para o Exemplo 8.8.





**Figura 8.15b** Curva de saída para o Exemplo 8.8.

### Exemplo 8.9

Considere a rede mostrada na Figura 8.16a. A rede está rotulada para uma análise PSPICE como mostrado na Figura 8.16b. Desejamos traçar o gráfico de saída da tensão  $v_{out}(t)$  para  $t > 0$  em um intervalo de 10 segundos utilizando um incremento de 100 ms.

As quatro entradas para a rede são as seguintes:

1. O pulso mostrado na Figura 8.17a.
2. A função linear por partes mostrada na Figura 8.17b.
3. A função exponencial definida pela equação

$$v_{in}(t) = 10(1 - e^{-t/4}) \text{ V} \quad 0 \leq t \leq 3 \text{ s}$$

$$= 10(1 - e^{-t/4}) - 10e^{-(t-3)} \text{ V} \quad 3 \text{ s} \leq t$$

4. A função senoidal é definida pela equação

$$v_{in}(t) = 10e^{-0,5t} \text{ sen } 2\pi t \text{ V}$$

O programa para a rede com a primeira entrada é

```
PULSE INPUT
VIN 1 0 PWL (0 10 1 10 1.001 0 10 0)
R1 1 2 5K
R2 2 0 10K
R3 3 0 10K
R4 4 0 5K
C1 3 4 250UF IC=0
L1 2 3 25MH IC=0
* TRANSFER FUNCTIONS AND TRANSIENT ANALYSIS
.TF V(4) VIN
.TRAN .1 10 UIC
.PROBE
.END
```

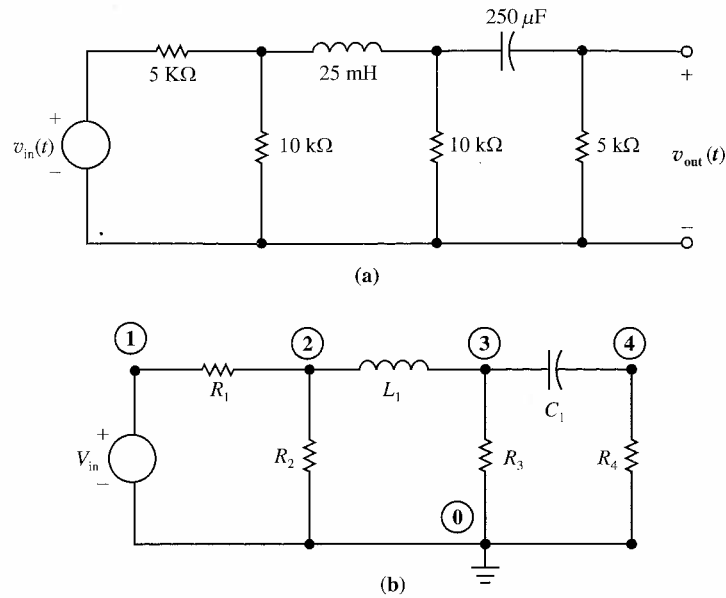


Figura 8.16 Circuitos utilizados no Exemplo 8.9.

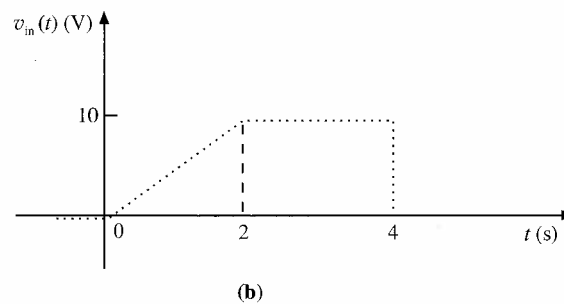
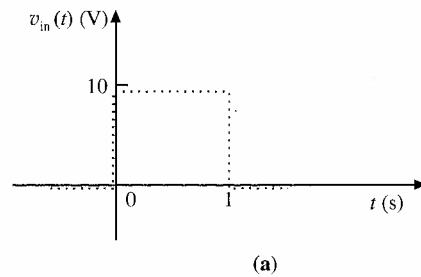


Figura 8.17 Entradas para o Exemplo 8.9.

As tensões de entrada e saída são mostradas na Figura 8.18.

O comando PSPICE para a segunda entrada é

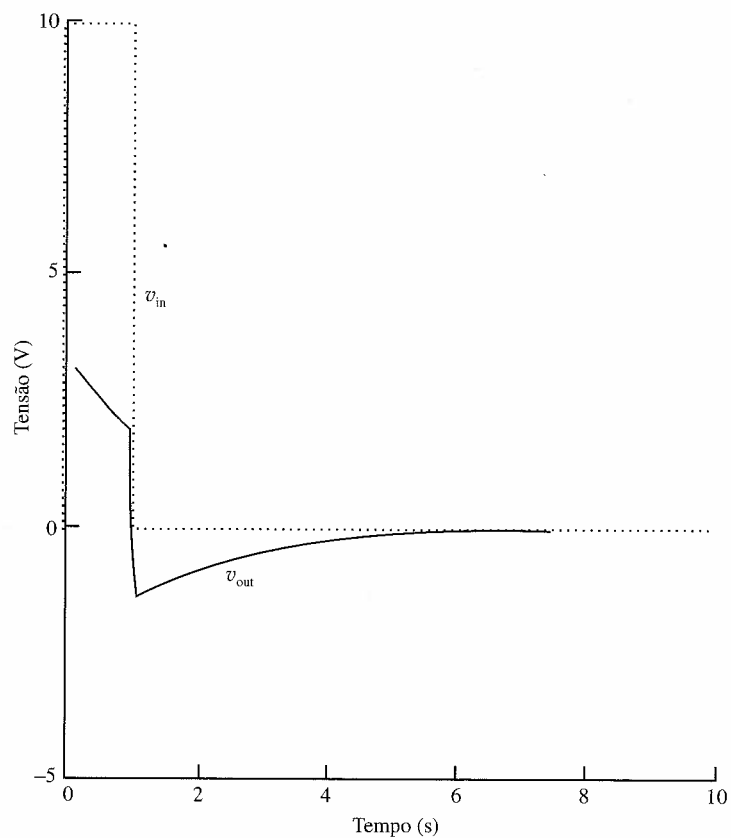
```
VIN 1 0 PWL (0 0 2 10 4 10 4.001 0)
```

Caso o comando da tensão de entrada no programa original seja substituído por esse comando, as tensões de entrada e saída são as mostradas na Figura 8.19.

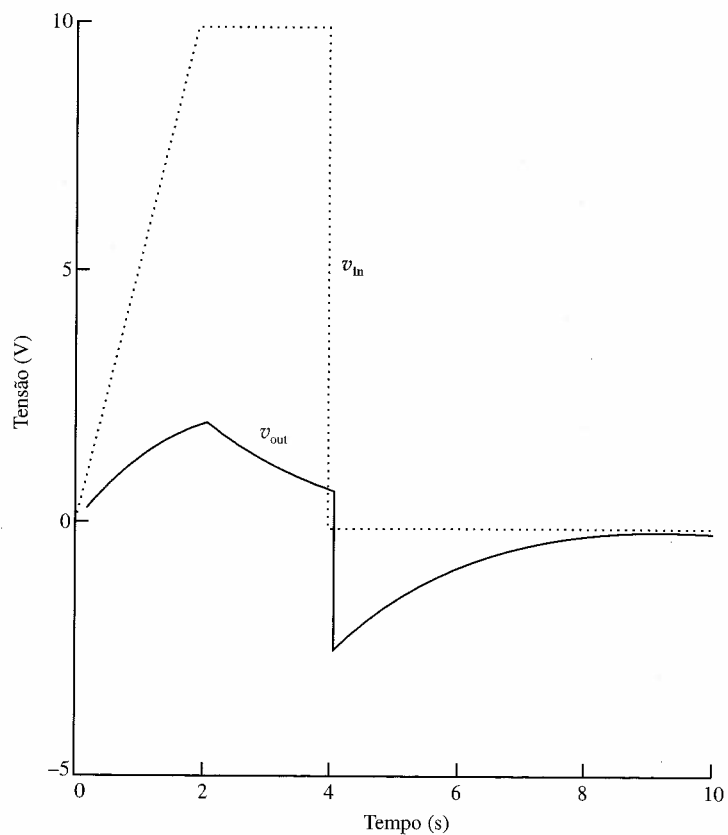
O comando PSPICE para a terceira entrada é

```
VIN 1 0 EXP (0 10 0 4 3 1)
```

Caso o comando de entrada da tensão no programa original seja substituído por esse comando para a fonte exponencial, as tensões de entrada e saída serão as mostradas na Figura 8.20.



**Figura 8.18** Gráficos de entrada e saída para a primeira entrada no Exemplo 8.9.



**Figura 8.19** Gráficos de entrada e saída para a segunda entrada no Exemplo 8.9.

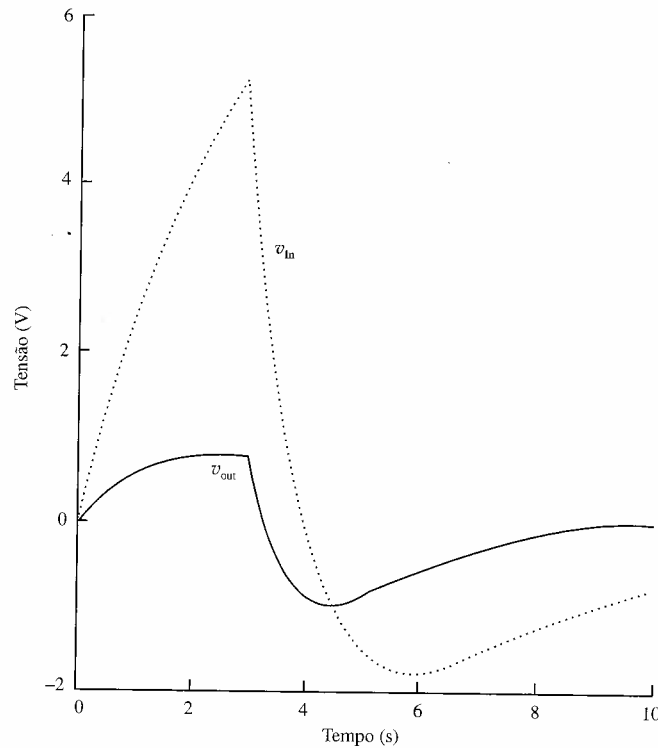


Figura 8.20 Gráficos de entrada e saída para a terceira entrada no Exemplo 8.9.

O comando PSPICE para a quarta entrada é

VIN 1 0 SIN (0 10 1 0 .5)

E, finalmente, caso o comando de entrada da tensão no programa original seja substituído por esse comando para a fonte senoidal, as tensões de entrada e saída serão as mostradas na Figura 8.21. ■

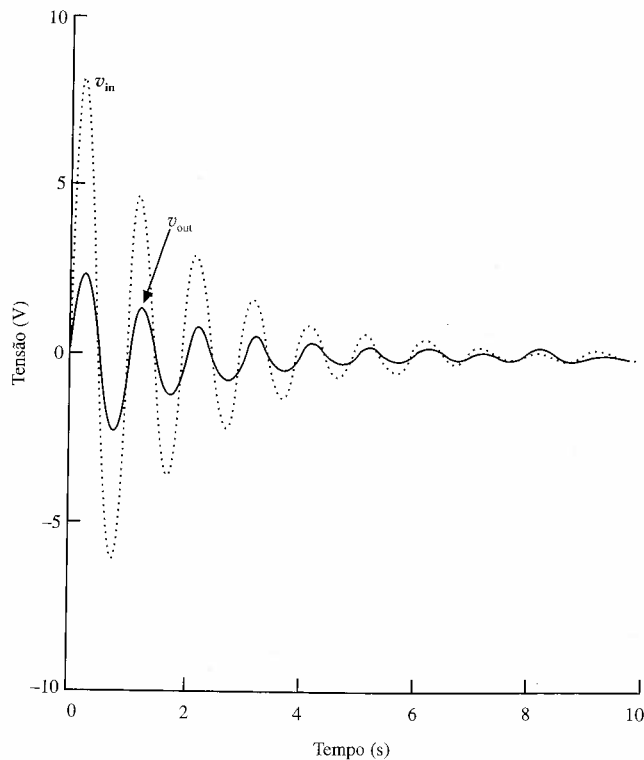


Figura 8.21 Gráficos de entrada e saída para a quarta entrada no Exemplo 8.9.

## Exercícios

- E8.6** Para a rede da Figura E8.6, utilize o PSPICE para traçar o gráfico da resposta transiente de  $i(t)$  de 0 a 0,5 s com um incremento de 10 ms.

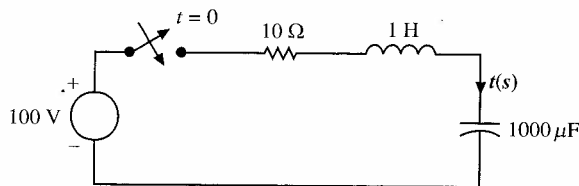


Figura E8.6

- E8.7** Dada a rede da Figura E8.7a, utilize o PSPICE para traçar o gráfico de  $v_o(t)$ ,  $0 \leq t \leq 10$  s, utilizando um incremento de 100 ms caso a entrada seja a mesma da Figura E8.7b.

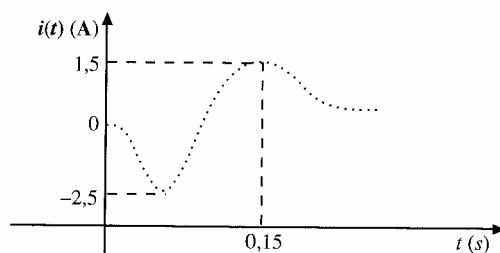
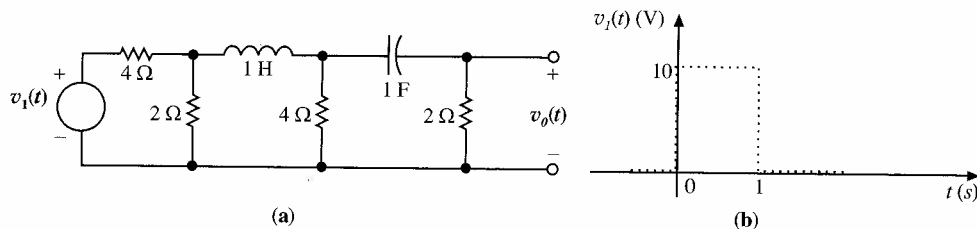
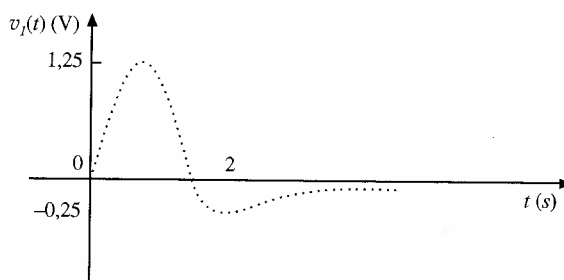


Figura E8.7



*Resp.:*



## 8.5 Resumo

Mostramos que a análise de circuitos *RLC* nos conduz a uma equação diferencial de segunda ordem. As raízes da equação característica do circuito determinam o tipo de resposta. Tais raízes são uma função da razão de amortecimento do circuito e da frequência não-amortecida ressonante. Caso as raízes sejam reais e diferentes, a resposta será sobreamortecida; caso as raízes sejam conjugados complexos, a resposta será subamortecida; e caso as raízes sejam iguais e reais, a resposta será criticamente amortecida.

Finalmente, a análise PSPICE de circuitos *RLC* foi apresentada.

## Pontos-Chave

- A equação característica para um circuito RLC é  $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$ , onde  $\alpha$  é o quociente de amortecimento e  $\omega_0$  é a frequência de ressonância não-amortecida.
- As duas raízes da equação característica para um circuito RLC são reais e diferentes se  $\alpha > \omega_0$ ; elas são números complexos se  $\alpha < \omega_0$ ; e são reais e iguais se  $\alpha = \omega_0$ .
- A resposta de um circuito RLC é dita sobreamortecida se as raízes da equação característica da rede são reais e diferentes, subamortecida se elas são números complexos e criticamente amortecida se elas são reais e iguais.
- A análise PSPICE de redes contendo tanto um indutor como um capacitor pode ser feita exatamente da mesma maneira como descrito no Capítulo 7.

## Problemas

- 8.1 A tensão  $v_1(t)$  em uma rede é definida pela equação

$$\frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} + 2 \left[ \frac{dv_1(t)}{dt} \right] + 5v_1(t) = 0$$

Determine:

- A equação característica da rede.
- As frequências naturais do circuito.
- A expressão para  $v_1(t)$ .

- 8.2 A tensão de saída de um circuito é descrita pela equação diferencial

$$\frac{d^2 v_0(t)}{dt^2} + 6 \left[ \frac{dv_0(t)}{dt} \right] + 10v_0(t) = 0$$

Determine:

- A equação característica da rede.
- As frequências naturais do circuito.
- A expressão para  $v_0(t)$ .

- 8.3 A corrente terminal em uma rede é descrita pela equação

$$\frac{d^2 i_0(t)}{dt^2} + 10 \left[ \frac{di_0(t)}{dt} \right] + 25i_0(t) = 0$$

Determine:

- A equação característica da rede.
- As frequências naturais do circuito.
- A expressão para  $i_0(t)$ .

- 8.4 A tensão da rede  $v_o(t)$  é descrita pela equação diferencial

$$\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + 6 \left[ \frac{dv_o(t)}{dt} \right] + 9v_o(t) = 0$$

Determine:

- A equação característica da rede.
- As frequências naturais do circuito.
- A expressão para  $v_o(t)$ .

- 8.5 A equação diferencial que descreve a corrente  $i_o(t)$  em uma rede é

$$\frac{d^2 i_o(t)}{dt^2} + 6 \left[ \frac{di_o(t)}{dt} \right] + 8i_o(t) = 0$$

Determine:

- A equação característica da rede.
- As frequências naturais do circuito.
- A expressão para  $i_o(t)$ .

- 8.6 A equação diferencial para a tensão  $v_1(t)$  em uma rede é

$$\frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} + 7 \left[ \frac{dv_1(t)}{dt} \right] + 12v_1(t) = 0$$

Determine:

- (a) A equação característica da rede.
- (b) As frequências naturais do circuito.
- (c) A expressão para  $v_1(t)$ .

- 8.7 Os parâmetros para um circuito *RLC* em paralelo são  $R = 1 \, \Omega$ ,  $L = 1/5 \, \text{H}$  e  $C = 1/4 \, \text{F}$ . Determine o tipo de amortecimento apresentado pelo circuito.
- 8.8 Um circuito *RLC* em série contém um resistor  $R = 2 \, \Omega$  e um capacitor  $C = 1/8 \, \text{F}$ . Selecione o valor do indutor para que o circuito esteja criticamente amortecido.
- 8.9 A corrente em uma rede *RLC* é descrita pela equação

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 6 \left[ \frac{di(t)}{dt} \right] + 10i(t) = 0$$

Se as condições iniciais são  $i(0) = 1 \, \text{A}$  e  $i'(0) = 0$ , determine  $i(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.10 Uma corrente de ramo em uma rede é descrita pela equação

$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + 4 \left[ \frac{di_1(t)}{dt} \right] + \frac{17}{4} i_1(t) = 0$$

Se as condições iniciais são  $i_1(0) = 1 \, \text{A}$  e  $i_1(\pi) = 0$ , determine  $i_1(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.11 A corrente em um circuito é descrita pela equação

$$\frac{d^2 i_o(t)}{dt^2} + 4 \left[ \frac{di_o(t)}{dt} \right] + 4i_o(t) = 0$$

As condições iniciais são  $i_o(0) = 1 \, \text{A}$  e  $i_o'(\pi) = 0$ . Determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.12 A tensão terminal em uma rede é descrita pela equação

$$\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + 8 \left[ \frac{dv_o(t)}{dt} \right] + 16v_o(t) = 0$$

Se as condições iniciais são  $v_o(0) = 1$  e  $v_o'(0) = 2 \, \text{V}$ , determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.13 A tensão de saída de um circuito *RLC* é descrita pela equação

$$\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + 5 \left[ \frac{dv_o(t)}{dt} \right] + 6v_o(t) = 0$$

Se as condições iniciais são  $v_o(0) = 1 \, \text{V}$  e  $v_o'(0) = 2 \, \text{V}$ , determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.14 Se a tensão  $v_o(t)$  em um circuito é descrita pela equação

$$\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + 4 \left[ \frac{dv_o(t)}{dt} \right] + 4v_o(t) = 0$$

e as condições iniciais são  $v_o(0) = 2 \, \text{V}$  e  $v_o'(0) = 4 \, \text{V}$ , determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.15 A corrente em uma rede *RLC* é dada pela expressão

$$\frac{d^2 i_o(t)}{dt^2} + 4 \left[ \frac{di_o(t)}{dt} \right] + 3i_o(t) = 6$$

As condições iniciais são  $i_o(0) = 1 \, \text{A}$  e  $i_o'(0) = 0$ . Determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.16 A tensão de saída de uma rede *RLC* é dada pela expressão

$$\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + 7 \left[ \frac{dv_o(t)}{dt} \right] + 10v_o(t) = 20e^{-3t}$$

Se  $v_o(0) = 4 \, \text{V}$  e  $v_o'(0) = 0$ , determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.17 A tensão  $v_1(t)$  em uma rede *RLC* é dada pela expressão

$$\frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} + 2 \left[ \frac{dv_1(t)}{dt} \right] + v_1(t) = 4$$

Se  $v_1(0) = 0$  e  $v_1'(0) = 1 \, \text{V}$ , determine  $v_1(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.18 A corrente  $i_1(t)$  é dada pela expressão

$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + 8 \left[ \frac{di_1(t)}{dt} \right] + 16 i_1(t) = 8e^{-2t}$$

Se  $i_1(0) = 0$  e  $i_1'(0) = 0$ , determine  $i_1(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.19 A tensão  $v(t)$  é descrita pela equação

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 4 \left[ \frac{dv(t)}{dt} \right] + 8v(t) = 12$$

Se  $v(0) = 0$  e  $v'(0) = 0$ , determine  $v(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.20 A corrente  $i_A(t)$  é expressa pela equação

$$\frac{d^2 i_A(t)}{dt^2} + 8 \left[ \frac{di_A(t)}{dt} \right] + 20 i_A(t) = 10e^{-t}$$

Se  $i_A(0) = 0$  e  $i_A'(0) = 0$ , determine  $i_A(t)$  para  $t > 0$ .

- 8.21 Para o circuito subamortecido mostrado na Figura P8.21, determine a tensão  $v(t)$  caso as condições iniciais nos elementos de armazenagem sejam  $i_L(0) = 1$  A e  $v_C(0) = 10$  V.

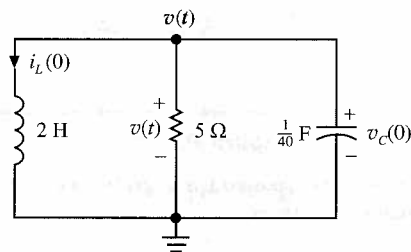


Figura P8.21

- 8.22 Dado o circuito e as condições iniciais do Problema 8.21, determine a corrente no indutor.

- 8.23 No circuito criticamente amortecido mostrado na Figura P8.23, as condições iniciais nos elementos de armazenagem são  $i_L(0) = 2$  A e  $v_C(0) = 5$  V. Determine a tensão  $v(t)$ .

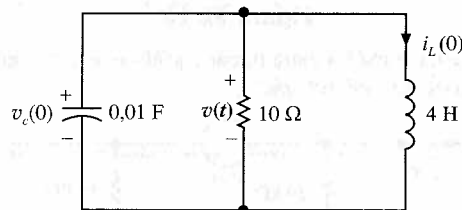


Figura P8.23

- 8.24 Dado o circuito e as condições iniciais do Problema 8.23, determine a corrente  $i_L(t)$  que flui através do indutor.

- 8.25 Dado o circuito da Figura P8.25, ache a equação para  $i(t)$ ,  $t > 0$ .

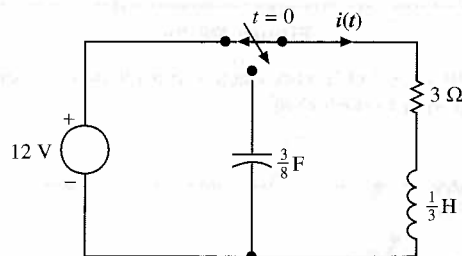


Figura P8.25



- 8.26 O circuito mostrado da Figura P8.26 tem chave fechada no instante  $t = 0$ . Determine a tensão para  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ .

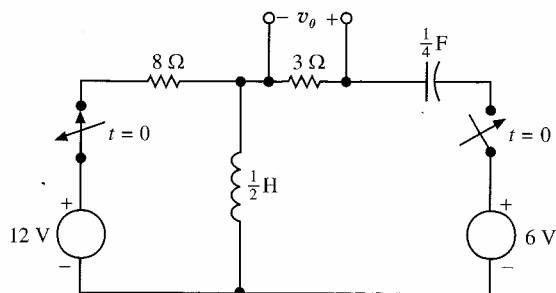


Figura P8.26

- 8.27 No circuito mostrado na Figura P8.27, determine  $v(t)$ ,  $t > 0$ .

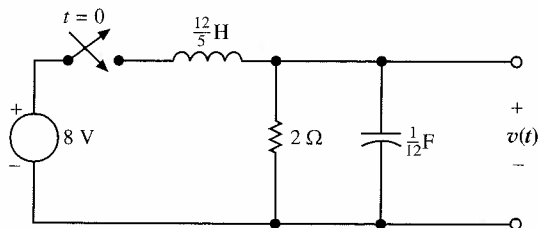


Figura P8.27

- 8.28 Dada a rede da Figura P8.28, utilize o PSPICE para traçar o gráfico de  $v_o(t)$  em um intervalo de 10 segundos começando em  $t = 0$  usando um incremento de 100 ms.

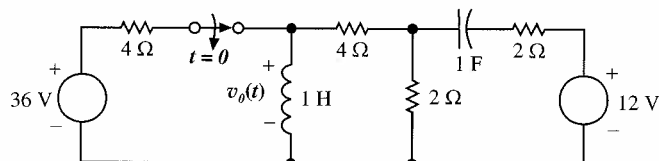


Figura P8.28

- 8.29 Dada a rede da Figura P8.29, utilize o PSPICE para traçar o gráfico de  $v_o(t)$ , em um intervalo de 10 segundos começando em  $t = 0$  usando um incremento de 100 ms.

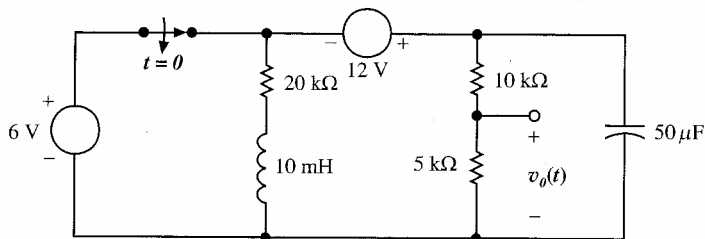


Figura P8.29

- 8.30 Dada a rede da Figura P8.30, utilize o PSPICE para traçar o gráfico de  $v_o(t)$ , em um intervalo de 10 segundos começando em  $t = 0$  usando um incremento de 100 ms.

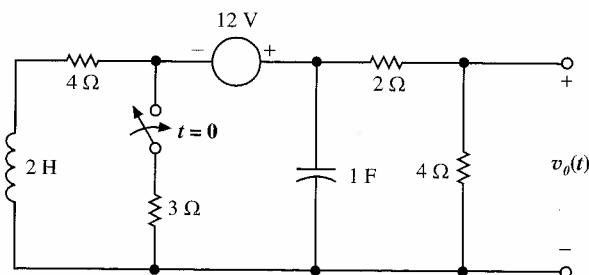


Figura P8.30

- 8.31 Dada a rede da Figura P8.31, utilize o PSPICE para traçar o gráfico de  $v_o(t)$ , em um intervalo de 10 segundos começando em  $t = 0$  usando um incremento de 100 ms.

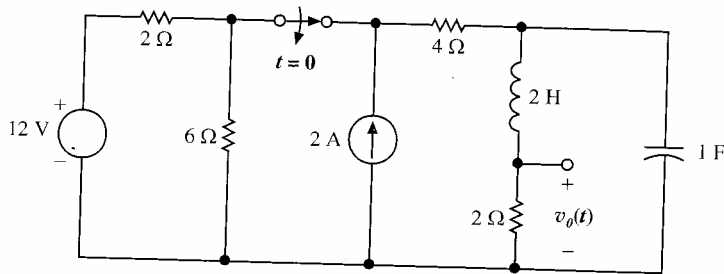
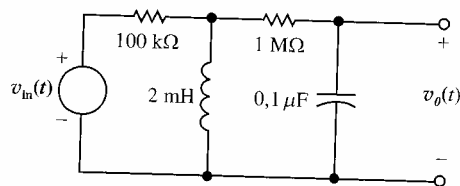
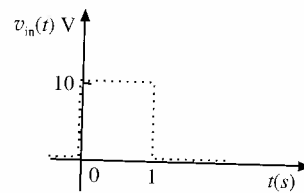


Figura P8.31

- 8.32 Dada a rede da Figura P8.32a e a tensão de entrada mostrada na Figura P8.32b, utilize o PSPICE para traçar o gráfico de  $v_o(t)$  no intervalo  $0 \leq t \leq 4$  s com um incremento de 20 ms.



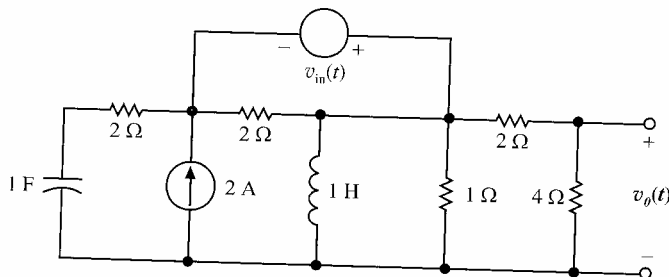
(a)



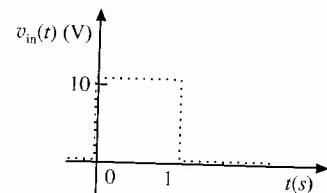
(b)

Figura P8.32

- 8.33 Dada a rede da Figura P8.33a e a tensão de entrada mostrada na Figura P8.33b, trace o gráfico de  $v_o(t)$ , utilizando o PSPICE, no intervalo  $0 \leq t \leq 10$  s com um incremento de 100 ms.



(a)



(b)

Figura P8.33

- 8.34 Dada a rede da Figura P8.34 e a entrada

$$v_s(t) = 10(1 - e^{-t/4}) \text{ V} \quad 0 \leq t \leq 3 \text{ s}$$

$$= 10(1 - e^{-t/4}) - 10e^{-(t-3)} \text{ V} \quad 3 \text{ s} < t$$

trace o gráfico de  $v_o(t)$  no intervalo  $0 \leq t \leq 10$  s, utilizando o PSPICE com um incremento de 50 ms.

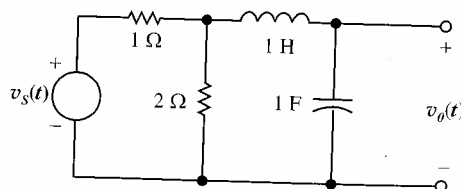
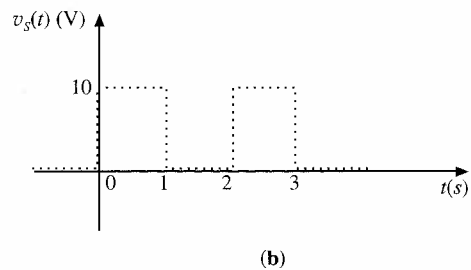
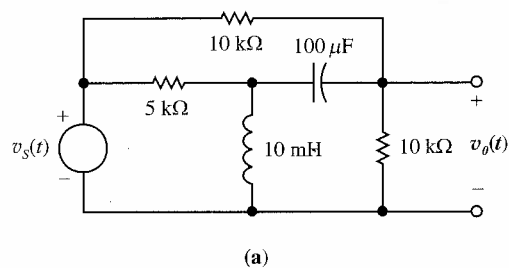


Figura P8.34

- 8.35** Dada a rede da Figura P8.35a e a entrada mostrada na Figura P8.35b, utilizando o PSPICE trace o gráfico de  $v_o(t)$  no intervalo  $0 \leq t \leq 4$  s usando um incremento de 20 ms.



**Figura P8.35**

- 8.36** Repita o Problema 8.35 caso a tensão de entrada seja

$$v_s(t) = 10(1 - e^{-t/2}) \text{ V} \quad 0 \leq t \leq 3 \text{ s}$$

$$= 10(1 - e^{-t/2}) - 10e^{-(t-3)/4} \text{ V} \quad 3 \text{ s} < t$$

Utilize um incremento de 30 ms no intervalo  $0 \leq t \leq 6$  s.

# Senóides e Fasores

Nos capítulos anteriores, foram consideradas em detalhes as respostas forçada e não-forçada de circuitos. Foi verificado que a resposta natural, ou seja, a resposta não-forçada era uma característica da rede em questão e que era independente da função de excitação (ou entrada). A resposta forçada, entretanto, depende diretamente do tipo da função de excitação, que até este ponto tem sido uma constante. Neste capítulo, uma forma diferente, porém extremamente importante, de função excitante será considerada, a saber: a *função de excitação senoidal*. A natureza está repleta de exemplos de fenômenos senoidais, e apesar de isso ser relevante para nós na medida em que consideramos diversos sistemas físicos, uma razão pela qual tal tipo de função é significativa é o fato de esta ser a forma de onda dominante no sistema de energia elétrica. O sinal encontrado nas tomadas residenciais, de escritórios, laboratórios etc. é senoidal. Além disso, no Capítulo 18 será mostrado, através da análise de Fourier, que qualquer sinal periódico pode ser representado como a soma de senóides.

Este capítulo se concentrará no estudo da resposta em regime permanente de redes excitadas por funções senoidais. As condições iniciais e os transitórios serão ignorados, pois tais fenômenos eventualmente desaparecerão por completo nos circuitos considerados. Esse procedimento é chamado de *análise em regime permanente (ou estado estacionário) de circuitos ac*. Entretanto, antes de prosseguir com essa análise, a natureza da função senoidal deve ser completamente entendida.

## 9.1 Senóides

A fim de dar início à discussão sobre funções senoidais, considere a senóide

$$x(\omega t) = X_m \sin \omega t \quad (9.1)$$

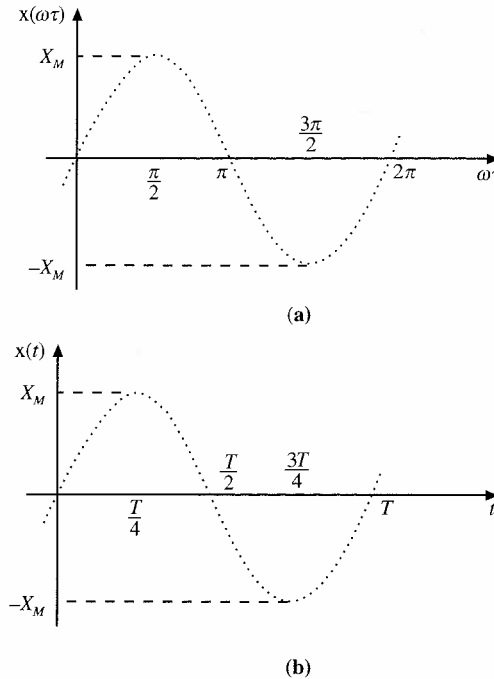
onde  $x(t)$  pode representar tanto  $v(t)$  quanto  $i(t)$ .  $X_m$  é a *amplitude* ou o *valor máximo*,  $\omega$  é a *freqüência angular* e  $\omega t$  é o *argumento* da função seno. O gráfico da função na Equação 9.1 em função de seu argumento é mostrado na Figura 9.1a. Evidentemente, a função se repete a cada  $2\pi$  radianos e, portanto, o *período* da função é  $2\pi$  radianos. Essa condição é descrita matematicamente como  $x(\omega t + 2\pi) = x(\omega t)$  ou, de forma mais geral, para um período  $T$

$$x[\omega(t + T)] = x(\omega t) \quad (9.2)$$

significando que a função tem o mesmo valor no instante  $t+T$  do que no instante  $t$ .

A forma de onda pode ser também traçada em um gráfico em função do tempo, conforme mostrado na Figura 9.1b. Note que essa função completa um período a cada  $T$  segundos ou, em outras palavras, em um segundo a função abrange  $1/T$  períodos ou ciclos. O número de ciclos por segundo é a frequência  $f$ , cuja unidade é hertz, e

$$f = \frac{1}{T} \quad (9.3)$$



**Figura 9.1** Gráficos de uma curva senoidal como função de  $\omega t$  e  $t$ .

Uma vez que  $\omega T = 2\pi$  como mostrado na Figura 9.1a, tem-se que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (9.4)$$

que é a relação geral entre o período em segundos, a frequência em hertz e a frequência angular em radianos por segundos.

Tendo discutido algumas das características básicas de uma onda senoidal, considere a seguinte expressão geral de uma função senoidal:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \theta) \quad (9.5)$$

Nesse caso,  $(\omega t + \theta)$  é o argumento da função seno, e  $\theta$  é chamado de *ângulo de fase*. Um gráfico dessa função é mostrado na Figura 9.2, junto com a função original da Equação 9.1 para efeito de comparação. Devido à presença do ângulo de fase, qualquer ponto na forma de onda  $X_M \sin(\omega t + \theta)$  ocorre  $\theta$  radianos antes no tempo que o ponto correspondente na forma de onda  $X_M \sin \omega t$ . Portanto, diz-se que  $X_M \sin \omega t$  está atrasada de  $\theta$  radianos em relação a  $X_M \sin(\omega t + \theta)$ . De forma mais geral, se

$$x_1(t) = X_M \sin(\omega t + \theta)$$

e

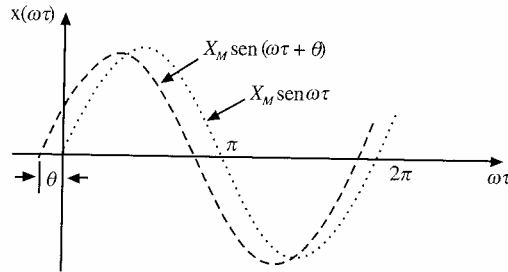
$$x_2(t) = X_M \sin(\omega t + \phi)$$

então  $x_1(t)$  está adiantada em relação a  $x_2(t)$  de  $\theta - \phi$  radianos e  $x_2(t)$  está atrasada em relação a  $x_1(t)$  de  $\theta - \phi$  radianos. Se  $\theta = \phi$ , as formas de onda são idênticas e diz-se que tais funções estão *em fase*. Se  $\theta \neq \phi$ , as funções estão *fora de fase*.

O ângulo de fase é normalmente expresso em graus em vez de radianos e, portanto, neste livro serão utilizadas ambas as formas, ou seja,

$$x(t) = X_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = X_M \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (9.6)$$

Além disso, deve ser notado que adicionando-se ao argumento múltiplos inteiros de  $2\pi$  radianos ou de  $360^\circ$  não altera a função original. Isto pode ser verificado matematicamente sem maiores dificuldades, mas esse fato torna-se evidente por mera inspeção das formas de onda, conforme mostrado na Figura 9.2.



**Figura 9.2** Ilustração gráfica de  $X_M \sin(\omega t + \theta)$  adiantado em relação a  $X_M \sin \omega t$  de  $\theta$  radianos.

Apesar de essa discussão ter focalizado a função seno, poderia ter sido usada a função cosseno uma vez que essas funções diferem apenas por um ângulo de fase, ou seja,

$$\cos \omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.7)$$

$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.8)$$

Deve ser notado que, ao comparar duas funções senoidais de *mesma frequência* a fim de determinar o desfasamento entre as duas, é necessário representar ambas as funções como senóides ou então cossenóides com amplitudes positivas. Uma vez representadas dessa forma, o ângulo de fase entre as funções pode ser calculado como descrito acima. Duas outras relações trigonométricas que são normalmente úteis na determinação do ângulo de desfasamento são:

$$-\cos(\omega t) = \cos(\omega t \pm 180^\circ) \quad (9.9)$$

$$-\sin(\omega t) = \sin(\omega t \pm 180^\circ) \quad (9.10)$$

Finalmente, as relações de soma e diferença de ângulos para senóides e cossenóides podem ser de alguma utilidade em manipulações de tais funções. Essas relações são

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (9.11)$$

O interesse nessas relações girará em torno dos casos em que  $\alpha = \omega t$  e  $\beta = \theta$ . Uma vez que  $\theta$  é constante, as equações acima indicam que tanto uma senóide quanto uma cossenóide com determinado ângulo de fase podem ser escritas como a soma de uma função seno e uma função cosseno com os mesmos argumentos. Por exemplo, usando a Equação 9.11, a Equação 9.5 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x(t) &= X_M \sin(\omega t + \theta) \\ &= X_M (\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) \\ &= A \sin \omega t + B \cos \omega t \end{aligned}$$

onde

$$A = X_M \cos \theta$$

$$B = X_M \sin \theta$$

ou

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \tan^{-1}(B/A))$$

### Exemplo 9.1

Duas tensões  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  são dadas por

$$v_1(t) = 12 \sin(377t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 6 \sin(377t - 15^\circ) \text{ V}$$

Deseja-se determinar a frequência das tensões e o ângulo de fase entre  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ .

A frequência  $f$  em hertz (Hz) é dada pela expressão

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{377}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$$

O ângulo de fase entre as tensões é de  $45^\circ - (-15^\circ) = 60^\circ$ ; isto é,  $v_1(t)$  está adiantada em relação a  $v_2(t)$  de  $60^\circ$  ou  $v_2(t)$  está atrasada em relação a  $v_1(t)$  de  $60^\circ$ . ■

### Exemplo 9.2

Desejamos traçar o gráfico das curvas das seguintes funções: (a)  $v(t) = 1 \cos(\omega t + 45^\circ)$ , (b)  $v(t) = 1 \cos(\omega t + 225^\circ)$  e (c)  $v(t) = 1 \cos(\omega t - 315^\circ)$ .

Na Figura 9.3a é mostrada a curva da função  $v(t) = 1 \cos \omega t$ . A Figura 9.3b mostra a curva da função  $v(t) = 1 \cos(\omega t + 45^\circ)$ . A Figura 9.3c mostra a curva da função  $v(t) = 1 \cos(\omega t + 225^\circ)$ . Veja ainda que

$$v(t) = 1 \cos(\omega t + 225^\circ) = 1 \cos(\omega t + 45^\circ + 180^\circ) \quad \blacksquare$$

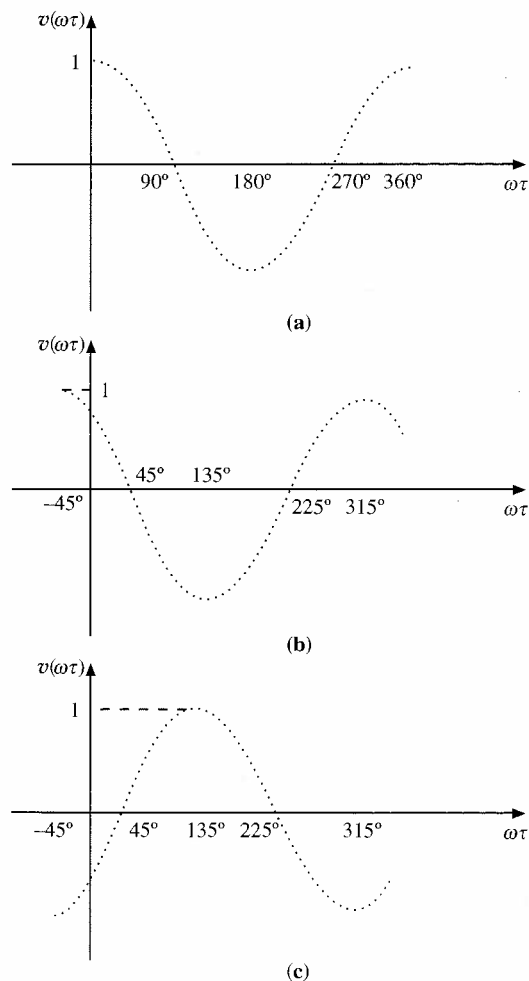


Figura 9.3 Curvas cosseno com variados ângulos de fase.

essa curva está deslocada de  $180^\circ$  da curva da Figura 9.3b; isto é,  $\cos(\omega t + 225^\circ) = -\cos(\omega t + 45^\circ)$ , e a Figura 9.3c é a negativa da Figura 9.3b. Finalmente, uma vez que a função

$$v(t) = 1 \cos(\omega t - 315^\circ) = 1 \cos(\omega t - 315^\circ + 360^\circ) = 1 \cos(\omega t + 45^\circ)$$

essa função é idêntica à mostrada na Figura 9.3b.

### Exemplo 9.3

Determine o ângulo de fase entre as duas tensões  $v_1(t) = 12 \sin(\omega t + 60^\circ)$  V e  $v_2(t) = -6 \cos(\omega t + 30^\circ)$  V. Usando-se a Equação 9.9,  $v_2(t)$  pode ser escrita como

$$v_2(t) = -6 \cos(\omega t + 30^\circ) = 6 \cos(\omega t + 210^\circ)$$

Empregando-se então a Equação 9.7, obtemos

$$\begin{aligned} v_2(t) &= 6 \cos(\omega t + 210^\circ) \\ &= 6 \sin(\omega t + 300^\circ) \end{aligned}$$

Agora que ambas as tensões de mesma frequência são expressas como curvas seno com amplitudes positivas, o ângulo de fase entre  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  é  $60^\circ - (300^\circ) = -240^\circ$  [ou seja,  $v_1(t)$  está adiante de  $v_2(t)$  de  $120^\circ$ ].

### Exercícios

**E9.1** Dada a tensão  $v(t) = 120 \cos(314t + \pi/4)$  V, determine a frequência da tensão em hertz e o ângulo de fase em graus.

**Resp.:**  $f = 50$  Hz,  $\theta = 45^\circ$ .

**E9.2** Expresse as seguintes funções como funções seno com amplitudes positivas.

(a)  $A \cos(\omega t - 25^\circ)$

(b)  $-B \cos(\omega t + 60^\circ)$

(c)  $-C \sin(\omega t + 20^\circ)$

**Resp.:** (a)  $A \sin(\omega t + 65^\circ)$ , (b)  $B \sin(\omega t + 330^\circ)$ , (c)  $C \sin(\omega t + 200^\circ)$ .

**E9.3** Três correntes de ramo em uma rede são conhecidas como

$$i_1(t) = 2 \sin(377t + 45^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 0,5 \cos(377t + 10^\circ) \text{ A}$$

$$i_3(t) = -0,25 \sin(377t + 60^\circ) \text{ A}$$

Determine os ângulos de fase em que  $i_1(t)$  precede  $i_2(t)$  e  $i_1(t)$  precede  $i_3(t)$ .

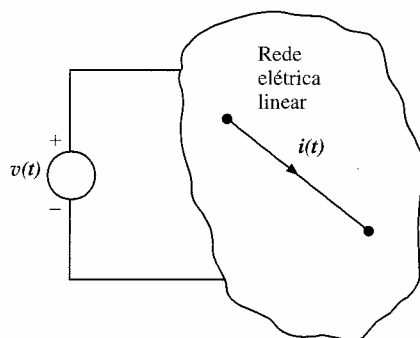
**Resp.:**  $i_1$  precede  $i_2$  de  $-55^\circ$ ,  $i_1$  precede  $i_3$  de  $-195^\circ$ .

## 9.2 Funções de Excitação Senoidais e Complexas

Nos capítulos anteriores, aplicaram-se funções de excitação constantes e verificou-se que as respostas em regime estacionário dos circuitos a essas entradas também eram constantes.

De forma semelhante, se uma rede linear é excitada por uma função senoidal, as tensões e correntes em estado estacionário também serão senoidais. Esse resultado é também trazido à tona pelas equações LKT e LKC. Por exemplo, se a tensão sobre um ramo é senoidal com uma frequência qualquer, as tensões sobre os outros ramos também deverão ser senoidais com a mesma frequência se a LKT for válida ao longo de qualquer caminho fechado. Isto, é claro, significa que as soluções forçadas das equações diferenciais que descrevem uma rede excitada por uma função senoidal são também funções senoidais no tempo. Por exemplo, se for considerado que a entrada é uma tensão senoidal  $v(t)$  e que a saída é a corrente  $i(t)$ , conforme mostrado na Figura 9.4, então se  $v(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ ,  $i(t)$  será do tipo  $i(t) = B \sin(\omega t + \phi)$ . A questão fundamental aqui é que a forma de onda da saída é conhecida, e a solução depende apenas de se determinar os valores dos parâmetros  $B$  e  $\phi$ .



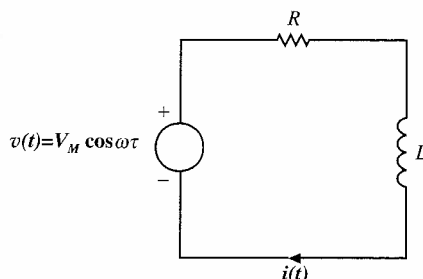


**Figura 9.4** Resposta da corrente a uma tensão aplicada em uma rede elétrica.

### Exemplo 9.4

Consideremos o circuito da Figura 9.5. A equação LKT para esse circuito é

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M \cos \omega t$$



**Figura 9.5** Circuito RL.

Uma vez que a função de entrada é  $V_M \cos \omega t$ , assumimos que a componente de excitação de resposta da corrente  $i(t)$  é da forma

$$i(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

que pode ser escrita usando-se a Equação 9.11 como

$$\begin{aligned} i(t) &= A \cos \phi \cos \omega t - A \sin \phi \sin \omega t \\ &= A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Note que, como observado no Capítulo 7, essa equação tem a mesma forma da função de excitação  $\cos \omega t$  e sua derivada  $\sin \omega t$ . Substituindo-se essa equação para  $i(t)$  na equação diferencial acima, tem-se

$$L \frac{d}{dt} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) + R(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) = V_M \cos \omega t$$

Determinando a derivada indicada, produz-se

$$-A_1 \omega L \sin \omega t + A_2 \omega L \cos \omega t + R A_1 \cos \omega t + R A_2 \sin \omega t = V_M \cos \omega t$$

A partir dos coeficientes equacionais das funções seno e cosseno, obtemos

$$-A_1 \omega L + R A_2 = 0$$

$$A_1 R + A_2 \omega L = V_M$$

ou seja, duas equações simultâneas nas variáveis  $A_1$  e  $A_2$ . Resolvendo-se essas equações para  $A_1$  e  $A_2$ , tem-se

$$A_1 = \frac{R V_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$A_2 = \frac{\omega L V_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Logo,

$$i(t) = \frac{RV_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega LV_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t$$

que, utilizando a última identidade da Equação 9.11, pode ser escrita como

$$i(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

onde  $A$  e  $\phi$  são determinados como se segue:

$$A \cos \phi = \frac{RV_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$A \sin \phi = \frac{-\omega LV_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Desse modo,

$$\tan \phi = \frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} = -\frac{\omega L}{R}$$

e portanto

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} (A \cos \phi)^2 + (A \sin \phi)^2 &= A^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = A^2 \\ A^2 &= \frac{R^2 V_M^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{(\omega L)^2 V_M^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = \frac{V_M^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ A &= \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \end{aligned}$$

Dessa maneira, a expressão final para  $i(t)$  é

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left( \omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right)$$

A análise acima indica que  $\phi$  é zero se  $L = 0$  e daí  $i(t)$  está em fase com  $v(t)$ . Se  $R = 0$ ,  $\phi = 90^\circ$  e a corrente está atrasada da tensão de  $90^\circ$ . Se  $R$  e  $L$  estão ambas presentes, a corrente tem um atraso com relação à tensão de um ângulo entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . ■

Esse exemplo ilustra um ponto importante – resolver um circuito de um laço mesmo que simples contendo um resistor e um indutor é bastante complicado se comparado a um circuito de laço único contendo dois resistores. Imagine por um momento quão trabalhoso seria resolver um circuito um pouco mais complicado utilizando o procedimento empregado no Exemplo 9.4. Para evitar tal método, vamos estabelecer uma correspondência entre funções senoidais no tempo e números complexos. Mostraremos então que tal relacionamento conduz a um conjunto de equações algébricas para correntes e tensões em uma rede (por exemplo, correntes de laço e tensões nodais) nas quais os coeficientes das variáveis são números complexos. A partir daí, mais uma vez descobriremos que correntes e tensões em um circuito podem ser determinadas resolvendo-se um conjunto de equações algébricas; no entanto, nesse caso, sua solução é complicada pelo fato de que as variáveis das equações têm coeficientes complexos em vez de reais.

O meio usado aqui para estabelecer um relacionamento entre funções senoidais variantes no tempo e números complexos é a equação de Euler, que é escrita deste modo para nossos propósitos:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (9.12)$$

Essa função complexa tem uma parte real e outra imaginária:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{j\omega t}) &= \cos \omega t \\ \operatorname{Im}(e^{j\omega t}) &= \sin \omega t \end{aligned} \quad (9.13)$$

onde  $\text{Re}(\cdot)$  e  $\text{Im}(\cdot)$  representam a parte real e a imaginária, respectivamente, da função entre parênteses. Suponhamos que a função forçante da Figura 9.4 seja a seguinte tensão não-realizável

$$v(t) = V_M e^{j\omega t} \quad (9.14)$$

que, devido à equação de Euler, pode ser escrita como

$$v(t) = V_M \cos \omega t + jV_M \sin \omega t \quad (9.15)$$

As partes real e imaginária dessa função são cada uma delas reais. Pensamos nessa função complexa de excitação como duas funções de entrada, uma real e uma imaginária. Em consequência da linearidade, o princípio da superposição se aplica e daí a resposta da corrente pode ser escrita como

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi) + jI_M \sin(\omega t + \phi) \quad (9.16)$$

onde  $I_M \cos(\omega t + \phi)$  é a resposta devido a  $V_M \cos \omega t$  e  $jI_M \sin(\omega t + \phi)$  é a resposta devido a  $jV_M \sin \omega t$ . Essa expressão para a corrente contendo tanto um termo real como um imaginário pode ser escrita via equação de Euler como

$$i(t) = I_M e^{j(\omega t + \phi)} \quad (9.17)$$

Por causa dos relacionamentos acima, concluímos que melhor do que aplicar a função de entrada  $V_M \cos \omega t$  e calcular a resposta  $I_M \cos(\omega t + \phi)$ , podemos aplicar a função complexa de entrada  $V_M e^{j\omega t}$  e calcular a resposta  $I_M e^{j(\omega t + \phi)}$ , a parte real da qual é a resposta desejada  $I_M \cos(\omega t + \phi)$ . Apesar de esse procedimento inicialmente parecer mais complicado, na verdade ele não é. É por meio dessa técnica que converteremos a equação diferencial em uma equação algébrica muito mais fácil de se resolver.

### Exemplo 9.5

Mais uma vez, vamos determinar a corrente no circuito  $RL$  examinado no Exemplo 9.4. Agora, porém, em vez de aplicarmos  $V_M \cos \omega t$ , aplicaremos  $V_M e^{j\omega t}$ .

A resposta forçada será da forma

$$i(t) = I_M e^{j(\omega t + \phi)}$$

onde somente  $I_M$  e  $\phi$  são desconhecidas. Substituindo-se  $v(t)$  e  $i(t)$  na equação diferencial para o circuito, obtemos

$$RI_M e^{j(\omega t + \phi)} + L \frac{d}{dt} (I_M e^{j(\omega t + \phi)}) = V_M e^{j\omega t}$$

Tomando a derivada indicada, obtemos

$$RI_M e^{j(\omega t + \phi)} + j\omega LI_M e^{j(\omega t + \phi)} = V_M e^{j\omega t}$$

Dividindo cada termo da equação pelo fator comum  $e^{j\omega t}$ , obtém-se

$$RI_M e^{j\phi} + j\omega LI_M e^{j\phi} = V_M$$

que é uma equação algébrica com coeficientes complexos. Essa equação pode ser escrita como

$$I_M e^{j\phi} = \frac{V_M}{R + j\omega L}$$

Convertendo-se o lado direito da equação para forma exponencial ou polar, obtém-se a equação

$$I_M e^{j\phi} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j[-\tan^{-1}(\omega L/R)]}$$

(Uma breve revisão em números complexos é dada no Apêndice C para os leitores que necessitam aprimorar suas habilidades nessa área.) A equação acima indica claramente que a magnitude e fase da corrente resultante são

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

No entanto, desde que nossa função de entrada real era  $V_M \cos \omega t$  e não  $V_M e^{j\omega t}$ , nossa resposta na verdade é a parte real da resposta complexa:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_M \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned}$$

Repare que esta é idêntica à resposta obtida no exemplo anterior quando a equação diferencial foi resolvida para a corrente  $i(t)$ . ■

### 9.3 Fasores

Mais uma vez vamos assumir que a função excitante para uma rede linear é da forma

$$v(t) = V_M e^{j\omega t}$$

Então toda tensão ou corrente em estado estacionário na rede terá a mesma forma e a mesma frequência  $\omega$ ; por exemplo, a corrente  $i(t)$  será da forma  $i(t) = I_M e^{j(\omega t + \phi)}$ .

A medida que prosseguimos com a análise de circuitos, vamos simplesmente notar a frequência e então eliminaremos o fator  $e^{j\omega t}$ , uma vez que ele é comum a todos os termos nas equações descritas. Eliminando o termo  $e^{j\omega t}$ , temos a indicação de que toda tensão ou corrente pode ser completamente descrita por uma magnitude e fase. Por exemplo, uma tensão  $v(t)$  pode ser escrita de forma exponencial como

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta) = \text{Re}[V_M e^{j(\omega t + \theta)}] \quad (9.18)$$

ou como um número complexo

$$v(t) = \text{Re}(V_M \angle \theta e^{j\omega t}) \quad (9.19)$$

Já que estamos trabalhando com uma função de excitação complexa, a parte real da qual é a resposta desejada, e cada termo da equação vai conter  $e^{j\omega t}$ , podemos eliminar  $\text{Re}(\bullet)$  e  $e^{j\omega t}$  e trabalhar somente com o número complexo  $V_M \angle \theta$ . Essa representação complexa é normalmente chamada de *fasor*. Para efeito de distinção, fasores serão escritos em negrito. De maneira idêntica, uma tensão  $v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta) = \text{Re}[V_M e^{j(\omega t + \theta)}]$  e uma corrente  $i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}[I_M e^{j(\omega t + \phi)}]$  são escritos na notação fasorial como  $\mathbf{V} = V_M \angle \theta$  e  $\mathbf{I} = I_M \angle \phi$ , respectivamente.

#### Exemplo 9.6

Novamente, consideremos o circuito RL do Exemplo 9.4. A equação diferencial é

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M \cos \omega t$$

A função excitante pode ser substituída por uma função de excitação complexa que é escrita como  $\mathbf{V} e^{j\omega t}$  com fasor  $\mathbf{V} = V_M \angle 0^\circ$ . Similarmente, o componente da resposta forçada da corrente  $i(t)$  pode ser substituído por uma função complexa que é escrita como  $\mathbf{I} e^{j\omega t}$  com fasor  $\mathbf{I} = I_M \angle \phi$ . Das nossas discussões anteriores, lembramos que a solução da equação diferencial é a parte real dessa corrente.

Utilizando a função excitante complexa, achamos que a equação diferencial se torna

$$L \frac{d}{dt} (\mathbf{I} e^{j\omega t}) + R \mathbf{I} e^{j\omega t} = \mathbf{V} e^{j\omega t}$$

$$j\omega L \mathbf{I} e^{j\omega t} + R \mathbf{I} e^{j\omega t} = \mathbf{V} e^{j\omega t}$$

Repare que  $e^{j\omega t}$  é um fator comum e, como já indicado, pode ser eliminado deixando os fasores, isto é,

$$j\omega L \mathbf{I} + R \mathbf{I} = \mathbf{V}$$

Portanto,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R + j\omega L} = I_M \angle \phi = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

Dai

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right)$$

que é, mais uma vez, a função obtida anteriormente. ■

Definimos as relações entre fasores depois de o termo  $e^{j\omega t}$  ter sido eliminado como “análise de fasores ou domínio da frequência”. Temos então transformado um conjunto de equações diferenciais com funções de excitação senoidais no domínio do tempo em um conjunto de equações algébricas contendo números complexos no domínio da frequência. Na realidade, somos agora confrontados com a resolução de um conjunto de equações algébricas para determinar os fasores desconhecidos. Os fasores são então simplesmente transformados de volta no domínio do tempo para se obter a solução do conjunto original de equações diferenciais. Além disso, notamos que a solução de circuitos senoidais em estado estacionário deveria ser relativamente simples se pudéssemos escrever a equação de fasor diretamente a partir do circuito. Na Seção 9.4 vamos preparar terreno para fazer exatamente isso.

Note que nas discussões acima tem-se assumido que funções senoidais seriam representadas como fasores com um ângulo de fase baseado em uma função cosseno. Logo, se funções seno são usadas, empregaremos simplesmente o relacionamento na Equação 9.7 para obter o devido ângulo de fase.

Em resumo, enquanto  $v(t)$  representa uma tensão no domínio do tempo, o fasor  $\mathbf{V}$  representa a tensão no domínio da frequência. O fasor contém somente magnitude e informação de fase, e a frequência é implícita nessa representação. A transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência, tanto quanto a transformação inversa, é mostrada na Tabela 9.1. Lembre-se que o ângulo de fase é baseado em uma função cosseno e, portanto, se uma função seno está envolvida, um fator de  $90^\circ$  deverá ser aplicado, como mostrado na tabela.

Os exemplos a seguir ilustram o uso da transformação de fasor.

**Tabela 9.1** Representação de fasores

| Domínio do Tempo              | Domínio da Frequência            |
|-------------------------------|----------------------------------|
| $A \cos(\omega t \pm \theta)$ | $A \angle \pm \theta$            |
| $A \sin(\omega t \pm \theta)$ | $A \angle \pm \theta - 90^\circ$ |

### Exemplo 9.7

Converta as funções no tempo  $v(t) = 24 \cos(377t - 45^\circ)$  e  $i(t) = 12 \sin(377t + 120^\circ)$  em fasores.

Utilizando a transformação de fasores mostrada acima, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= 24 \angle -45^\circ \\ \mathbf{V} &= 12 \angle 120^\circ - 90^\circ = 12 \angle 30^\circ\end{aligned}$$

### Exemplo 9.8

Converta os fasores  $\mathbf{V} = 16 \angle 20^\circ$  e  $\mathbf{I} = 10 \angle -75^\circ$  do domínio da frequência para o domínio do tempo, caso a frequência seja 60 Hz.

Empregando a transformação inversa para fasores, temos que

$$\begin{aligned}v(t) &= 16 \cos(377t + 20^\circ) \\ v(t) &= 10 \cos(377t - 75^\circ)\end{aligned}$$

## Exercícios

**E9.4** Converta as seguintes funções de tensão em fasores.

$$v_1(t) = 12 \cos(377t - 425^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 18 \sin(2513t + 4.2^\circ) \text{ V}$$

**Resp.:**  $V_1 = 12 \angle -425^\circ \text{ V}$ ,  $V_2 = 18 \angle -85.8^\circ \text{ V}$ .

**E9.5** Converta os seguintes fasores para o domínio do tempo, caso a frequência seja 400 Hz.

$$V_1 = 10 \angle 20^\circ$$

$$V_2 = 12 \angle -60^\circ$$

**Resp.:**  $v_1(t) = 10 \cos(800\pi t + 20^\circ) \text{ V}$ ,  $v_2(t) = 12 \cos(800\pi t - 60^\circ) \text{ V}$ .

## 9.4 Relações de Fasores para Elementos de Circuito

Tendo desenvolvido as técnicas necessárias para análise de circuitos em estado estacionário quando excitados por funções senoidais, estamos agora aptos para estabelecer o relacionamento fasorial e entre tensão e corrente e os três elementos passivos  $R$ ,  $L$  e  $C$ .

No caso do resistor, como mostrado na Figura 9.6a, o relacionamento tensão-corrente é

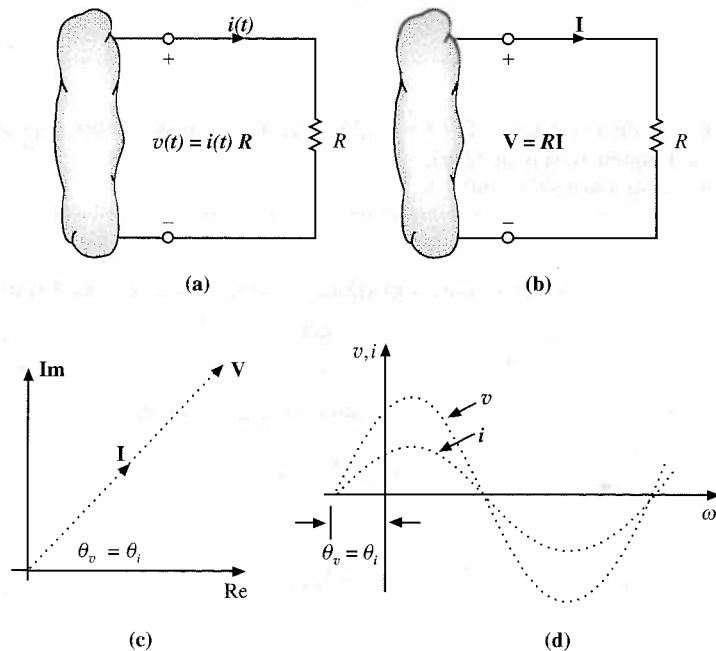
$$v(t) = Ri(t) \quad (9.20)$$

Aplicando-se a tensão complexa  $V_M e^{j(\omega t + \theta_v)}$ , resulta na corrente complexa  $I_M e^{j(\omega t + \theta_i)}$ , e portanto, a Equação 9.20 se torna

$$V_M e^{j(\omega t + \theta_v)} = RI_M e^{j(\omega t + \theta_i)}$$

que se reduz a

$$V_M e^{j\theta_v} = RI_M e^{j\theta_i} \quad (9.21)$$



**Figura 9.6** Relacionamentos tensão-corrente para um resistor.

A Equação 9.21 pode ser escrita como

$$V = RI \quad (9.22)$$

onde

$$\mathbf{V} = V_M e^{j\theta_v} = V_M \angle \theta_v \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = I_M e^{j\theta_i} = I_M \angle \theta_i$$

A partir da Equação 9.21 vemos que  $\theta_v = \theta_i$  e, desse modo, a corrente e a tensão para esse circuito estão em fase.

Historicamente, números complexos têm sido representados como pontos em um plano em que o eixo das abscissas representa o eixo real, e o eixo das ordenadas, o eixo imaginário. O segmento que conecta a origem ao ponto fornece uma representação conveniente da magnitude e ângulo quando o número complexo é escrito na forma polar. A revisão no Apêndice C mostra como tais números complexos ou segmentos podem ser somados, subtraídos e assim por diante. Uma vez que fasores são números complexos, é conveniente representar graficamente os fasores da tensão e corrente como segmentos. Um gráfico de segmentos representando tais fasores é chamado de *diagrama de fasores* ou *diagrama fasorial*. Tal representação gráfica de fasores fornece informação imediata da magnitude relativa de um fasor em relação ao outro, o ângulo entre dois fasores e a posição relativa de um fasor em relação ao outro (ou seja, se um fasor está adiantado ou atrasado em relação a um outro fasor). Um diagrama fasorial e as formas de onda senoidais para o resistor são mostradas na Figura 9.6c e d, respectivamente. Um diagrama fasorial será desenhado para cada um dos elementos do circuito no restante da seção.

### Exemplo 9.9

Caso a tensão  $v(t) = 24 \cos(377t + 75^\circ)$  V seja aplicada a um resistor de  $6 \, \Omega$ , como mostrado na Figura 9.6a, desejamos determinar a corrente resultante.

Uma vez que o fasor de tensão é

$$\mathbf{V} = 24 \angle 75^\circ \text{ V}$$

o fasor de corrente da Equação 9.22 será

$$\mathbf{I} = \frac{24 \angle 75^\circ}{6} = 4 \angle 75^\circ \text{ A}$$

que, no domínio do tempo, pode ser escrito como

$$i(t) = 4 \cos(377t + 75^\circ) \text{ A}$$

### Exercício

**E9.6** A corrente em um resistor de  $4 \, \Omega$  é  $\mathbf{I} = 12 \angle 60^\circ$ . Expresse a tensão sobre o resistor como função do tempo, caso a frequência seja de 60 Hz.

**Resp.:**  $v(t) = 48 \cos(377t + 60^\circ)$  V.

O relacionamento tensão-corrente para um indutor, como mostrado na Figura 9.7a, é

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (9.23)$$

Substituindo a tensão e corrente complexas nessa equação, temos

$$V_M e^{j(\omega t + \theta_v)} = L \frac{d}{dt} I_M e^{j(\omega t + \theta_i)}$$

que se reduz a

$$V_M e^{j\theta_v} = j\omega L I_M e^{j\theta_i} \quad (9.24)$$

A Equação 9.24 na notação de fasores é

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} \quad (9.25)$$

Note que a equação diferencial no domínio do tempo 9.23 foi convertida em uma equação algébrica com coeficientes complexos no domínio da frequência. Tal relacionamento é mostrado na Figura 9.7b. Uma vez que o operador imaginário  $j = 1e^{j90^\circ} = 1 \angle 90^\circ = \sqrt{-1}$ , a Equação 9.4 pode ser escrita como

$$V_M e^{j\theta_v} = \omega L I_M e^{j(\theta_i + 90^\circ)} \quad (9.26)$$

Portanto, a corrente e a tensão estão  $90^\circ$  fora de fase e a tensão em particular está adiantada da corrente de  $90^\circ$  ou a corrente tem um atraso de  $90^\circ$  em relação à tensão. O diagrama fasorial e as formas de onda senoidais para o circuito indutor são mostrados na Figura 9.7c e d, respectivamente.

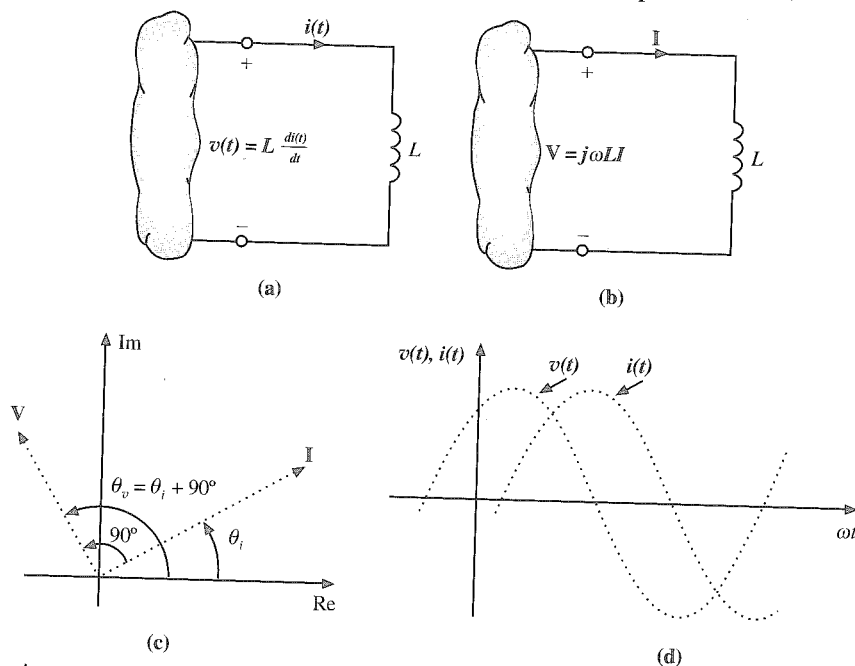


Figura 9.7 Relacionamentos tensão-corrente para um indutor.

### Exemplo 9.10

A tensão  $v(t) = 12 \cos(377t + 20^\circ)$  V é aplicada ao indutor de 20 mH mostrado na Figura 9.7a. Determine a corrente resultante.

O fasor de corrente é

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{j\omega L} = \frac{12 \angle 20^\circ}{\omega L \angle 90^\circ} \\ &= \frac{12 \angle 20^\circ}{(377)(20 \times 10^{-3}) \angle 90^\circ} \\ &= 1,59 \angle -70^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

ou

$$i(t) = 1,59 \cos(377t - 70^\circ) \text{ A}$$

### Exercício

E9.7 A corrente em um indutor de 0,05 H é  $I = 4 \angle -30^\circ$  A. Caso a frequência da corrente seja de 60 Hz, determine a tensão sobre o indutor.

Resp.:  $v_L(t) = 75,4 \cos(377t + 60^\circ)$  V.



O relacionamento tensão-corrente para o último elemento passivo, o capacitor, como mostrado na Figura 9.8a, é

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (9.27)$$

Mais uma vez, empregando a tensão e corrente complexas, obtemos

$$I_M e^{j(\omega t + \theta_i)} = C \frac{d}{dt} V_M e^{j(\omega t + \theta_v)} \quad (9.28)$$

que se reduz a

$$I_M e^{j\theta_i} = j\omega C V_M e^{j\theta_v} \quad (9.28)$$

Na notação de fasores, essa equação se torna

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \quad (9.29)$$

A Equação 9.27, uma equação diferencial no domínio do tempo, foi transformada na Equação 9.29, uma equação algébrica com coeficientes complexos no domínio da frequência. O relacionamento fasorial é mostrado na Figura 9.8b. Substituindo-se  $j = 1e^{j90^\circ}$  na Equação 9.28, tem-se

$$I_M e^{j\theta_i} = \omega C V_M e^{j(\theta_v + 90^\circ)} \quad (9.30)$$

Note que a tensão e a corrente estão  $90^\circ$  fora de fase. A Equação 9.30 afirma que a corrente está adiantada em relação à tensão de  $90^\circ$  ou a tensão está com um atraso de  $90^\circ$  da corrente. O diagrama fasorial e as formas de onda senoidais para o circuito capacitor são mostradas na Figura 9.8c e d, respectivamente.

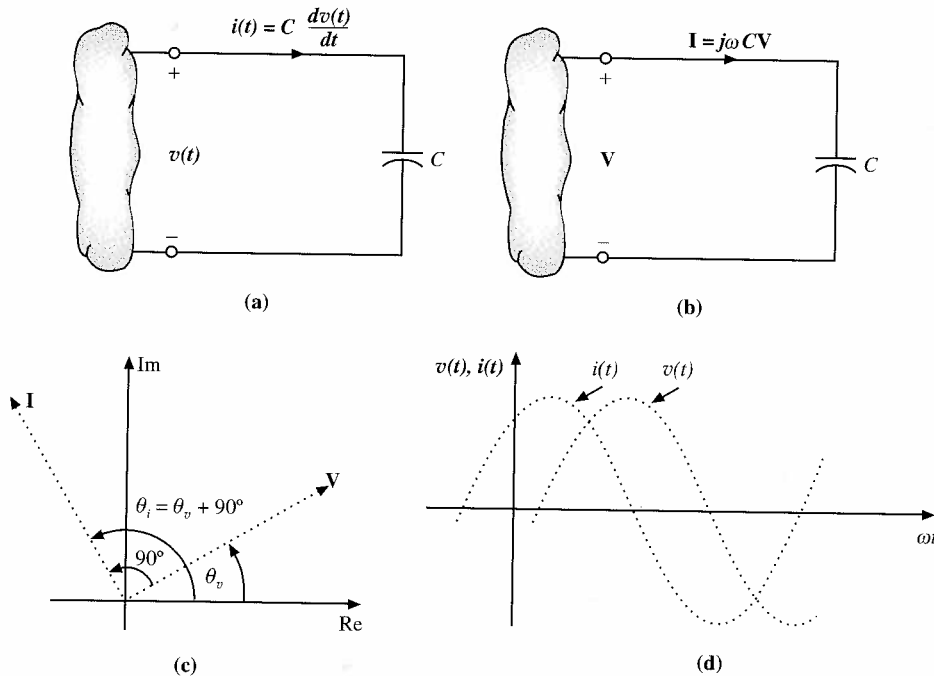


Figura 9.8 Relacionamentos tensão-corrente para um capacitor.

### Exemplo 9.11

A tensão  $v(t) = 100 \cos(377t + 15^\circ)$  V é aplicada a um capacitor de  $100 \mu\text{F}$ , como mostrado na Figura 9.8a. O fasor de corrente resultante é

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= j\omega C (100/\underline{15^\circ}) \\ &= (377)(100 \times 10^{-6} / \underline{90^\circ})(100/\underline{15^\circ}) \\ &= 3,77/\underline{105^\circ} \text{ A} \end{aligned}$$

Portanto, a corrente expressa como uma função do tempo é

$$i(t) = 3,77 \cos(377t + 105^\circ) \text{ A}$$

### Exercício

**E9.8** A corrente em um capacitor de  $150 \mu\text{F}$  é  $\mathbf{I} = 3,6 \angle -145^\circ \text{ A}$ . Caso a frequência da corrente seja de 60 Hz, determine a tensão sobre o capacitor.

**Resp.:**  $\mathbf{V}_C = 63,67 \angle -235^\circ \text{ V}$ .

É interessante notar que o conceito de fasor pode ser usado para derivar relações trigonométricas. Por exemplo, considere a função  $A \cos \omega t + B \sin \omega t$ . Já que

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$-je^{j\omega t} = -j \cos \omega t + \sin \omega t$$

portanto,

$$\text{Re}(-je^{j\omega t}) = \sin \omega t$$

e, dessa forma,

$$\begin{aligned} A \cos \omega t + B \sin \omega t &= \text{Re}(Ae^{j\omega t} - jBe^{j\omega t}) \\ &= \text{Re}[(A - jB)e^{j\omega t}] \\ &= \text{Re}(D \angle \theta e^{j\omega t}) \\ &= D \cos(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

onde o fasor  $A - jB$  é escrito de forma polar como

$$A - jB = D \angle \theta$$

onde  $D = \sqrt{A^2 + B^2}$  e  $\theta = -\tan^{-1}(B/A)$ .

### Exemplo 9.12

Desejamos converter a função

$$v(t) = 10 \cos(377t + 30^\circ) + 5 \sin(377t - 20^\circ)$$

em uma única função senoidal, utilizando o conceito de fasor.

A partir da discussão acima, notamos que

$$\begin{aligned} D \angle \theta &= A - jB \\ &= 10 \angle 30^\circ - j(5 \angle -20^\circ) \\ &= 10 \angle 30^\circ - 5 \angle 70^\circ \\ &= 6,96 \angle 2,47^\circ \end{aligned}$$

e portanto

$$v(t) = 6,96 \cos(377t + 2,47^\circ)$$

### Exemplo 9.13

Desejamos provar a identidade trigonométrica

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

utilizando o conceito de fasor.

Podemos escrever a expressão  $\cos(\alpha + \beta)$  como

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \operatorname{Re}[e^{j(\alpha + \beta)}] \\ &= \operatorname{Re}(e^{j\alpha} e^{j\beta}) \\ &= \operatorname{Re}[(\cos \alpha + j \sin \alpha)(\cos \beta + j \sin \beta)] \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Essa discussão ilustra que a técnica de fasores tem usos variados, além da análise ac de circuitos.

## 9.5 Admitância e Impedância

Examinamos cada um dos elementos de um circuito no domínio da frequência, enfocando-os individualmente. Desejamos agora tratar esses elementos passivos de maneira mais geral. Definimos agora a *impedância* de entrada de dois terminais,  $\mathbf{Z}$ , também referida como impedância de ponto de direção, exatamente da mesma maneira como definimos resistência anteriormente. Mais adiante examinaremos outro tipo de impedância, chamada impedância de transferência.

Impedância é definida como a razão entre o fasor  $\mathbf{V}$  pelo fasor de corrente  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad (9.31)$$

nos dois terminais do elemento relacionados um ao outro pela convenção passiva de sinal, como ilustrado na Figura 9.9. Uma vez que  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  são complexos, a impedância  $\mathbf{Z}$  é também complexa e

$$\mathbf{Z} = \frac{V_M \angle \theta_v}{I_M \angle \theta_i} = \frac{V_M}{I_M} \angle \theta_v - \theta_i = Z \angle \theta_z \quad (9.32)$$

Uma vez que  $\mathbf{Z}$  é a razão de  $\mathbf{V}$  por  $\mathbf{I}$ , a unidade de  $\mathbf{Z}$  é ohms. Assim o conceito de impedância em um circuito ac é análogo ao de resistência em um circuito dc. Em forma retangular, a impedância é expressa como

$$\mathbf{Z}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (9.33)$$

onde  $R(\omega)$  é o componente real, ou resistivo, e  $X(\omega)$  é o componente imaginário, ou reativo. De modo geral, nos referimos simplesmente a  $R$  como a resistência e  $X$  como a reatância. É importante notar que  $R$  e  $X$  são funções reais de  $\omega$  e, portanto,  $\mathbf{Z}(j\omega)$  é a frequência dependente. A Equação 9.33 indica claramente que  $\mathbf{Z}$  é um número complexo; entretanto, não é um fasor.

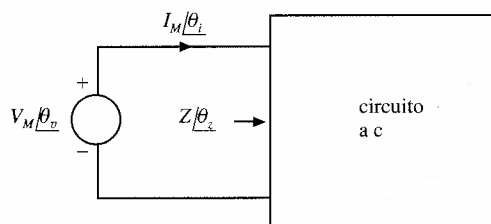


Figura 9.9 Relacionamento geral da impedância.

As equações 9.32 e 9.33 indicam que

$$Z \angle \theta_z = R + jX \quad (9.34)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}Z &= \sqrt{R^2 + X^2} \\ \theta_z &= \tan^{-1} \frac{X}{R}\end{aligned} \quad (9.35)$$

onde

$$R = Z \cos \theta_z$$

$$X = Z \sin \theta_z$$

**Tabela 9.2** Impedâncias de elementos passivos.

| Elemento Passivo | Impedância                                                                                        |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R$              | $Z = R$                                                                                           |
| $L$              | $Z = j\omega L = jX_L = \omega L \angle 90^\circ, X_L = \omega L$                                 |
| $C$              | $Z = \frac{1}{j\omega C} = jX_C = -\frac{1}{\omega C} \angle 90^\circ, X_C = -\frac{1}{\omega C}$ |

Para elementos passivos individuais, a impedância é como a mostrada na Tabela 9.2. No entanto, do mesmo modo como era bom saber como determinar a resistência equivalente de uma combinação em série ou em paralelo de um circuito dc, queremos agora descobrir como determinar a impedância equivalente em um circuito ac quando elementos passivos estão interconectados. Como a determinação da impedância equivalente está baseada na LKT e LKC, devemos ver se tais leis são válidas no domínio da frequência. Suponha, por exemplo, que um circuito é excitado por fontes de tensão da forma  $\cos(\omega t + \theta_m)$ . Então toda corrente em estado estacionário na rede será da forma  $\cos(\omega t + \theta_k)$ . Em qualquer nó do circuito, a LKC, escrita no domínio do tempo, é

$$i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) = 0$$

ou

$$I_{M_1} \cos(\omega t + \phi_1) + I_{M_2} \cos(\omega t + \phi_2) + \dots + I_{M_n} \cos(\omega t + \phi_n) = 0$$

De nosso estudo anterior, podemos aplicar imediatamente a transformação fasorial na equação acima para obter

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0$$

No entanto, essa equação é simplesmente a LKC no domínio da frequência. De maneira semelhante, podemos mostrar que a LKT se aplica no domínio da frequência. Utilizando-se do fato de que a LKC e a LKT são válidas no domínio da frequência, podemos mostrar, como feito anteriormente no Capítulo 2 para resistores, que impedâncias podem ser combinadas usando-se as mesmas regras que estabelecemos para combinações de resistores, isto é, se  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$  estão conectados em série, a impedância equivalente  $Z_s$  é

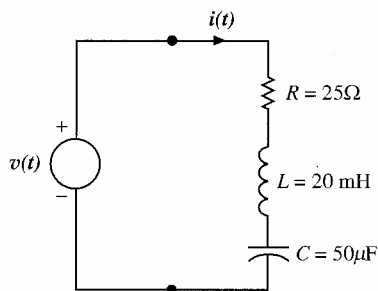
$$Z_s = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n \quad (9.36)$$

e caso  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$  estejam conectados em paralelo, a impedância equivalente  $Z_p$  é

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n} \quad (9.37)$$

### Exemplo 9.14

Determine a impedância equivalente da rede mostrada na Figura 9.10, caso a frequência seja  $f = 60$  Hz. Então calcule a corrente  $i(t)$ , caso a fonte de tensão  $v(t) = 50 \cos(\omega t + 30^\circ)$  V. Finalmente, calcule a impedância equivalente, caso a frequência seja  $f = 400$  Hz.



**Figura 9.10** Circuito ac em série.

As impedâncias dos elementos separadamente em 60 Hz são

$$Z_R = 25\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j(2\pi \times 60)(20 \times 10^{-3}) = j7,54 \Omega$$

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{(2\pi \times 60)(50 \times 10^{-6})} = -j53,05 \Omega$$

Uma vez que os elementos estão em série,

$$\begin{aligned} Z &= Z_R + Z_L + Z_C \\ &= 25 - j45,51 \Omega \end{aligned}$$

a corrente no circuito é dada por

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50\angle 30^\circ}{25 - j45,51} = \frac{50\angle 30^\circ}{51,92 \angle -61,22^\circ} = 0,96\angle 91,22^\circ \text{ A}$$

ou, no domínio do tempo,  $i(t) = 0,96 \cos(377t + 91,22^\circ) \text{ A}$ .

Se a frequência é 400 Hz, a impedância de cada elemento é

$$Z_R = 25 \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j50,27 \Omega$$

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C} = -j7,96 \Omega$$

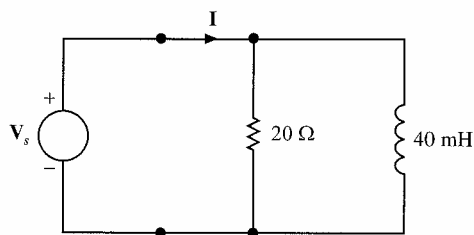
A impedância total é então

$$Z = 25 + j42,31 = 49,14 \angle 59,42^\circ \Omega$$

É importante notar que na frequência  $f = 60 \text{ Hz}$ , a reatância do circuito é capacitiva, isto é, se a impedância está escrita como  $R + jX$ ,  $X < 0$ ; no entanto, em  $f = 400 \text{ Hz}$ , a reatância é indutiva, uma vez que  $X > 0$ . ■

### Exemplo 9.15

Determine a impedância equivalente do circuito na Figura 9.11 em 60 Hz. Calcule a tensão  $V_s$  caso a corrente  $I$  seja  $I = 0,5 \angle -22,98^\circ \text{ A}$ .



**Figura 9.11** Circuito ac em paralelo.

As impedâncias individuais são

$$Z_R = 20 \, \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j(2\pi \times 60)(40 \times 10^{-3}) = j15,08 \, \Omega$$

A impedância equivalente dos elementos em paralelo é

$$Z = \frac{Z_R Z_L}{Z_R + Z_L}$$

Utilizando os valores para  $Z_R$  e  $Z_L$ , obtém-se

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(20)(j15,08)}{20 + j15,08} \\ &= \frac{301,60 \angle 90^\circ}{25,05 \angle 37,02^\circ} = 7,25 + j9,61 \, \Omega \end{aligned}$$

O leitor deve notar que o componente resistivo da impedância *não* é o resistor de  $20 \, \Omega$ . Lembre-se que  $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$  e, portanto, em geral, o componente resistivo de uma impedância equivalente é uma função de  $\omega$ .

Se a corrente  $I = 0,5 \angle -22,98^\circ$  A, a tensão  $V_S$  é

$$\begin{aligned} V_S &= IZ \\ &= (0,5 \angle -22,98^\circ)(12,04 \angle 52,98^\circ) \\ &= 6,02 \angle 30^\circ \, \text{V} \end{aligned}$$

## Exercícios

**E9.9** Calcule a tensão  $v(t)$  na rede da Figura E9.9.

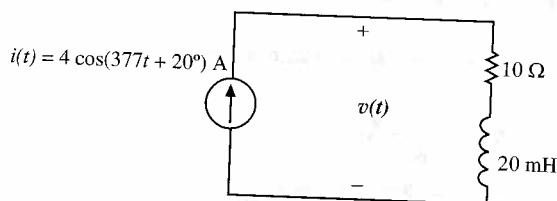


Figura E9.9

**Resp.:**  $v(t) = 50,1 \cos(377t + 57^\circ) \, \text{V}$ .

**E9.10** Determine a corrente  $i(t)$  na rede da Figura E9.10.

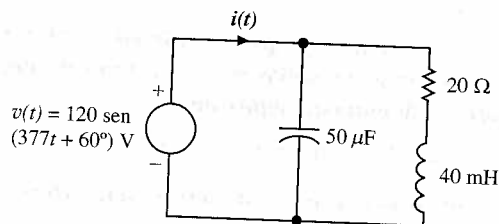


Figura E9.10

**Resp.:**  $i(t) = 3,88 \cos(377t - 39,2^\circ) \, \text{A}$ .

Uma outra quantidade que é muito útil na análise de circuitos ac é a *admitância*, que é recíproca da impedância; isto é,

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} \quad (9.38)$$

As unidades de  $\mathbf{Y}$  são siemens, e essa propriedade é análoga à condutância em circuitos de resistivos. Uma vez que  $\mathbf{Z}$  é um número complexo,  $\mathbf{Y}$  é também um número complexo

$$\mathbf{Y} = Y_M \angle \theta_Y \quad (9.39)$$

que pode ser escrito em forma retangular como

$$\mathbf{Y} = G + jB \quad (9.40)$$

onde  $G$  e  $B$  são chamados *condutância* e *suscetância*, respectivamente. Por causa do relacionamento entre  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Z}$ , podemos expressar os componentes de uma quantidade como uma função dos componentes da outra.

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \quad (9.41)$$

Racionalizando o lado direito dessa equação, tem-se

$$G + jB = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

e portanto

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (9.42)$$

De maneira semelhante, podemos mostrar que

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad (9.43)$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

É muito importante notar que, em geral,  $R$  e  $G$  não são recíprocos. O mesmo é verdade para  $X$  e  $B$ . O caso puramente resistivo é uma exceção. No caso puramente reativo, as quantidades são recíprocos negativos um do outro.

A admitância dos elementos passivos separadamente é

$$\mathbf{Y}_R = \frac{1}{R} = G$$

$$\mathbf{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{1}{\omega L} \angle 90^\circ \quad (9.44)$$

$$\mathbf{Y}_C = j\omega C = \omega C \angle 90^\circ$$

Novamente, uma vez que a LKC e a LKT são válidas no domínio da frequência, podemos mostrar, utilizando o mesmo método descrito no Capítulo 2 para condutância em circuitos resistivos, que as regras para se combinar admitâncias são as mesmas daquelas para se combinar condutâncias; isto é, se  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \dots, \mathbf{Y}_n$  estão conectadas em paralelo, a admitância equivalente é

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \dots + \mathbf{Y}_n \quad (9.45)$$

e se  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \dots, \mathbf{Y}_n$  estão conectadas em série, a admitância equivalente é

$$\frac{1}{\mathbf{Y}_s} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1} + \frac{1}{\mathbf{Y}_2} + \dots + \frac{1}{\mathbf{Y}_n} \quad (9.46)$$

### Exemplo 9.16

Se a impedância equivalente de uma rede é  $\mathbf{Z} = 10 \angle 30^\circ \Omega$ , calcular a admitância equivalente e desenhar o circuito equivalente.

Convertendo-se  $\mathbf{Z}$  para a forma retangular, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= 10 \angle 30^\circ \\ &= 8,66 + j5,0 \Omega \end{aligned}$$

A admitância é então

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{Z} \\ &= 0,1 \angle -30^\circ \\ &= 0,0866 - j0,05 \text{ S} \end{aligned}$$

Os circuitos equivalentes são mostrados na Figura 9.12. Pode-se conferir rapidamente os cálculos, convertendo  $Y_R$  para  $Z_R$  e  $Y_L$  para  $Z_L$ , e então determinando a impedância da combinação paralela; por exemplo,

$$\begin{aligned} Z_R &= \frac{1}{Y_R} = \frac{1}{0,0866} = 11,55 \Omega \\ Z_L &= \frac{1}{Y_L} = \frac{1}{-j0,05} = j20 \Omega \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} Z &= \frac{Z_R Z_L}{Z_R + Z_L} \\ &= \frac{(11,55)(j20)}{11,55 + j20} \\ &= \frac{231 \angle 90^\circ}{23,1 \angle 60^\circ} = 10 \angle 30^\circ \Omega \end{aligned}$$

que é a impedância original.

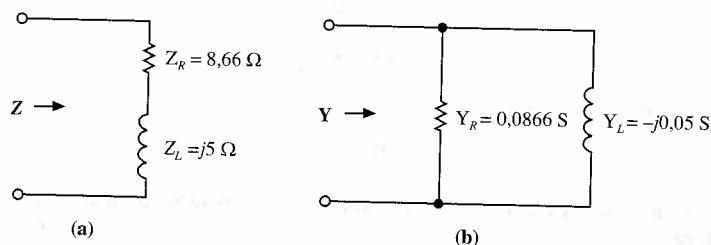


Figura 9.12 Circuitos equivalentes para impedância e admitância.

### Exemplo 9.17

Calcule a admitância equivalente  $Y_p$  para a rede da Figura 9.13 e utilize-a para determinar a corrente  $I$  se  $V_s = 60 \angle 45^\circ$  V.

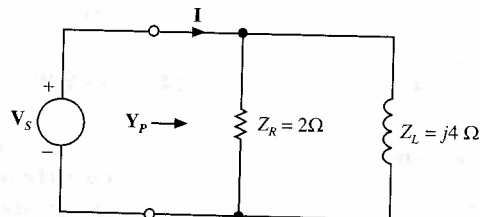


Figura 9.13 Exemplo de circuito em paralelo.

A partir da Figura 9.13, notamos que

$$\begin{aligned} Y_R &= \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{2} \text{ S} \\ Y_L &= \frac{1}{Z_L} = \frac{-j}{4} \text{ S} \end{aligned}$$



Portanto,

$$\mathbf{Y}_p = \frac{1}{2} - j\frac{1}{4} \text{ S}$$

e, desse modo,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{Y}_p \mathbf{V}_s \\ &= \left( \frac{1}{2} - j\frac{1}{4} \right) (60 \angle 45^\circ) \\ &= 33,6 \angle 18,43^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Esse resultado pode ser conferido rapidamente usando-se a impedância equivalente

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_p &= \frac{(2)(j4)}{2 + j4} \\ &= \frac{8j}{2 + j4} \\ &= \frac{8 \angle 90^\circ}{4,47 \angle 63,43^\circ} \\ &= 1,79 \angle 26,57^\circ \Omega \\ \mathbf{I} &= \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_p} \\ &= \frac{60 \angle 45^\circ}{1,79 \angle 26,57^\circ} \\ &= 33,6 \angle 18,43^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

o que, é claro, confere com nosso resultado. ■

### Exemplo 9.18

Calcule a impedância equivalente para o circuito da Figura 9.14 e utilize-a para determinar a tensão  $\mathbf{V}_s$ , caso a corrente seja  $\mathbf{I} = 10 \angle 30^\circ \text{ A}$ .

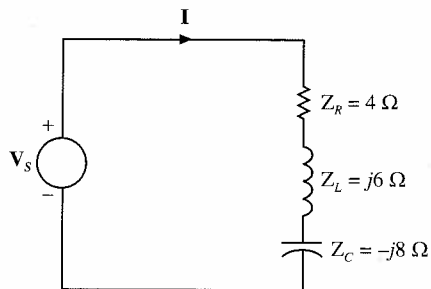


Figura 9.14 Exemplo de circuito em série.

Como mostrado na Figura 9.14,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_s &= \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C \\ &= 4 - j2 \Omega \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_s &= \mathbf{I} \mathbf{Z}_s \\ &= (4 - j2)(10 \angle 30^\circ) \\ &= (4,47 \angle -26,57^\circ)(10 \angle 30^\circ) \\ &= 44,7 \angle 3,43^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

## Exercícios

**E9.11** Determine a corrente  $\mathbf{I}$  na rede da Figura E9.11.

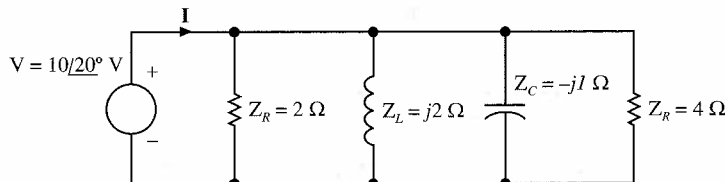


Figura E9.11

*Resp.:*  $\mathbf{I} = 9 \angle 53,7^\circ \text{ A}$ .

**E9.12** Determine a tensão sobre a fonte de corrente na rede da Figura E9.12.

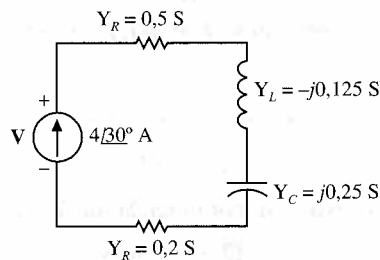


Figura E9.12

*Resp.:*  $\mathbf{V} = 32,4 \angle 59,7^\circ \text{ V}$ .

Como um prelúdio à análise de mais circuitos ac, vamos examinar as técnicas para cálculo de impedância e admitância de circuitos em que vários elementos passivos estão interconectados. O seguinte exemplo ilustra que nossa técnica está baseada simplesmente na sucessiva aplicação das equações 9.36, 9.37, 9.45 e 9.46. Esse procedimento é análogo aos cálculos de resistência equivalente desenvolvidos anteriormente.

## Exemplo 9.19

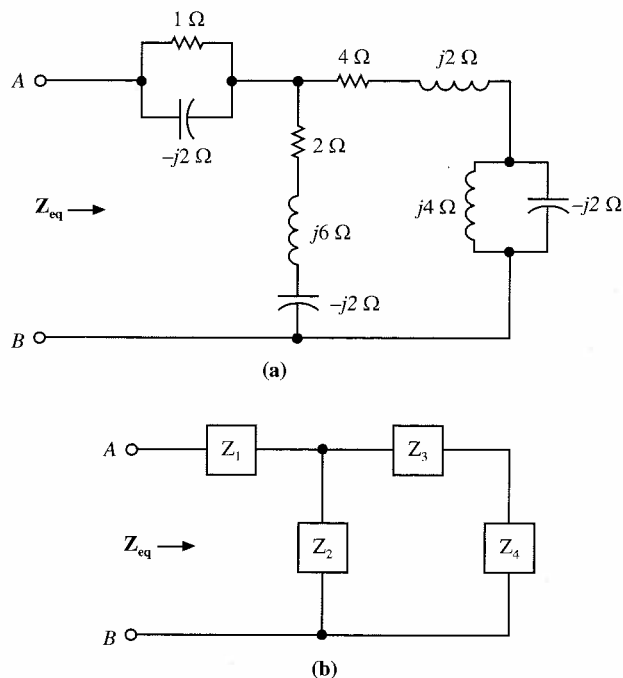
Considere a rede mostrada na Figura 9.15a. A impedância de cada elemento é dada na figura. Desejamos calcular a impedância equivalente da rede  $\mathbf{Z}_{eq}$  nos terminais A-B.

A impedância equivalente  $\mathbf{Z}_{eq}$  poderia ser calculada de variadas maneiras; poderíamos usar somente impedâncias, ou somente admitâncias, ou uma combinação das duas. Usaremos dois métodos para ilustrar as várias técnicas envolvidas. Começamos notando que o circuito da Figura 9.15a pode ser representado pelo circuito da Figura 9.15b. Utilizando estritamente o enfoque da impedância, notamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_4 &= \frac{(j4)(-j2)}{j4 - j2} \\ &= -j4 \Omega \end{aligned}$$

Uma vez que  $\mathbf{Z}_3 = 4 + j2 \Omega$ , então  $\mathbf{Z}_{34}$ , que é a combinação da impedância de  $\mathbf{Z}_3$  e  $\mathbf{Z}_4$ , é

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{34} &= 4 + j2 - j4 \\ &= 4 - j2 \Omega \end{aligned}$$



**Figura 9.15** Exemplo de circuitos para determinar a impedância equivalente.

A figura indica que

$$\begin{aligned} Z_2 &= 2 + j6 - j2 \\ &= 2 + j4 \, \Omega \end{aligned}$$

e portanto  $Z_{234}$ , que é a impedância resultante da combinação de  $Z_2$ ,  $Z_3$  e  $Z_4$ , é

$$\begin{aligned} Z_{234} &= \frac{(2 + j4)(4 - j2)}{(2 + j4) + (4 - j2)} \\ &= \frac{16 + j12}{6 + j2} \, \Omega \end{aligned}$$

Se multiplicarmos o numerador e o denominador por  $6 - j2$  e executarmos a álgebra indicada, obtemos

$$Z_{234} = 3 + j1 \, \Omega$$

A partir da figura

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{(1)(-j2)}{1 - j2} \\ &= \frac{4}{5} - j\frac{2}{5} \, \Omega \end{aligned}$$

Portanto, se  $Z_{1234}$  é a impedância resultante da combinação de  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  e  $Z_4$  então

$$\begin{aligned} Z_{eq} = Z_{1234} &= 3 + j1 + \frac{4}{5} - j\frac{2}{5} \\ &= 3,8 + j0,6 \, \Omega \end{aligned}$$

Poderíamos também obter o mesmo resultado usando tanto a impedância como a admitância, como ilustrado a seguir.

$$\begin{aligned}
 Y_4 &= Y_L + Y_C \\
 &= \frac{1}{j4} + \frac{1}{-j2} \\
 &= j\frac{1}{4} \text{ S}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$Z_4 = -j4 \Omega$$

Agora

$$\begin{aligned}
 Z_{34} &= Z_3 + Z_4 \\
 &= (4 + j2) + (-j4) \\
 &= 4 - j2 \Omega
 \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
 Y_{34} &= \frac{1}{Z_{34}} \\
 &= \frac{1}{4 - j2} \\
 &= 0,20 + j0,10 \text{ S}
 \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
 Z_2 &= 2 + j6 - j2 \\
 &= 2 + j4 \Omega
 \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
 Y_2 &= \frac{1}{2 + j4} \\
 &= 0,10 - j0,20 \text{ S} \\
 Y_{234} &= Y_2 + Y_{34} \\
 &= 0,30 - j0,10 \text{ S}
 \end{aligned}$$

O leitor deve ter o cuidado de notar esse procedimento – estamos somando impedâncias em série e somando admitâncias em paralelo.

A partir de  $Y_{234}$  podemos calcular  $Z_{234}$  como

$$\begin{aligned}
 Z_{234} &= \frac{1}{Y_{234}} \\
 &= \frac{1}{0,30 - j0,10} \\
 &= 3 + j1 \Omega
 \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= Y_R + Y_C \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{-j2} \\
 &= 1 + j\frac{1}{2} \text{ S}
 \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}} \\ &= 0,8 - j0,4 \, \Omega \end{aligned}$$

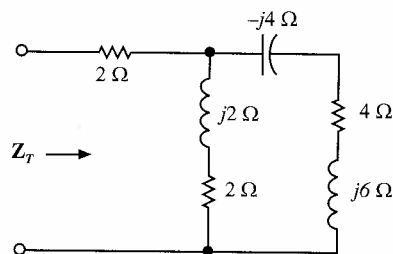
Portanto,

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= Z_1 + Z_{234} \\ &= 0,8 - j0,4 + 3 + j1 \\ &= 3,8 + j0,6 \, \Omega \end{aligned}$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido usando-se o enfoque da impedância. ■

### Exercício

**E9.13** Calcule a impedância  $Z_T$  na rede da Figura E9.13.



**Figura E9.13**

**Resp.:**  $Z_T = 3,38 + j1,08 \, \Omega$ .

As transformações Y-delta e delta-Y anteriormente apresentadas para resistências são também válidas para impedância no domínio da frequência. Portanto, as impedâncias mostradas na Figura 9.16 estão relacionadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ Z_b &= \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ Z_c &= \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \end{aligned} \quad (9.47)$$

e

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_c} \\ Z_2 &= \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_b} \\ Z_3 &= \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_a} \end{aligned} \quad (9.48)$$

Essas equações são relacionamentos gerais e se aplicam, portanto, a qualquer conjunto de impedâncias conectadas em uma configuração Y ou delta.

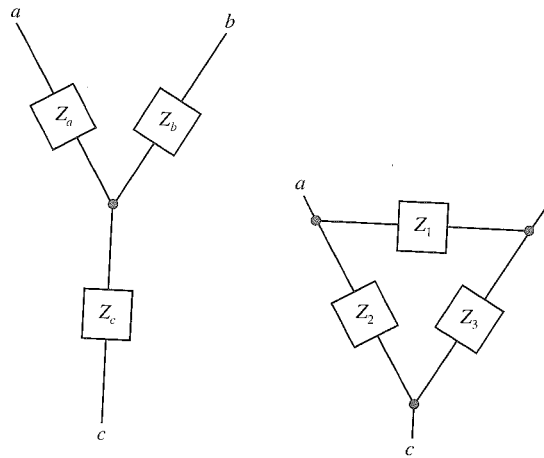


Figura 9.16 Configurações de rede Y e delta.

**Exemplo 9.20**

Vamos determinar a impedância  $Z_{eq}$  nos terminais A-B da rede da Figura 9.17a.

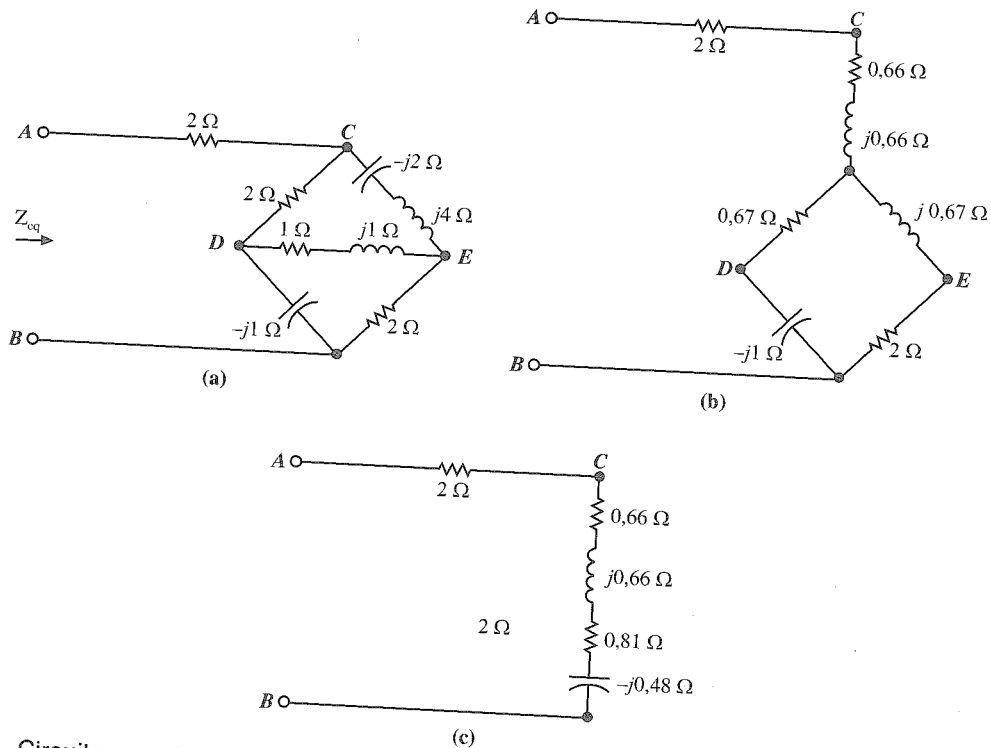


Figura 9.17 Circuitos usados no Exemplo 9.20.

Para simplificar a rede, devemos converter um dos deltas da Figura 9.17a em um Y. Se selecionarmos o delta definido pelos pontos C, D e E, as impedâncias do Y correspondente são calculadas da Equação 9.47 como

$$\frac{(2)(-j2 + j4)}{2 - j2 + j4 + 1 + j1} = \frac{2(j2)}{3 + j3} = 0,66 + j0,66 \Omega$$

$$\frac{(2)(1 + j1)}{3 + j3} = 0,67 \Omega$$

$$\frac{(-j2 + j4)(1 + j1)}{3 + j3} = j0,67 \Omega$$

e mostradas na Figura 9.17b. Se agora combinarmos as duas impedâncias em paralelo, obtemos

$$\frac{(0,67 - j1)(2 + j0,67)}{0,67 - j1 + 2 + j0,67} = 0,81 - j0,48 \, \Omega$$

que se reduz à rede mostrada na Figura 9.17c. Assim, a impedância equivalente é

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= 2 + 0,66 + j0,66 + 0,81 - j0,48 \\ &= 3,47 + j0,18 \, \Omega \end{aligned}$$

### Exercício

**E9.14** Determine  $Z_{eq}$  nos terminais A-B da rede mostrada na Figura E9.14.

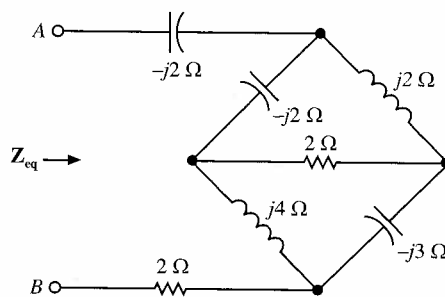


Figura E9.14

*Resp.:*  $Z_{eq} = 4 - j4 \, \Omega$ .

### Exemplo 9.21

Desejamos calcular a tensão  $V_o$  na rede da Figura 9.18.

Utilizando os resultados do Exemplo 9.20, achamos que a fonte de corrente é

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{12/0^\circ}{3,47 + j0,18} \\ &= 3,45 \angle -2,97^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

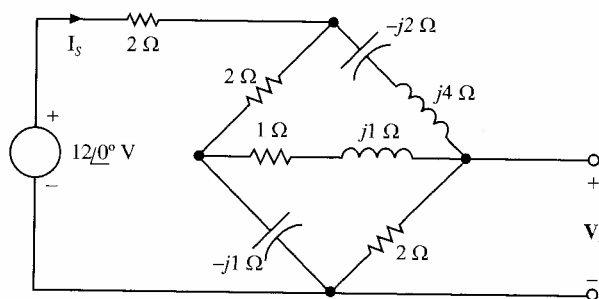


Figura 9.18 Circuito usado no Exemplo 9.21.

Empregando-se divisão de corrente, a corrente no resistor de  $2 \, \Omega$  conectado de E a B na Figura 9.17b é

$$\begin{aligned} I_{2\Omega} &= \frac{(3,45 \angle -2,97^\circ)(0,67 - j1)}{2,67 - j0,33} \\ &= 1,54 \angle -52,1^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V_o &= (1,54 \angle -52,1^\circ)(2) \\ &= 3,08 \angle -52,1^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Impedância e admitância são funções da frequência, e portanto esses valores mudam à medida que a frequência muda. Tais mudanças em  $Z$  e  $Y$  têm um efeito resultante nas relações tensão-corrente da rede. Esse impacto de mudanças em frequência nos parâmetros do circuito podem ser facilmente vistos via um diagrama de fasores. Os exemplos a seguir nos servirão para ilustrar tais pontos.

### Exemplo 9.22

Considere o circuito mostrado na Figura 9.19. As variáveis pertinentes estão marcadas na figura. Para montar o diagrama de fasores convenientemente, selecionamos  $V$  como um fasor de referência e atribuímos arbitrariamente a ele um ângulo de fase  $0^\circ$ . Iremos, portanto, medir todas as correntes em relação a esse fasor. Não perdemos nenhuma informação atribuindo  $0^\circ$  ao ângulo de fase de  $V$ , uma vez que, se ele for na realidade, por exemplo,  $30^\circ$ , iremos simplesmente rodar todo o diagrama de fasores de  $30^\circ$  porque todas as correntes são medidas em relação a tal fasor.

No nó superior no circuito, a LKC é

$$I_s = I_R + I_L + I_C = \frac{V}{R} + \frac{V}{j\omega L} + \frac{V}{1/j\omega C}$$

Uma vez que  $V = V_M \angle 0^\circ$ , então

$$I_s = \frac{V_M \angle 0^\circ}{R} + \frac{V_M \angle -90^\circ}{\omega L} + V_M \omega C \angle 90^\circ$$

O diagrama de fasores que ilustra a relação de fases entre  $V$ ,  $I_R$ ,  $I_L$  e  $I_C$  é mostrado na Figura 9.20a. Para valores pequenos de  $\omega$ , tais como a magnitude de  $I_L$  ser maior do que a de  $I_C$ , o diagrama de fasores para as correntes é mostrado na Figura 9.20b. No caso de valores grandes de  $\omega$ , isto é, aqueles em que  $I_C$  é maior que  $I_L$ , o diagrama de fasores para as correntes é mostrado na Figura 9.20c. Note que, à medida que  $\omega$  cresce, o fasor de  $I_s$  se move de  $I_{s1}$  para  $I_{s2}$  ao longo de um lugar de pontos especificados pela linha pontilhada mostrada na Figura 9.20d.

Note que  $I_s$  está em fase com  $V$  quando  $I_C = I_L$  ou, em outras palavras, quando  $\omega L = 1/\omega C$ . Daí a tensão nodal  $V$  estará em fase com a fonte de corrente  $I_s$  quando

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Isto pode também ser visto a partir da equação LKC

$$I_s = \left[ \frac{1}{R} + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] V$$

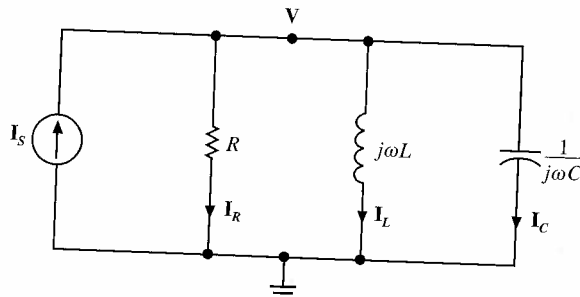


Figura 9.19 Exemplo de circuito em paralelo.





então

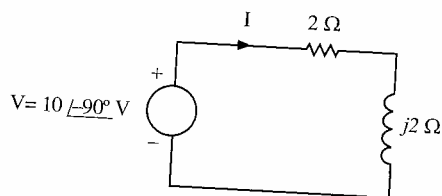
$$v_s(t) = 12\sqrt{2} \cos(377t + 90^\circ) \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{12\sqrt{2} \angle 90^\circ}{4 + j6 - j2} \\ &= \frac{12\sqrt{2} \angle 90^\circ}{4 \angle 45^\circ} \\ &= 3 \angle 45^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

e o diagrama de fasores completo, como mostrado na Figura 9.21b e c, é rotacionado de  $45^\circ$  como mostrado na Figura 9.21d.

### Exercícios

**E9.15** Desenhe um diagrama de fasores ilustrando todas as correntes e tensões para a rede da Figura E9.15.



Resp.:

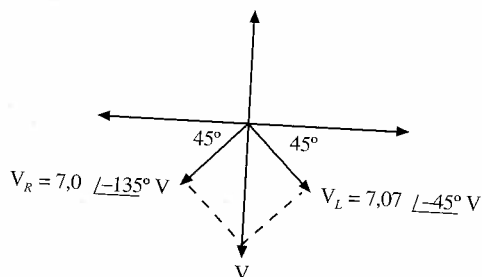
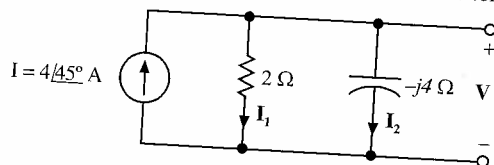


Figura E9.15

**E9.16** Desenhe um diagrama de fasores ilustrando todas as correntes e tensões para a rede da Figura E9.16.



Resp.:

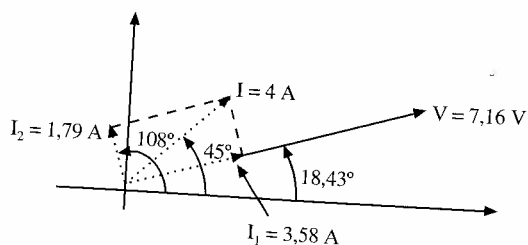


Figura E9.16

## 9.6 Análise Básica Utilizando as Leis de Kirchhoff

Temos mostrado que as leis de Kirchhoff se aplicam no domínio da frequência e, portanto, elas podem ser usadas para computar as tensões e correntes em circuitos ac. Esse enfoque envolve expressar essas tensões e correntes como fasores e, uma vez que isto tenha sido feito, a análise ac em estado estacionário empregando-se as equações de fasores é executada de uma maneira idêntica àquela usada na análise dc de circuitos resistivos. Álgebra de números complexos é a ferramenta usada para a manipulação matemática de equações de fasores, que, é claro, têm coeficientes complexos. Começaremos ilustrando que as técnicas que temos aplicado na solução de circuitos dc resistivos são válidas na análise de circuitos ac também – a única diferença é que, na análise de circuitos ac em regime permanente, as equações algébricas de fasores têm coeficientes complexos. O programa PSPICE para análise de circuitos pode também ser aplicado para analisar circuitos ac, o que será apresentado aqui e no Capítulo 10.

### Exemplo 9.24

Desejamos calcular todas as tensões e correntes no circuito mostrado na Figura 9.22. Nosso método será o seguinte. Calcularemos a impedância total vista pela fonte  $V_s$ , e ela então será usada para determinar  $I_1$ . Conhecendo-se  $I_1$ , podemos calcular  $V_1$  utilizando a LKT. De posse de  $V_1$ , podemos calcular  $I_2$  e  $I_3$ , e assim por diante.

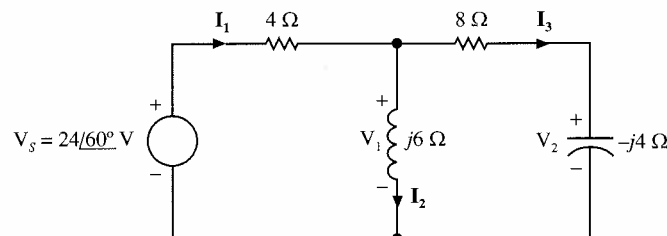


Figura 9.22 Exemplo de circuito ac.

A impedância total vista pela fonte  $V_s$  é

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= 4 + \frac{(j6)(8 - j4)}{j6 + 8 - j4} \\ &= 4 + \frac{24 + j48}{8 + j2} \\ &= 4 + 4,24 + j4,94 \\ &= 9,61/30,94^\circ \Omega \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{24/60^\circ}{9,61/30,94^\circ} \\ &= 2,5/29,06^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$V_1$  pode ser determinado usando a LKT:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_s - 4I_1 \\ &= 24/60^\circ - 10/29,06^\circ \\ &= 3,26 + j15,92 = 16,25/78,43^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Note que  $V_1$  pode também ser calculado a partir da divisão de tensão:

$$V_1 = \frac{V_s \frac{(j6)(8-j4)}{j6+8-j4}}{4 + \frac{(j6)(8-j4)}{j6+8-j4}} V$$

que, de nossos cálculos anteriores, é

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{(24/\underline{60^\circ})(6,51/\underline{49,39^\circ})}{9,61/\underline{30,49^\circ}} \\ &= 16,25/\underline{78,43^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

Conhecendo-se  $V_1$ , podemos calcular  $I_2$  e  $I_3$ :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{V_1}{j6} = \frac{16,25/\underline{78,43^\circ}}{6/\underline{90^\circ}} \\ &= 2,71/\underline{-11,56^\circ} \text{ A} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{V_1}{8-j4} \\ &= 1,82/\underline{105^\circ} \text{ A} \end{aligned}$$

Note que  $I_2$  e  $I_3$  poderiam também ter sido calculadas por divisão de corrente. Por exemplo,  $I_2$  poderia ter sido determinada por

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{I_1(8-j4)}{8-j4+j6} \\ &= \frac{(2,5/\underline{29,06^\circ})(8,94/\underline{-26,57^\circ})}{8+j2} \\ &= 2,71/\underline{-11,56^\circ} \text{ A} \end{aligned}$$

Finalmente,  $V_2$  pode ser calculada como

$$\begin{aligned} V_2 &= I_3(-j4) \\ &= 7,28/\underline{15^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

Esse valor poderia também ter sido calculado por divisão de tensão. O diagrama de fasores para as correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  é mostrado na Figura 9.23 e é uma ilustração da LKC. ■

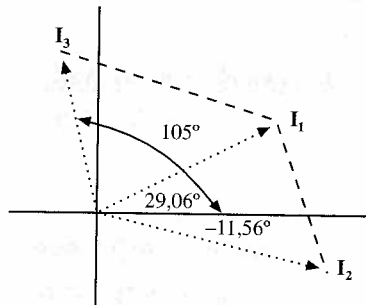


Figura 9.23 Diagrama de fasores para as correntes no Exemplo 9.24.

### Exemplo 9.25

Se a corrente no resistor de  $4 \Omega$  na Figura 9.24 for  $I_4 = 3 \underline{45^\circ} \text{ A}$ , calcule o valor da fonte de tensão  $V_s$ .

Uma vez que  $I_4 = 3 \angle 45^\circ$  A, então

$$\begin{aligned} V_2 &= 4I_4 \\ &= 12 \angle 45^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{V_2}{8 + j5 - j2} \\ &= 1,41 \angle 24,44^\circ = 1,28 + j0,58 \text{ A} \end{aligned}$$

Empregando a LKC, tem-se

$$\begin{aligned} I_3 &= I_4 + I_5 \\ &= 2,12 + j2,12 + 1,28 + j0,58 \\ &= 3,40 + j2,70 = 4,34 \angle 38,45^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$V_1$  pode também ser calculada usando-se a LKT:

$$\begin{aligned} V_1 &= I_3(5 + j2) + V_2 \\ &= (4,34 \angle 38,45^\circ)(5,39 \angle 21,8^\circ) + 12 \angle 45^\circ \\ &= 20,10 + j28,80 = 35,12 \angle 55,09^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

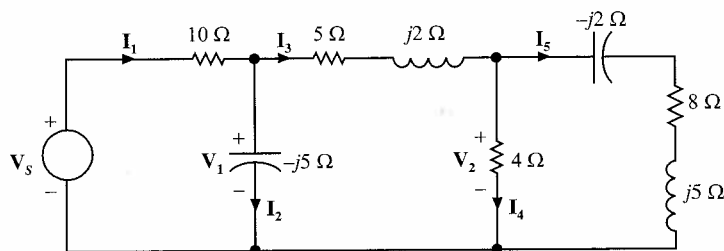


Figura 9.24 Exemplo de circuito ac.

$I_2$  pode agora ser calculada como

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{V_1}{-j5} \\ &= 7,02 \angle 145,09^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$I_1$  pode ser calculada a partir da LKC:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ &= 7,02 \angle 145,09^\circ + 4,34 \angle 38,45^\circ \\ &= -2,36 + j6,72 = 7,12 \angle 109,35^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$V_s$  é então calculada usando-se a LKT:

$$\begin{aligned} V_s &= 10I_1 + V_1 \\ &= 71,2 \angle 109,35^\circ + 35,12 \angle 55,09^\circ \\ &= -3,5 + j96 = 96,06 \angle 92,09^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Note que estes são exatamente o mesmo tipo de cálculos feitos anteriormente na análise de circuitos resistivos dc sem o uso de números complexos.

Conferindo rapidamente nossos cálculos, vamos examinar a LKT ao longo de todo o laço externo:

$$\begin{aligned} V_s - 10I_1 - (5 + j2)I_3 - (8 + j3)I_5 &= 0 \\ -3,5 + j96 + 23,60 - j67,20 - 11,61 - j20,31 - 8,49 - j8,49 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

o que indica que nossos cálculos estão corretos. ■

### Exercícios

**E9.17** Determine as correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  na rede da Figura E9.17.

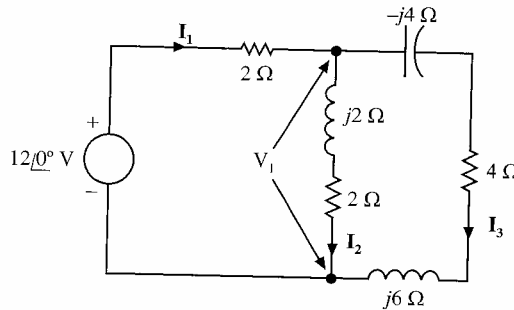


Figura E9.17

**Resp.:**  $I_1 = 3,38 \angle -17,7^\circ$  A,  $I_2 = 2,1 \angle -24,7^\circ$  A,  $I_3 = 1,33 \angle -6,3^\circ$  A.

**E9.18** Na rede da Figura E9.18,  $V_o$  é  $8 \angle 45^\circ$ . Calcule  $V_s$ .

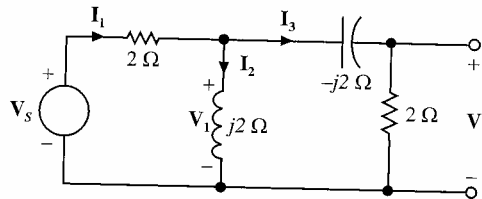


Figura E9.18

**Resp.:**  $V_s = 17,88 \angle -18,45^\circ$  V.

## 9.7 Uso de Fasores em Circuitos com Amplificadores Operacionais

As equações de fasores que regem a operação do amp-op são idênticas àquelas no domínio do tempo. Portanto, as técnicas de análise que apresentamos nos capítulos anteriores são também válidas em circuitos amp-op ac.

### Exemplo 9.26

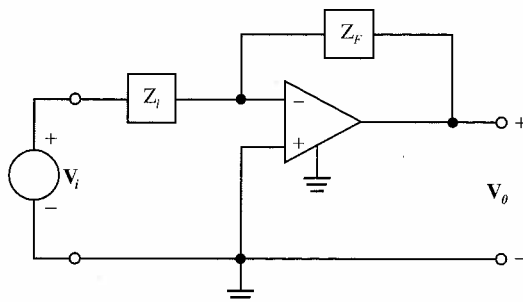
Queremos derivar o relacionamento entrada-saída no domínio da frequência para o amp-op mostrado na Figura 9.25, e então determinar a tensão de saída quando o circuito é um diferenciador (ou seja,  $Z_i = 1/j\omega C_i$  e  $Z_F = R_F$ ) ou um integrador (ou seja,  $Z_i = R_i$  e  $Z_F = 1/j\omega C_F$ ).

Utilizando as características do amp-op descritas no Capítulo 3, descobrimos que a equação de fasores LKC na entrada do amp-op é

$$\frac{V_i}{Z_i} + \frac{V_o}{Z_F} = 0$$

Portanto,

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_F}{Z_i}$$



**Figura 9.25** Circuito amplificador operacional ac.

Para uma configuração diferenciadora,  $Z_F = R_F$  e  $Z_i = 1/j\omega C_i$ , e desse modo

$$V_o = j\omega C_i R_F V_i$$

No caso integrador,  $Z_F = 1/j\omega C_F$  e  $Z_i = R_i$ , e portanto

$$V_o = \frac{-V_i}{j\omega C_F R_i}$$

Tais relacionamentos são bastante úteis em circuitos de fasores contendo diferenciadores e integradores. Além disso, logo o leitor verá que diferenciação no domínio do tempo é equivalente a multiplicar por  $j\omega$  no domínio da frequência, e integração no domínio do tempo é equivalente a dividir por  $j\omega$  no domínio da frequência.

## 9.8 Resumo

Foi mostrado neste capítulo que o método de solução para circuitos ac envolve uma análise no domínio da frequência. Um conjunto de equações diferenciais com funções de excitação senoidal no domínio do tempo foi transformado em um conjunto de equações algébricas com coeficientes complexos no domínio da frequência. O método de fasores foi introduzido e relações fasoriais foram estabelecidas para os elementos de circuito. Equações algébricas no domínio da frequência envolvendo as variáveis desconhecidas do circuito foram resolvidas usando-se a técnica de fasores.

Impedância e admitância foram introduzidas e usadas em conjunto com fasores para resolver circuitos ac contendo uma única fonte. A técnica da solução está baseada nos seguintes fatos: (1) leis de Kirchhoff se mantêm para fasores de correntes e de tensão, e (2) para uma impedância  $Z$ , sua tensão e corrente estão relacionadas por  $V = IZ$ .

### Pontos-Chave

- A função senoidal  $x(t) = X_M \sin(\omega t + \theta)$  tem uma amplitude de  $X_M$ , uma frequência de  $\omega$  radianos por segundo, um período de  $2\pi/\omega$  e um ângulo de fase de  $\theta$ .
- Se  $x_1(t) = X_{M1} \sin(\omega t + \theta)$  e  $x_2(t) = X_{M2} \sin(\omega t + \phi)$ ,  $x_1(t)$  está adiantada em relação a  $x_2(t)$  de  $\theta - \phi$  radianos e  $x_2(t)$  está atrasada em relação a  $x_1(t)$  de  $\theta - \phi$  radianos.
- Quando se compara uma função senoidal com outra da mesma frequência para se determinar a diferença de fase, é necessário expressar ambas as funções em senos ou cossenos com amplitudes positivas.
- A tensão senoidal  $v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta)$  pode ser escrita de forma exponencial como  $v(t) = \text{Re}[V_M e^{j(\omega t + \theta)}]$  e em forma de fasor como  $V = V_M \angle \theta$ .
- Se  $\theta_v$  e  $\theta_i$  representam os ângulos de fase da tensão sobre e a corrente através de um elemento do circuito, então  $\theta_i = \theta_v$  se um elemento for um resistor,  $\theta_i$  estará atrasada em relação a  $\theta_v$  de  $90^\circ$  se o elemento for um indutor,  $\theta_i$  estará adiantada em relação a  $\theta_v$  de  $90^\circ$  se o elemento for um capacitor.

- Impedância,  $Z$ , é definida como a razão entre o fasor de tensão,  $V$ , e o fasor de corrente,  $I$ , onde  $Z = R$  para um resistor,  $Z = j\omega L$  para um indutor e  $Z = 1/j\omega C$  para um capacitor.
- $Z$  e  $Y$  são funções da frequência, e portanto seus valores mudam à medida que a frequência muda.
- A LKC e a LKT se aplicam ao domínio da frequência.

### Problemas

- 9.1 Determine a posição relativa das duas curvas seno abaixo.

$$v_1(t) = 12 \sin(377t - 45^\circ)$$

$$v_2(t) = 6 \sin(377t + 675^\circ)$$

- 9.2 Duas tensões são dadas pelas equações

$$v_1(t) = 100 \sin(377t - 210^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = -50 \sin(377t - 285^\circ) \text{ V}$$

Determine o ângulo de fase entre  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ .

- 9.3 Dadas as seguintes correntes:

$$i_1(t) = 4 \sin(377t - 10^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = -2 \cos(377t - 195^\circ) \text{ A}$$

$$i_3(t) = -1 \sin(377t - 250^\circ) \text{ A}$$

Determine o ângulo de fase entre cada par de correntes.

- 9.4 Determine os ângulos de fase com os quais  $v_1(t)$  está adiantada em relação à  $i_1(t)$  e  $v_1(t)$  adiantada em relação à  $i_2(t)$ , onde

$$v_1(t) = 4 \sin(377t + 25^\circ)$$

$$i_1(t) = 0,05 \cos(377t - 10^\circ)$$

$$i_2(t) = -0,1 \sin(377t + 75^\circ)$$

- 9.5 Expresse os seguintes fasores em funções cosseno com uma frequência de 60 Hz.

(a)  $V_1 = 24 \angle -45^\circ \text{ V}$ .

(b)  $V_2 = 10 \angle 120^\circ \text{ V}$ .

- 9.6 Converta as seguintes tensões em fasores no domínio da frequência.

(a)  $v_1(t) = 12 \cos(2\pi 400t + 60^\circ) \text{ V}$ .

(b)  $v_2(t) = 6 \sin(2\pi 400t - 20^\circ) \text{ V}$ .

- 9.7 Calcule a corrente no resistor da Figura P9.7, caso a tensão de entrada seja

(a)  $v_1(t) = 10 \cos(377t + 180^\circ) \text{ V}$ .

(b)  $v_2(t) = 12 \sin(377t + 45^\circ) \text{ V}$ .

Determine as respostas nos domínios do tempo e da frequência.

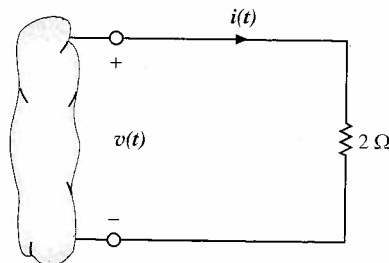


Figura P9.7

- 9.8 Calcule a corrente no capacitor mostrado na Figura P9.8, caso a tensão de entrada seja

(a)  $v_1(t) = 16 \cos(377t - 22^\circ) \text{ V}$ .

(b)  $v_2(t) = 8 \sin(377t + 64^\circ) \text{ V}$ .

Determine as respostas nos domínios do tempo e da frequência.



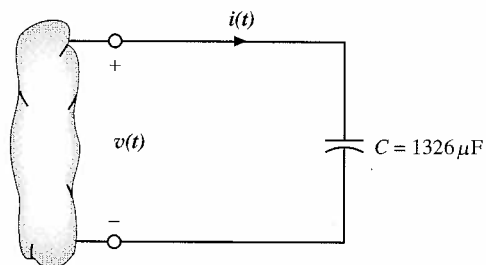


Figura P9.8

9.9 Calcule a corrente no indutor mostrado na Figura P9.9, caso a tensão de entrada seja

(a)  $v_1(t) = 24 \cos(377t + 12^\circ) \text{ V}$ .

(b)  $v_2(t) = 18 \sin(377t - 48^\circ) \text{ V}$ .

Determine as respostas nos domínios do tempo e da frequência.

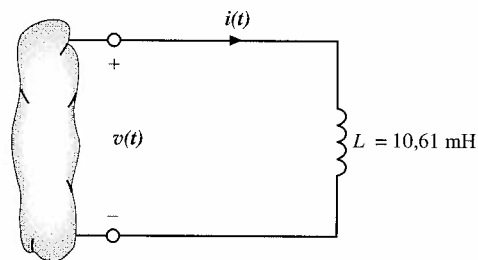


Figura P9.9

9.10 Calcule a impedância equivalente nos terminais A-B no circuito mostrado na Figura P9.10.

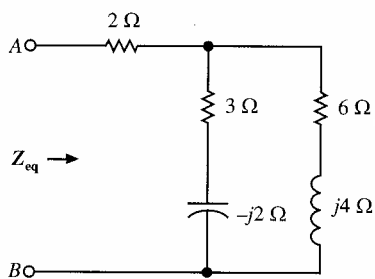


Figura P9.10

9.11 Calcule  $Z_T$  na rede da Figura P9.11.

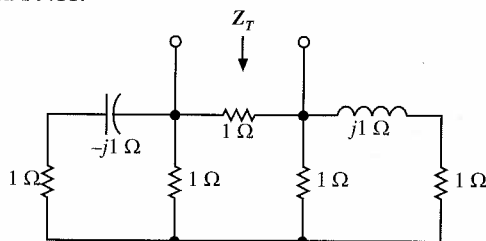


Figura P9.11

- 9.12 Na rede da Figura P9.12, determine  $Z(j\omega)$  na frequência de 60 Hz.

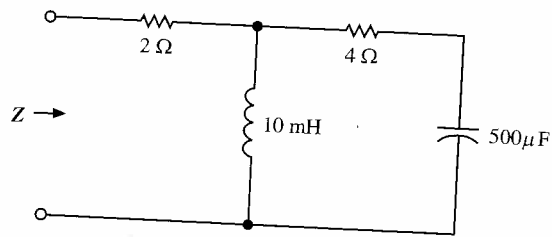


Figura P9.12

- 9.13 Na Europa, a rede elétrica opera a uma frequência de 50 Hz. Determine  $Z(j\omega)$  no Problema 9.12 a  $f = 50$  Hz.
- 9.14 Calcule  $Z(j\omega)$  na rede da Figura P9.14.

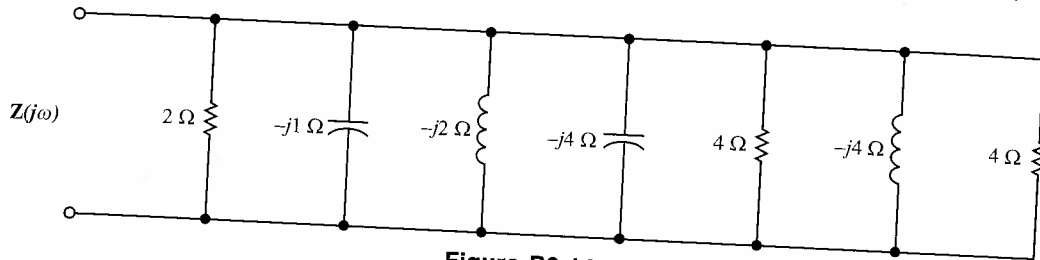


Figura P9.14

- 9.15 Calcule  $Y(j\omega)$  na rede da Figura P9.15.

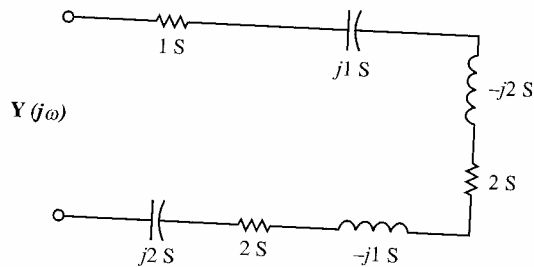


Figura P9.15

- 9.16 Calcule  $Y_{eq}$  como mostrado na Figura P9.16.

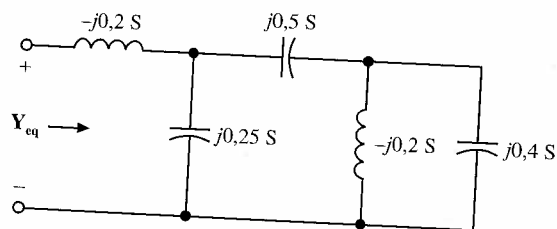


Figura P9.16

- 9.17 Determine  $Z(j\omega)$  na rede da Figura P9.17.

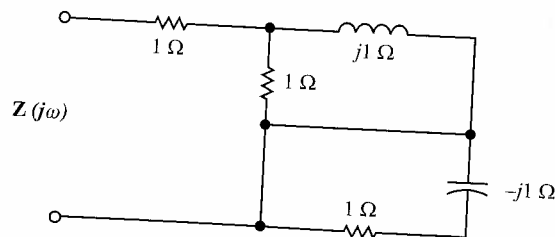


Figura P9.17

9.18 Determine  $Z(j\omega)$  na rede da Figura P9.18.

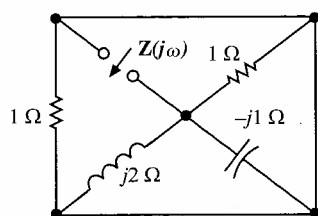


Figura P9.18

9.19 Determine  $Z_T(j\omega)$  na rede da Figura P9.19.

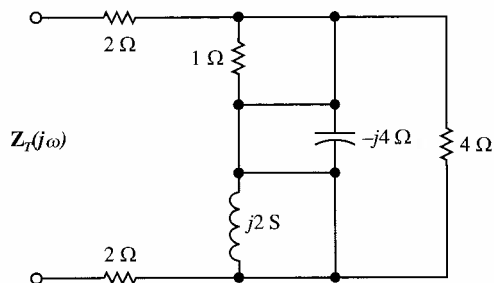


Figura P9.19

9.20 Determine  $Z(j\omega)$  na rede da Figura P9.20.

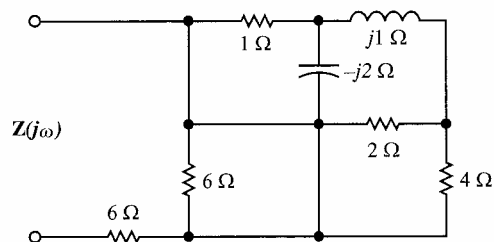


Figura P9.20

9.21 Determine  $Z(j\omega)$  na rede da Figura P9.21.

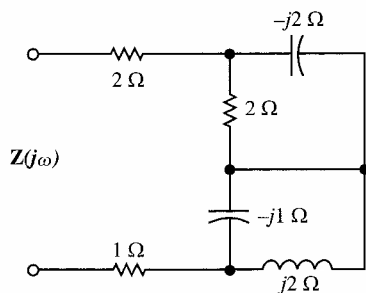


Figura P9.21

9.22 Determine  $Z(j\omega)$  na rede da Figura P9.22.

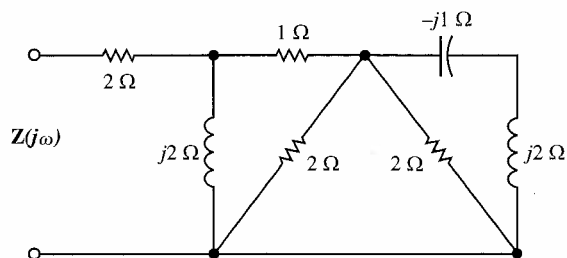


Figura P9.22

9.23 Determine  $Z_T$  na rede da Figura P9.23.

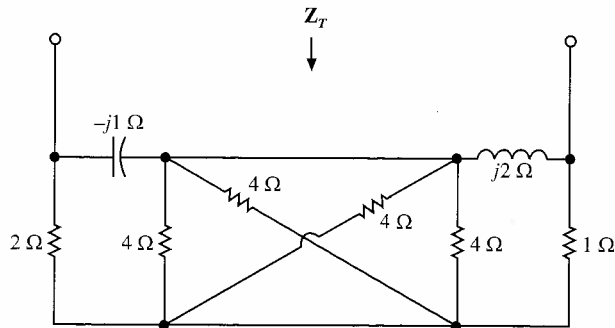


Figura P9.23

9.24 No circuito mostrado na Figura P9.24, determine o valor da indutância tal que a corrente esteja em fase com a fonte de tensão.

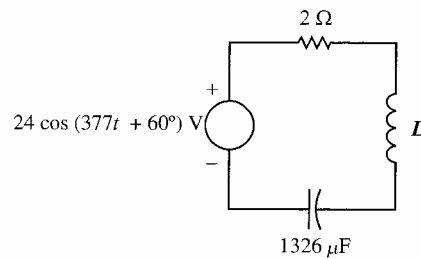


Figura P9.24

9.25 Determine  $I_1$  e  $V_o$  na rede da Figura P9.25.

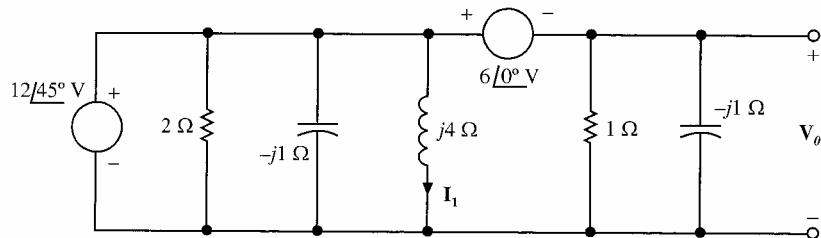


Figura P9.25

9.26 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P9.26.

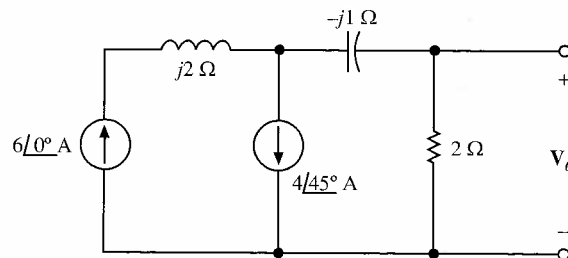


Figura P9.26

- 9.27 Usando  $V_S$  como referência, trace o diagrama fasorial para todas as tensões e correntes da Figura P9.27.

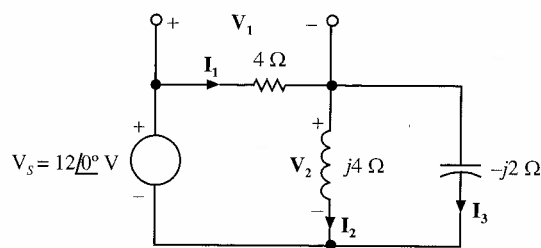


Figura P9.27

- 9.28 Na rede da Figura P9.28, determine  $V_o$  e trace o diagrama fasorial para as correntes.

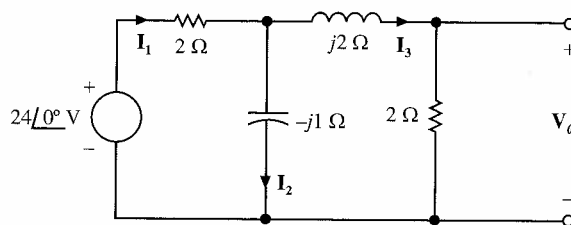


Figura P9.28

- 9.29 Dada a rede da Figura P9.29, trace os diagramas fasoriais para todas as tensões e correntes.

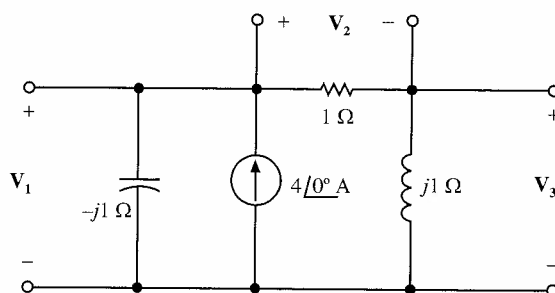


Figura P9.29

- 9.30 Dada a rede da Figura P9.30, trace os diagramas fasoriais para (a) as correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  e (b) as correntes  $I_3$ ,  $I_4$  e  $I_5$ .

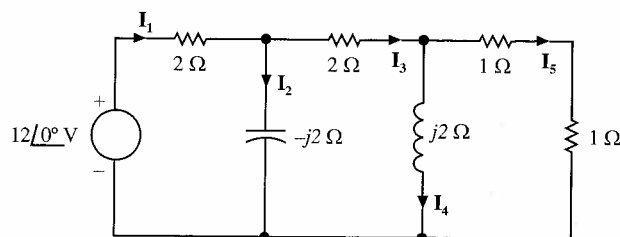


Figura P9.30

- 9.31 Calcule todas as correntes no circuito mostrado na Figura P9.31.

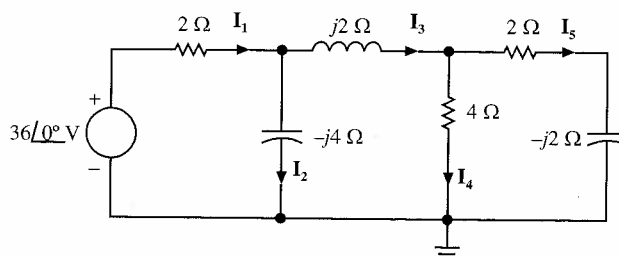


Figura P9.31

9.32 Determine  $I_o$  na rede da Figura P9.32.

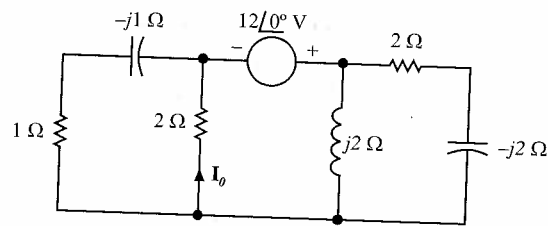


Figura P9.32

9.33 Determine  $I_o$  na rede da Figura P9.33.

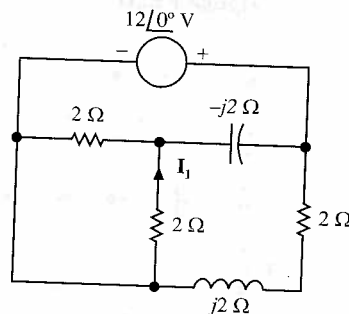


Figura P9.33

9.34 Determine  $V_o$  na rede da Figura P9.34.

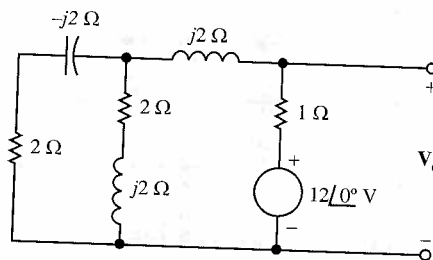


Figura P9.34

9.35 Determine  $I_o$  na rede da Figura P9.35.

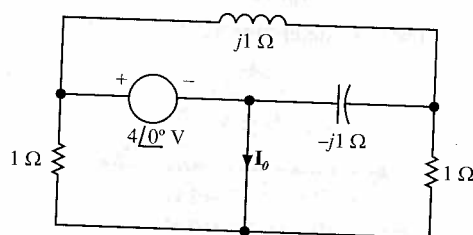


Figura P9.35

9.36 Determine  $I_o$  na rede da Figura P9.36.

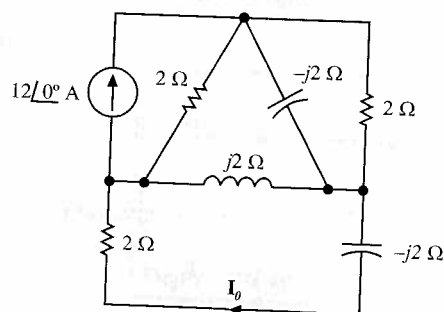


Figura P9.36

9.37 Determine  $I_o$  na rede da Figura P9.37.

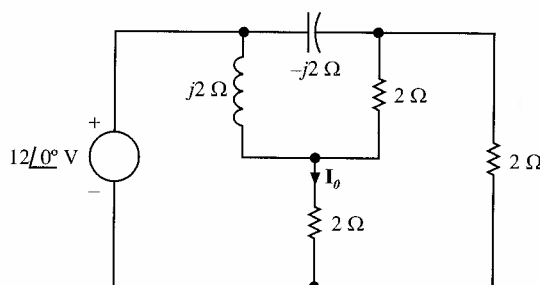


Figura P9.37

9.38 Determine  $I_o$  na rede da Figura P9.38.

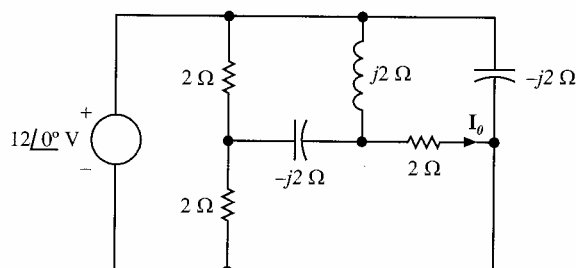


Figura P9.38

9.39 Determine  $I_o$  na rede da Figura P9.39.

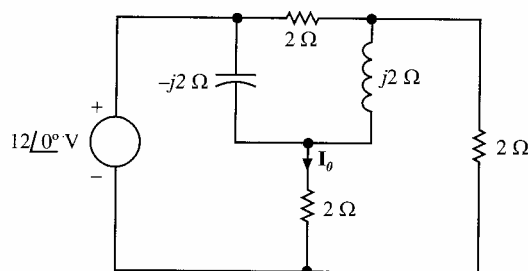


Figura P9.39

9.40 Na rede da Figura P9.40, se  $V_x = 4 \angle 45^\circ$  V, determine  $I_o$ .

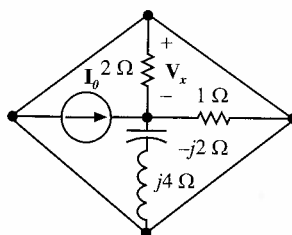


Figura P9.40

9.41 Determine  $I_o$  na rede da Figura P9.41.

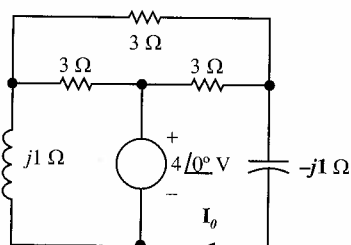


Figura P9.41

9.42 Determine  $V_o$  na rede da Figura P9.42.

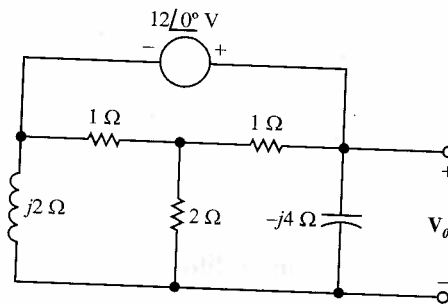


Figura P9.42

9.43 Determine  $V_o$  na rede da Figura P9.43.

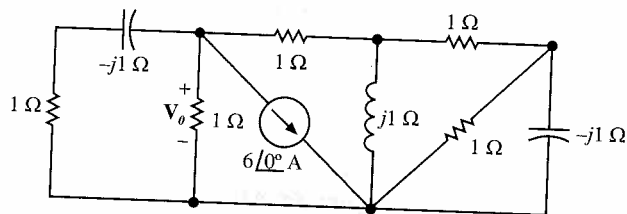


Figura P9.43

9.44 Determine  $V_o$  na rede da Figura P9.44.

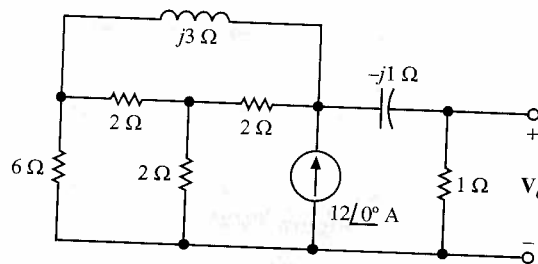


Figura P9.44

9.45 No circuito da Figura P9.45, se  $V_o = 4 \angle 45^\circ$  V, determine  $I_1$ .

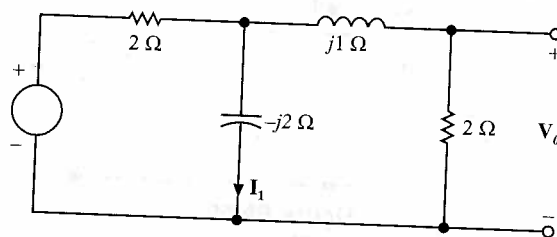


Figura P9.45

9.46 Determine  $V_x$  na rede da Figura P9.46.

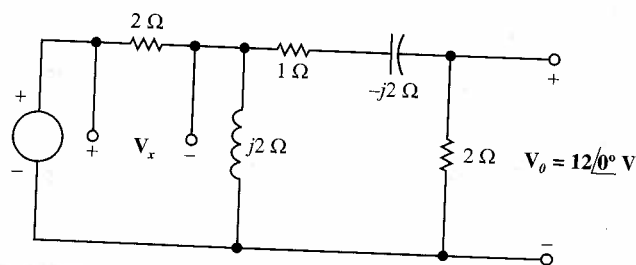


Figura P9.46



9.47 Determine  $I_x$  no circuito da Figura P9.47.

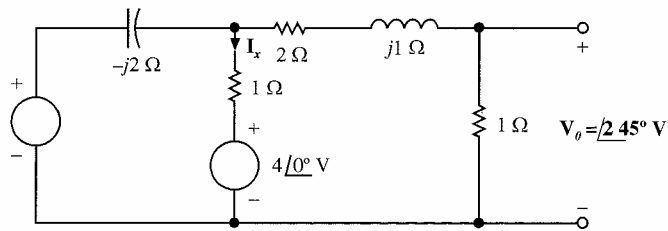


Figura P9.47

9.48 Determine  $V_S$  no circuito da Figura P9.48,  $I_1 = 2 \angle 0^\circ$  A.

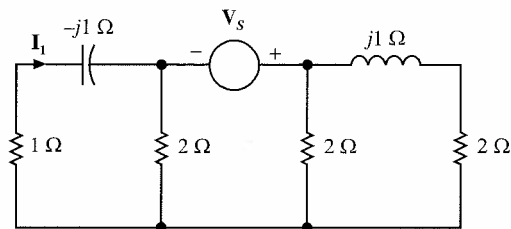


Figura P9.48

9.49 Determine  $V_S$  na rede da Figura P9.49, caso  $V_1 = 4 \angle 0^\circ$  V.

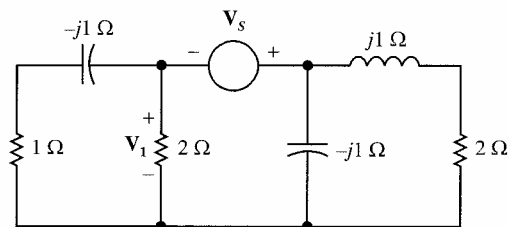


Figura P9.49

9.50 Na rede da Figura P9.50, caso  $I_x = 5 \angle 45^\circ$  A, determine  $V_o$ .

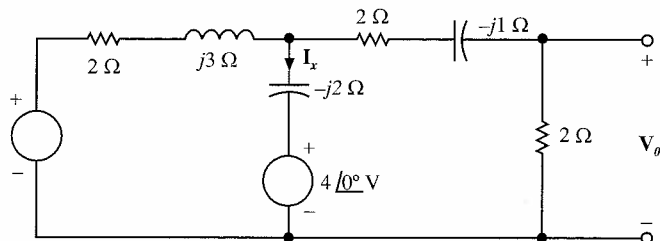


Figura P9.50

9.51 No circuito da Figura P9.51, caso  $V_x = 6 \angle 30^\circ$  V, determine  $V_o$ .

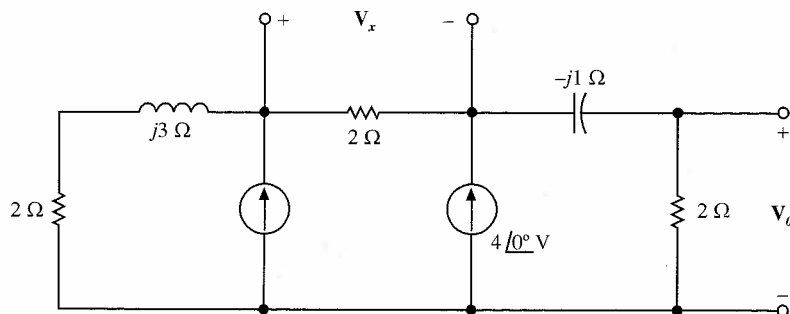


Figura P9.51

9.52 Determine  $V_S$  na rede da Figura P9.52, caso  $I_o = 2 \angle 0^\circ$  A.

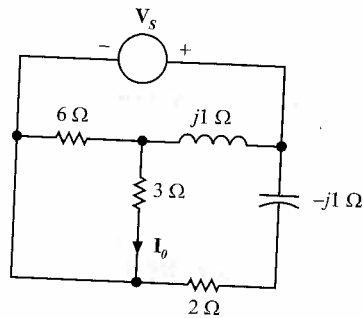


Figura P9.52

9.53 Se  $I_o = 4 \angle 0^\circ$  A, determine  $V_S$  na Figura P9.53.

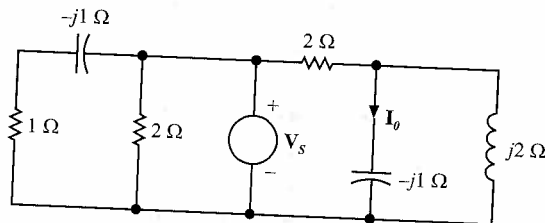


Figura P9.53

9.54 Dado  $V_S = 12 \angle 0^\circ$  V, determine  $I_S$  na Figura P9.54.

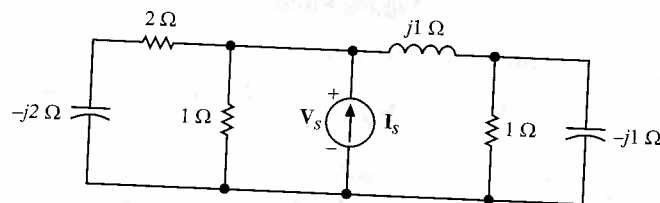


Figura P9.54

9.55 Determine  $I_S$  na rede da Figura P9.55, caso  $V_1 = 8 \angle 0^\circ$  V.

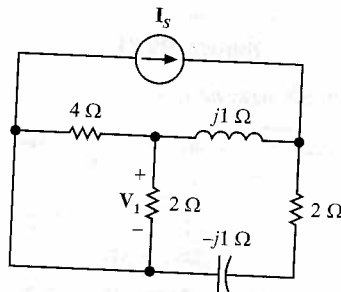


Figura P9.55

9.56 Dado  $I$ , determine  $V_S$  na Figura P9.56.

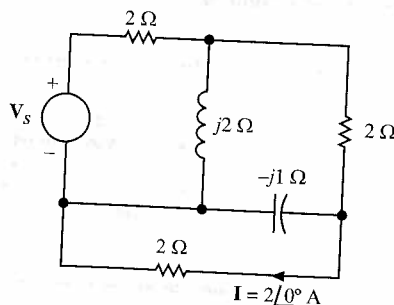


Figura P9.56

9.57 Se  $V_1 = 10 \angle 0^\circ$  V, determine  $V_S$  na Figura P9.57.

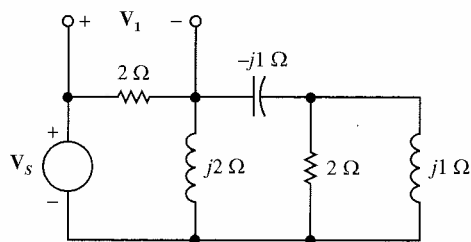


Figura P9.57

9.58 Se  $V_1 = 4 \angle 0^\circ$  V, determine  $I_o$  na Figura P9.58.

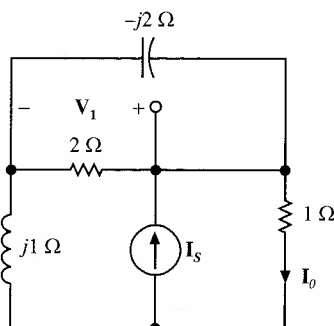


Figura P9.58

9.59 Na rede da Figura P9.59,  $V_o$  é  $4 \angle 45^\circ$  V; determine  $Z$ .

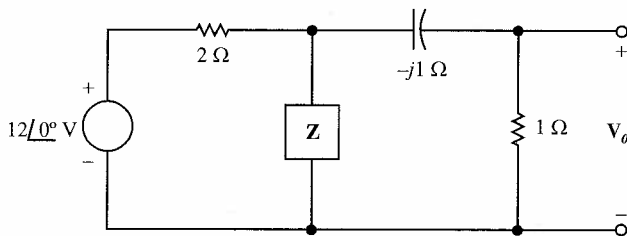


Figura P9.59

9.60 Se  $V_o = 2 \angle 45^\circ$  V na rede da Figura P9.60, determine  $Z$ .

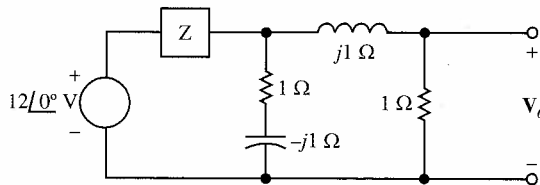


Figura P9.60

9.61 Na rede da Figura P9.61,  $V_1 = 2 \angle 45^\circ$  V. Determine  $Z$ .

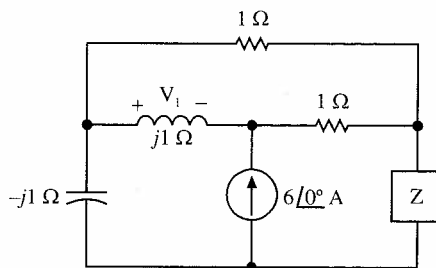


Figura P9.61

- 9.62 Determine  $Z$  na rede da Figura P9.62, caso  $V_o = 6 \angle 45^\circ \text{ V}$ .

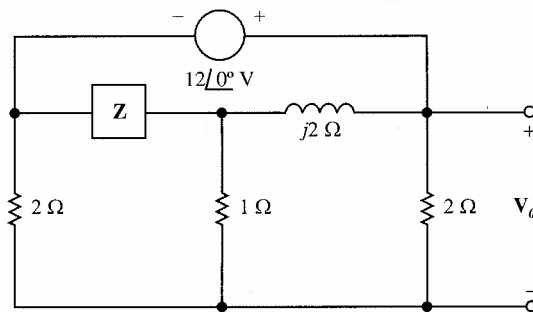


Figura P9.62

- 9.63 Derive o relacionamento de entrada-saída  $V_o/V_i$  no domínio da frequência para o circuito com o amp-op da Figura P9.63.

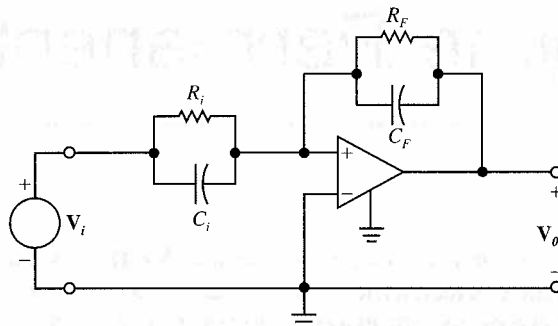


Figura P9.63

- 9.64 Determine a expressão para a tensão de saída no domínio da frequência para o circuito mostrado na Figura P9.64.

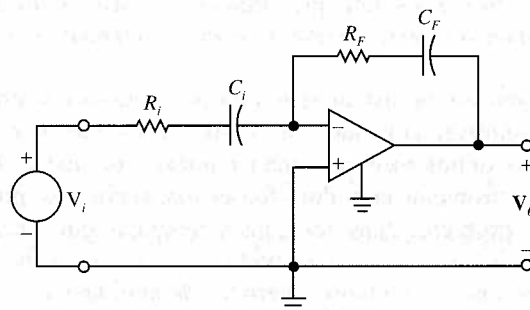


Figura P9.64

- 9.65 (a) Determine o relacionamento de entrada-saída no domínio da frequência para o circuito com amp-op mostrado na Figura P9.65.  
 (b) Calcule a função de transferência  $V_o/V_i$  caso  $Z_i = R_i + 1/j\omega C_i$  e  $Z_F = 1/j\omega C_F$ .

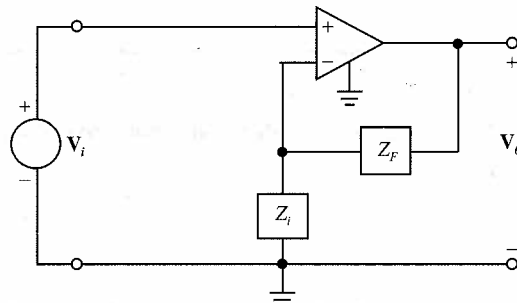


Figura P9.65

# Análise Senoidal em Regime Permanente

No Capítulo 9, demonstramos o uso da LKC, da LKT e a relação  $V = IZ$  na solução de problemas de circuitos ac em regime permanente (ou estado estacionário). Uma vez que os teoremas de circuitos e outras técnicas de análise de circuitos, que empregamos com sucesso para resolver circuitos de resistivos, são aplicáveis a circuitos lineares, é natural supor que tais técnicas sejam aplicáveis a circuitos contendo elementos  $R$ ,  $L$  e  $C$ . Vamos então neste capítulo mostrar a aplicação dessas várias técnicas na análise em regime permanente de circuitos ac. Já que tais técnicas de análise foram discutidas anteriormente, vamos nos concentrar em ilustrar o uso delas mediante vários exemplos. À medida que avançarmos, ficará claro ao leitor que a diferença entre o assunto deste capítulo e dos anteriores está no uso de fasores, impedância e admitância, o que conduz ao uso de números complexos.

Novamente o nosso propósito no uso de teoremas de circuitos é simplificar o problema. Apesar de os teoremas poderem ser imediatamente aplicados em muitos casos, eles nem sempre conduzem a uma solução mais simples do que aquela obtida mediante análise nodal e de malha. Por exemplo, na aplicação do princípio da superposição em um problema com duas fontes independentes, podemos verificar que, na realidade, o uso de tal princípio faz o problema duas vezes mais complexo que o original. Desse modo, no decorrer da apresentação das muitas técnicas, o leitor é convidado a examinar cada problema de uma perspectiva mais ampla na tentativa de determinar os melhores métodos de abordagem.

Os exemplos aplicados neste capítulo foram escolhidos especificamente para demonstrar a aplicabilidade das várias técnicas de análise de circuitos a uma variedade de problemas. Além disso, foi feita uma tentativa de ajudar o leitor no entendimento das várias maneiras como um problema de análise de circuito pode ser abordado usando-se mais de um método para resolver um problema em particular. Neste capítulo, os circuitos ac serão também analisados utilizando-se o PSPICE.

## 10.1 Linearidade

Para ilustrar o princípio de linearidade e seu uso na solução de problemas com circuitos ac em regime permanente, considere o seguinte exemplo.

### Exemplo 10.1

A tensão de entrada do circuito mostrado na Figura 10.1 é  $v_s(t) = 12 \cos(377t + 30^\circ)$  V. Desejamos determinar a corrente  $I_4$  usando linearidade. Portanto, assumiremos que  $I_4 = 1 \angle 0^\circ$  A, calcularemos o valor necessário de  $V_s$  e então utilizaremos o valor real de  $V_s$  para determinar o valor real de  $I_4$ .

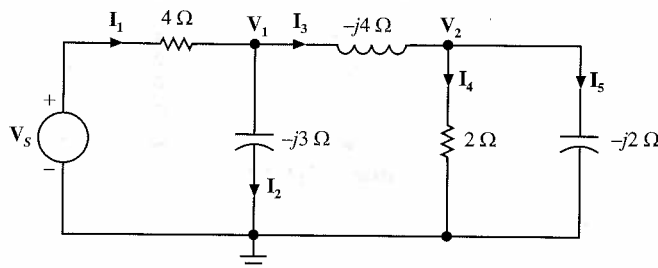


Figura 10.1 Circuito exemplo utilizado para ilustrar linearidade.

Se  $I_4 = 1 \angle 0^\circ$  A, então  $V_2 = (2)(1 \angle 0^\circ) = 2 \angle 0^\circ$  V. Dessa forma,

$$I_5 = \frac{2 \angle 0^\circ}{2 \angle -90^\circ} = 1 \angle 90^\circ \text{ A}$$

Aplicando-se a LKC, temos

$$\begin{aligned} I_3 &= I_4 + I_5 \\ &= 1 + j1 \text{ A} \end{aligned}$$

A aplicação da LKT nos fornece

$$\begin{aligned} V_1 &= (1 + j1)(j4) + V_2 \\ &= -2 + j4 \text{ V} \end{aligned}$$

$I_2$  é então

$$I_2 = \frac{-2 + j4}{-j3} = \frac{-4}{3} - j \frac{2}{3} \text{ A}$$

Utilizando-se a LKC novamente, tem-se

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ &= \frac{-4}{3} - j \frac{2}{3} + 1 + j1 = \frac{-1}{3} + j \frac{1}{3} \text{ A} \end{aligned}$$

A LKT ao longo do laço da extrema esquerda do circuito resulta em

$$\begin{aligned} V_2 &= 4(I_1) + V_1 \\ &= -\frac{4}{3} + j \frac{4}{3} - 2 + j4 \\ &= -\frac{10}{3} + j \frac{16}{3} = 6,29 \angle 122^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Uma vez que  $V_s = 6,29 \angle 122^\circ$  V produz um  $I_4 = 1 \angle 0^\circ$  A, então  $V_s = 12 \angle 30^\circ$  V produz um  $I_4$  de

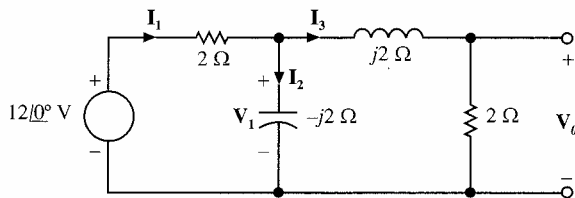
$$I_4 = \frac{(12 \angle 30^\circ)(1 \angle 0^\circ)}{6,29 \angle 122^\circ} = 1,91 \angle -92^\circ \text{ A}$$

Portanto,

$$i_4(t) = 1,91 \cos(377t - 92^\circ) \text{ A}$$

**Exercício**

**E10.1** Calcule  $V_o$  na rede da Figura E10.1 usando linearidade, assumindo a princípio que  $V_o = 1 \angle 0^\circ$  V.



**Figura E10.1**

**Resp.:**  $V_o = 5,36 \angle -63,43^\circ$  V.

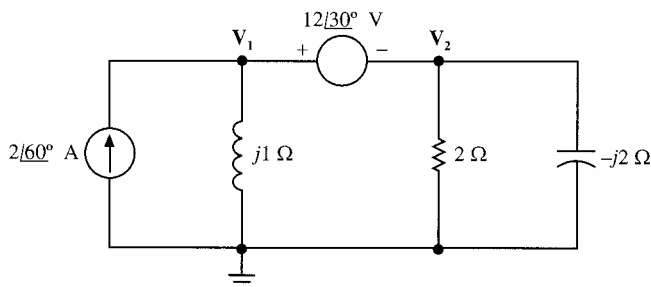
**10.2 Análise Nodal**

Os exemplos a seguir ilustram que a análise nodal é levada a cabo exatamente da mesma maneira como foi nos circuitos de resistivos. Nesta seção, a análise nodal será empregada no domínio da frequência usando a técnica de fasores. A esta altura, nosso conhecimento mostra que a análise nodal será uma técnica viável quando a rede contém um número de fontes de tensão. Nesse caso, o uso de supernós simplificará tipicamente o procedimento da solução.

**Exemplo 10.2**

Desejamos calcular as tensões nodais no circuito da Figura 10.2.

Para começar, notamos que  $V_1$  e  $V_2$  formam um supernó (ou seja,  $V_1 = V_2 + 12 \angle 30^\circ$ ). Portanto, somente uma equação, juntamente com essa equação de restrição, é necessária para determinar as tensões nodais.



**Figura 10.2** Circuito exemplo usado para ilustrar análise nodal.

Aplicando-se a LKC no supernó, obtém-se a equação

$$\frac{V_1}{j1} + \frac{V_1 - 12 \angle 30^\circ}{2} + \frac{V_1 - 12 \angle 30^\circ}{-j2} = 2 \angle 60^\circ$$

$$V_1 \left( \frac{1}{j1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{-j2} \right) = 2 \angle 60^\circ + \frac{12 \angle 30^\circ}{2} - \frac{12 \angle 30^\circ}{j2}$$

Simplificando-se tal equação, obtém-se

$$(0,71 \angle -45^\circ) V_1 = 3,2 + j9,93$$

ou

$$V_1 = 14,69 \angle 117,14^\circ \text{ V}$$

Então utilizando-se a equação de restrição, tem-se

$$\begin{aligned}
 V_2 &= V_1 - 12/30^\circ \\
 &= -6,70 + j13,07 - (10,4 + j6) \\
 &= -17,1 + j7,07 = 18,50/157,54^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

### Exercício

**E10.2** Utilize análise nodal para determinar  $V_o$  na rede da Figura E10.2.

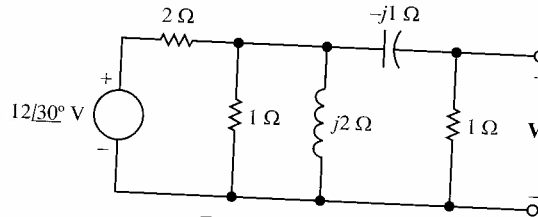
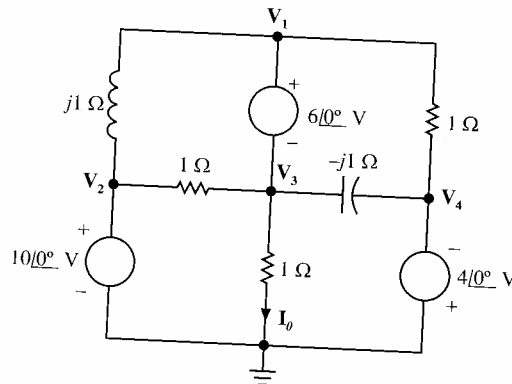


Figura E10.2

**Resp.:**  $V_o = 2,12 / 75^\circ \text{ V}$ .

### Exemplo 10.3

Vamos calcular a corrente  $I_o$  na rede da Figura 10.3.



**Figura 10.3** Circuito exemplo usado para ilustrar análise nodal.

A rede contém três supernós que incluem uma fonte de tensão cada. As equações de restrição para os supernós são

$$V_1 = V_3 + 6/0^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = 10/0^\circ \text{ V}$$

$$V_4 = -4/0^\circ \text{ V}$$

Precisamos de uma equação linear independente adicional para determinar a tensão nodal  $V_3$ , que por sua vez produzirá  $I_o$ . A equação LKC no supernó contendo a fonte de tensão de  $6/0^\circ \text{ V}$  é

$$\frac{V_1 - V_2}{j1} + \frac{V_1 - V_4}{1} + \frac{V_3 - V_2}{1} + \frac{V_3}{1} + \frac{V_3 - V_4}{-j1} = 0$$

que se reduz a

$$(1 - j)V_1 - (1 - j)V_2 - (1 + j)V_4 + (2 + j)V_3 = 0$$

Empregando-se as equações de restrição, obtemos

$$(1 - j)(V_3 + 6/0^\circ) + (2 + j)V_3 = (1 - j)10 + (1 + j)(-4/0^\circ)$$

Resolvendo-se essa equação para  $V_3$ , tem-se



$$\mathbf{V}_3 = \frac{8}{3} \angle -90^\circ \text{ V}$$

e portanto

$$\mathbf{I}_o = \frac{8}{3} \angle -90^\circ \text{ A}$$

### Exemplo 10.4

Desejamos determinar  $\mathbf{V}_o$  na rede da Figura 10.4.

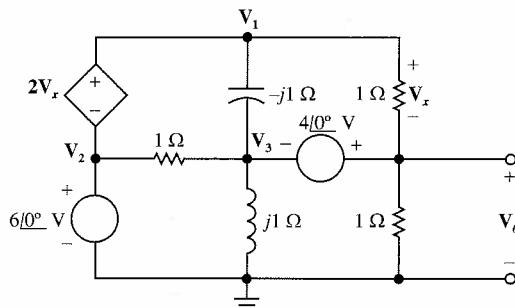


Figura 10.4 Circuito exemplo usado na análise nodal.

A rede contém dois supernós, um contendo as fontes  $6 \angle 0^\circ \text{ V}$  e  $2\mathbf{V}_x$  e outra contendo a fonte  $4 \angle 0^\circ \text{ V}$ . As equações de restrição para a rede são

$$\mathbf{V}_2 = 6 \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_o - 4 \angle 0^\circ$$

e ao longo do laço externo

$$6 \angle 0^\circ + 2\mathbf{V}_x - \mathbf{V}_x - \mathbf{V}_o = 0$$

ou

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_o - 6 \angle 0^\circ$$

Temos então três equações lineares independentes. A quarta equação é obtida empregando-se a LKC no supernó que contém a fonte  $4 \angle 0^\circ \text{ V}$ . Tal equação é

$$\frac{\mathbf{V}_o - (6 \angle 0^\circ + 2\mathbf{V}_x)}{1} + \frac{\mathbf{V}_3 - (6 \angle 0^\circ + 2\mathbf{V}_x)}{-j1} + \frac{\mathbf{V}_3 - 6 \angle 0^\circ}{1} + \frac{\mathbf{V}_3}{j1} + \frac{\mathbf{V}_o}{1} = 0$$

Substituindo-se as equações para  $\mathbf{V}_x$  e  $\mathbf{V}_3$  na equação acima, obtém-se

$$\mathbf{V}_o = 3,22 \angle 7,13^\circ \text{ V}$$

### Exercício

E10.3 Utilize análise nodal para determinar as tensões nodais na rede da Figura E10.3.

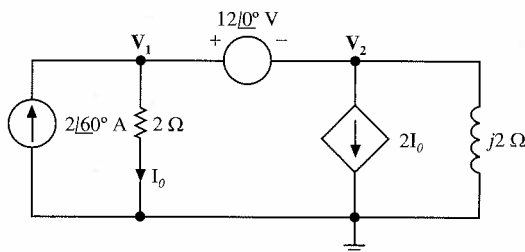


Figura E10.3

Resp.:  $\mathbf{V}_1 = 2,77 \angle -58,4^\circ \text{ V}$ ,  $\mathbf{V}_2 = -10,81 \angle 12,6^\circ \text{ V}$ .

**Exemplo 10.5**

Calcule a tensão de saída para o circuito amp-op mostrado na Figura 10.5a. Utilize o circuito equivalente para o amp-op na Figura 3.33b e assuma que  $R_i = \infty$  e  $R_o = 0$ .

A rede original contendo o circuito amp-op equivalente é mostrada na Figura 10.5b. A fonte dependente cria um supernó e, portanto, somente duas equações são necessárias para calcular a tensão de saída. Essas equações são

$$(V_1 - V_s)j\omega C_1 + \frac{V_1}{R_1} + (V_1 - V)j\omega C_2 + (V_1 + AV)j\omega C_3 = 0$$

$$(V - V_1)j\omega C_2 + \frac{V}{R_2} = 0$$

ou

$$V_1 \left( j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} + j\omega C_2 + j\omega C_3 \right) - V(j\omega C_2 - Aj\omega C_3) = j\omega C_1 V_s$$

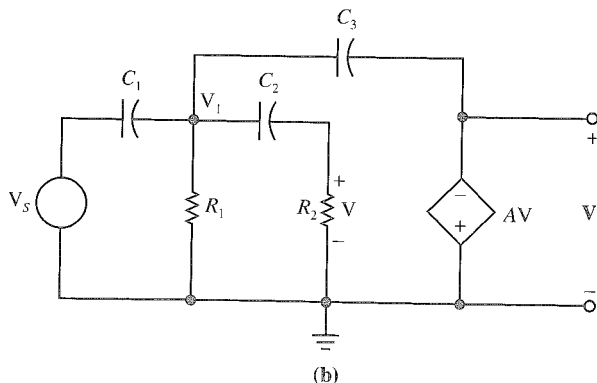
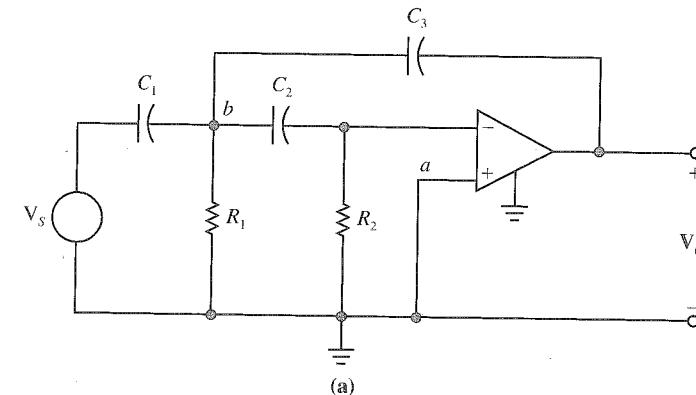
$$-V_1(j\omega C_2) + V \left( j\omega C_2 + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

Resolvendo-se para a tensão  $V$ , obtém-se

$$V = \frac{-\omega^2 C_1 C_2 V_s}{[1/R_1 + j\omega(C_1 + C_2 + C_3)](j\omega C_2 + 1/R_2) - j\omega C_2(j\omega C_2 - j\omega C_3 A)}$$

Simplificando-se essa função, tem-se

$$V = \frac{-\omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 V_s}{1 + j\omega[R_2 C_2 + R_1(C_1 + C_2 + C_3)] - \omega^2 R_1 R_2 C_2(C_1 + C_3 + C_3 A)}$$



**Figura 10.5** Circuito amplificador operacional usado para ilustrar análise nodal.

A tensão de saída  $V_o$  é então

$$V_o = \frac{+A\omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 V_s}{1 + j\omega[R_2 C_2 + R_1(C_1 + C_2 + C_3)] - \omega^2 R_1 R_2 C_2(C_1 + C_3 + C_3 A)}$$

Note que como  $A \rightarrow \infty$ , a relação entrada-saída torna-se

$$V_o = -\frac{C_1}{C_3} V_s$$

É interessante comparar esse resultado com discussões anteriores. A maneira como esse circuito foi configurado, um sinal de erro é desenvolvido entre os pontos  $a$  e  $b$ . Considerando o assunto discutido no Capítulo 3, a realimentação opera no sentido de minimizar o sinal de erro e, como  $A \rightarrow \infty$ , o sinal de erro é reduzido a zero. Uma vez que  $a$  esteja num potencial de zero, não há nenhuma tensão ac sobre os elementos  $R_1$ ,  $C_2$  e  $R_2$  e desse modo eles não têm nenhum efeito. Portanto, a rede é basicamente a mostrada na Figura 3.35a, onde  $R_2$  é substituído por  $1/j\omega C_3$  e  $R_1$  é substituído por  $1/j\omega C_1$ . ■

### Exemplo 10.6

O circuito mostrado na Figura 10.6 representa uma porção de um circuito equivalente para um transistor amplificador. Desejamos calcular a admitância de entrada assumindo que o circuito está energizado no lado esquerdo por uma fonte que tem tensão  $V$  e corrente  $I_i$ . As duas equações nodais são

$$-I_i + j\omega C_1 V + j\omega C_2 (V - V_o) = 0$$

$$j\omega C_2 (V_o - V) + g_m V + \frac{V_o}{R_L} = 0$$

ou

$$(j\omega C_1 + j\omega C_2)V - j\omega C_2 V_o = I_i$$

$$(g_m - j\omega C_2)V + \left(j\omega C_2 + \frac{1}{R_L}\right)V_o = 0$$

Resolvendo-se tais equações para  $V$ , tem-se

$$V = \frac{I_i(j\omega C_2 + 1/R_L)}{(j\omega C_1 + j\omega C_2)(j\omega C_2 + 1/R_L) + j\omega C_2(g_m - j\omega C_2)}$$

A admitância de entrada é

$$Y_i = \frac{I_i}{V} = j\omega(C_1 + C_2) + \frac{j\omega C_2(g_m - j\omega C_2)}{j\omega C_2 + 1/R_L}$$

Em eletrônica, achamos que para uma faixa importante de frequências,  $1/R_L \gg \omega C_2$  e  $g_m \gg \omega C_2$ . Sob tais condições, a equação acima se reduz a

$$\begin{aligned} Y_i &= j\omega C_1 + j\omega C_2 + j\omega C_2 g_m R_L \\ &= j\omega[C_1 + C_2(1 + g_m R_L)] \end{aligned}$$

O valor  $g_m R_L$  é geralmente grande, e portanto a equação acima indica que a entrada do amplificador está significativamente aumentada devido ao capacitor  $C_2$ , que liga a entrada e a saída do amplificador. Tal aumento na capacitância de entrada de um estágio de amplificador é conhecido em eletrônica como o *efeito Miller*. ■

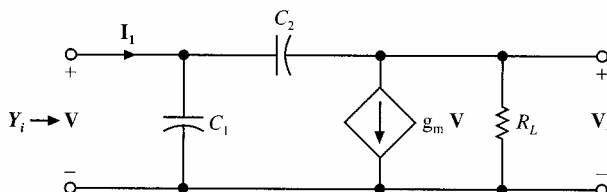


Figura 10.6 Porção de um amplificador transistor usado para ilustrar análise nodal.

### 10.3 Análise de Malha

Os exemplos a seguir ilustram o uso de análise de malha em circuitos ac em regime permanente. Nossa experiência prévia nos mostra que essa análise será mais viável quando a rede tiver certo número de fontes de corrente. Nesse caso, a análise pode ser simplificada definindo-se as correntes de malha ou laço para fluir em fontes de corrente.

#### Exemplo 10.7

Vamos determinar a tensão  $V_o$  no circuito da Figura 10.7.

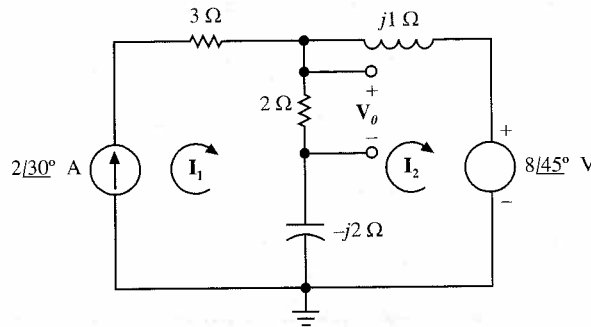


Figura 10.7 Circuito utilizado para ilustrar equações de malha.

Apesar de existir duas malhas, precisamos de somente uma equação para determinar todas as correntes de malha, por causa da presença de fonte de corrente. A LKT para a malha da direita é

$$(I_2 - 2/30^\circ)(2 - j2) + I_2(j1) = -8/45^\circ$$

ou

$$I_2 = \frac{(2/-30^\circ)(2 - j2) - 8/45^\circ}{2 - j1} = 3,18/-64,96^\circ \text{ A}$$

Para resolver para  $V_o$ , precisamos da corrente através do resistor de  $2 \Omega$ .

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= 2/30^\circ - 3,18/-64,96^\circ \\ &= 0,38 + j3,88 \text{ A} \end{aligned}$$

e desse modo

$$\begin{aligned} V_o &= 2(I_1 - I_2) \\ &= 0,76 + j7,76 \text{ V} \end{aligned}$$

O exemplo a seguir ilustra a facilidade com que uma rede consideravelmente complicada pode ser analisada selecionando-se o método adequado.

#### Exemplo 10.8

Considere a rede da Figura 10.8a. Desejamos calcular a tensão  $V_o$ .

Por causa da presença de fontes de corrente, as correntes  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$  são definidas para fluir através de uma fonte de corrente, como mostrado na Figura 10.8b. Portanto, as equações de restrição são

$$I_1 = 6/0^\circ$$

$$I_2 = -4/0^\circ$$

$$I_3 = 2/0^\circ$$

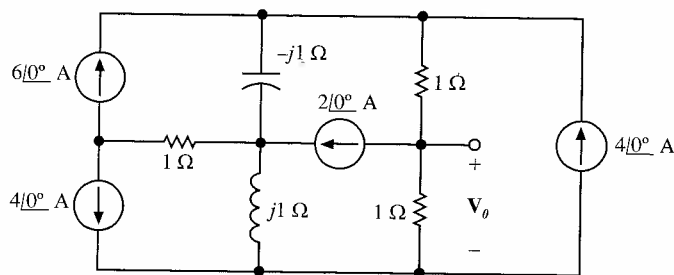
$$I_4 = -4/0^\circ$$

Finalmente, estipula-se que a corrente  $I_5$  flui através de um caminho que não contém fontes de corrente. Tal caminho é mostrado na Figura 10.8b. A equação LKT para o caminho em que  $I_5$  flui é

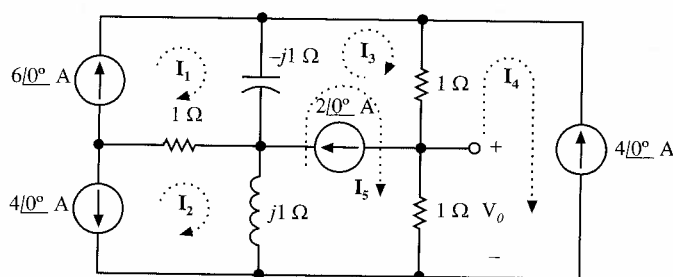
$$j1(I_5 - I_2) - j1(I_5 + I_3 - I_1) + 1(I_5 + I_3 - I_4) + 1(I_5 - I_4) = 0$$

ou

$$2\mathbf{I}_5 = j\mathbf{I}_2 - (1 - j)\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{I}_4 - j\mathbf{I}_1$$



(a)



(b)

**Figura 10.8** Circuitos utilizados no Exemplo 10.8.

Usando-se os valores definidos pelas equações de restrição, obtém-se

$$\mathbf{I}_5 = -(5 + 4j) \text{ A}$$

e então

$$\begin{aligned} V_0 &= 1(\mathbf{I}_5 - \mathbf{I}_4) \\ &= -(1 + 4j) \text{ V} \end{aligned}$$

Imagine por um instante  $V_0$  sendo determinado utilizando-se análise nodal. ■

Considere agora a aplicação da análise de malha para uma rede contendo uma fonte dependente.

### Exemplo 10.9

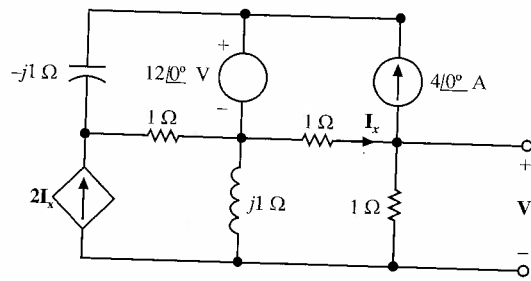
Vamos determinar a tensão  $V_0$  na rede da Figura 10.9a.

Por causa das duas fontes de corrente presentes nessa rede, a análise de malha vai ser empregada para se obter a solução. As correntes de malha estão definidas na Figura 10.9b. As equações de restrição para a rede são

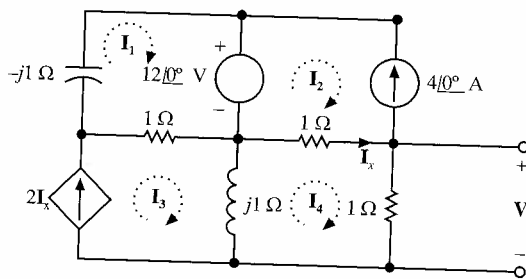
$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= -4\angle 0^\circ \\ \mathbf{I}_x &= \mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_4 + 4\angle 0^\circ \\ \mathbf{I}_3 &= 2\mathbf{I}_x = 2\mathbf{I}_4 + 8\angle 0^\circ \end{aligned}$$

As equações LKT para a malha 1 e malha 4 são

$$\begin{aligned} -j1\mathbf{I}_1 + 1(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) &= -12\angle 0^\circ \\ j1(\mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_3) + 1(\mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_2) + \mathbf{I}_4 &= 0 \end{aligned}$$



(a)



(b)

Figura 10.9 Circuitos utilizados no Exemplo 10.9.

Note que se as equações de restrição são substituídas na segunda equação LKT, a única variável na equação é  $I_4$ . Tal substituição nos dá

$$I_4 = -4 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

e, dessa forma,

$$V_o = -4 \angle -36,87^\circ \text{ V}$$

### Exercícios

**E10.4** Utilize equações de malha para determinar  $V_o$  na rede da Figura E10.4.

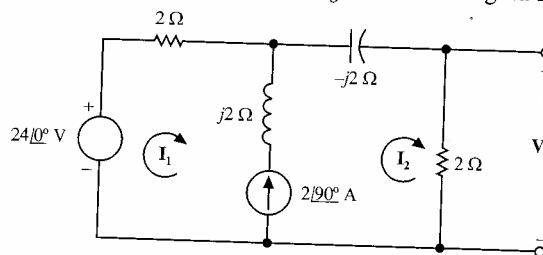


Figura E10.4

*Resp.:*  $V_o = 10,88 \angle 36^\circ \text{ V}$ .

**E10.5** Determine  $V_o$  na rede da Figura E10.5 usando equações de malha.

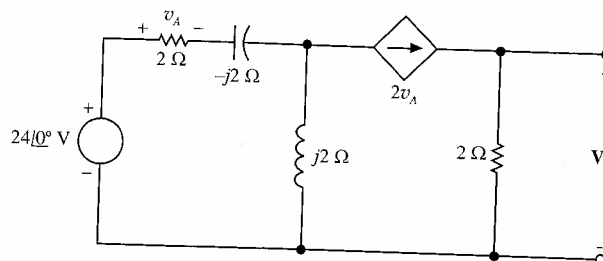


Figura E10.5

**Resp.:**  $V_o = 23,28 \angle 75,96^\circ \text{ V}.$

## 10.4 Superposição

Vamos ilustrar agora o princípio da superposição em análise de circuitos ac em regime permanente. Usaremos o circuito analisado no Exemplo 10.7 e mostrado na Figura 10.7 para ilustrar tal princípio.

### Exemplo 10.10

Vamos usar o princípio da superposição para determinar  $V_o$  no circuito da Figura 10.7.

Primeiramente, substituímos a fonte de tensão por um curto-circuito e calculamos  $V'_o$ , que é o componente de  $V_o$  devido à fonte de corrente, como mostrado na Figura 10.10a. Usando-se divisão de corrente, obtemos

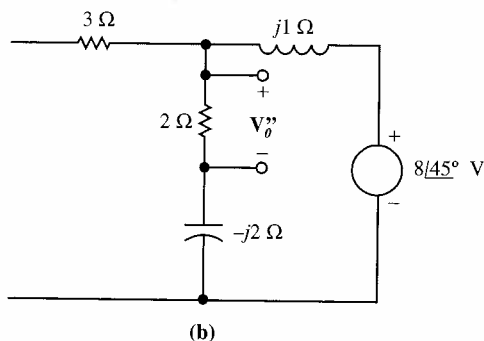
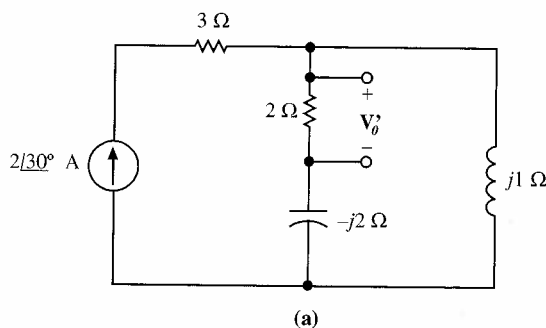
$$\begin{aligned} V'_o &= \frac{(2 \angle 30^\circ)(j1)}{2 - j2 + j1} (2) \\ &= 1,79 \angle 146,57^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Substituindo agora a fonte de corrente por um circuito aberto, podemos definir  $V''_o$ , que é o componente de  $V_o$  devido à fonte de tensão, como mostrado na Figura 10.10b. Usando-se divisão de tensão, temos

$$\begin{aligned} V''_o &= \frac{8 \angle 45^\circ}{2 - j2 + j1} (2) \\ &= 7,14 \angle 71,57^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} V_o &= V'_o + V''_o \\ &= 1,79 \angle 146,57^\circ + 7,14 \angle 71,57^\circ \\ &= 0,76 + j7,76 \text{ V} \end{aligned}$$



**Figura 10.10** Circuitos utilizados para determinar  $V_o$  na Figura 10.6 via superposição.

## Exercícios

**E10.6** Usando o princípio da superposição, determine  $V_o$  na rede da Figura E10.6.

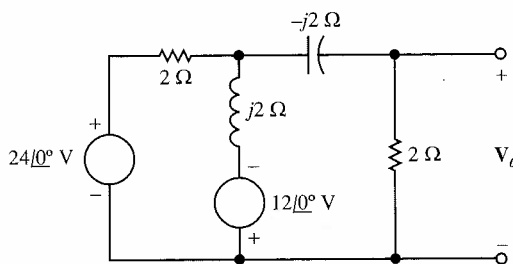


Figura E10.6

**Resp.:**  $V_o = 12 \angle 90^\circ \text{ V}$ .

**E10.7** Determine  $V_o$  na rede da Figura E10.7 usando o princípio da superposição.

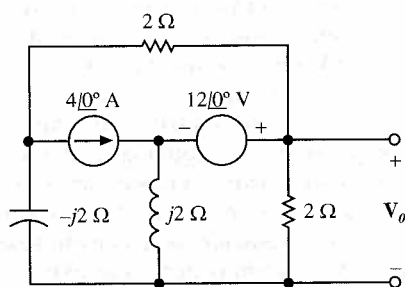


Figura E10.7

**Resp.:**  $V_o = 5,66 \angle -45^\circ \text{ V}$ .

Um importante caso especial de circuitos polifásicos é o sistema de três fios monofásico mostrado na Figura 10.11a. Sua importância é devida ao fato de que este é o sistema encontrado nas residências. Note que as fontes de tensão são iguais (ou seja,  $V_{an} = V_{nb} = V$ ), para que as magnitudes sejam iguais e as fases sejam iguais (monofásico), e portanto a tensão linha-a-linha  $V_{ab} = 2V_{an} = 2V_{nb} = 2V$ . Tipicamente, lâmpadas e pequenos aparelhos eletrodomésticos são conectados entre uma fase e o neutro  $n$ , e aparelhos de grande porte (por exemplo, aquecedores de água) são conectados entre fases. Lâmpadas residenciais operam em cerca de 120 V e o aquecedor opera em aproximadamente 240 V.

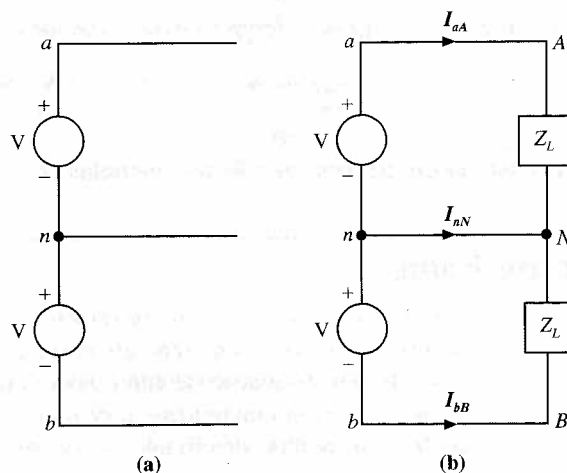


Figura 10.11 Sistema de três fios monofásico.

Vamos agora conectar duas cargas idênticas ao sistema de tensão de três fios monofásico usando condutores perfeitos, como mostrado na Figura 10.11b. A partir da figura notamos que



$$I_{aA} = \frac{V}{Z_L}$$

e

$$I_{bB} = -\frac{V}{Z_L}$$

A LKC no ponto  $N$  fornece

$$\begin{aligned} I_{nN} &= -(I_{aA} + I_{bB}) \\ &= -\left(\frac{V}{Z_L} - \frac{V}{Z_L}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Repare que não há corrente no fio neutro, e portanto ele poderia ser removido sem afetar o restante do sistema; isto é, todas as tensões e correntes permaneceriam inalteradas. Podemos nos perguntar até onde vai a simplicidade de tal sistema. Por exemplo, o que aconteceria se cada fio tivesse uma certa impedância de linha, se o condutor neutro tivesse uma impedância associada a ele e se existisse uma carga conectada entre fases? Para responder tais questões, considere o circuito na Figura 10.12a. Apesar de podermos examinar esse circuito usando uma das muitas técnicas já apresentadas nos capítulos anteriores, a simetria da rede sugere que talvez o princípio da superposição possa nos conduzir a algumas conclusões sem termos de recorrer à força bruta. Empregando o princípio da superposição, consideramos os circuitos das Figuras 10.12b e c. As correntes na Figura 10.12b foram denotadas arbitrariamente. Por causa da relação simétrica entre as Figuras 10.12b e c, as correntes na Figura 10.12c correspondem diretamente àsquelas da Figura 10.12b. Se somarmos duas correntes de fasores em cada ramo, descobrimos que a corrente neutra é mais uma vez zero. Uma corrente neutra de zero é um resultado direto de natureza simétrica da rede. Se cada impedância de linha  $Z_{\text{linha}}$  ou as impedâncias de carga  $Z_L$  fossem diferentes, a corrente neutra seria diferente de zero. Faremos uso direto de tais conceitos quando estudarmos redes trifásicas no Capítulo 12.

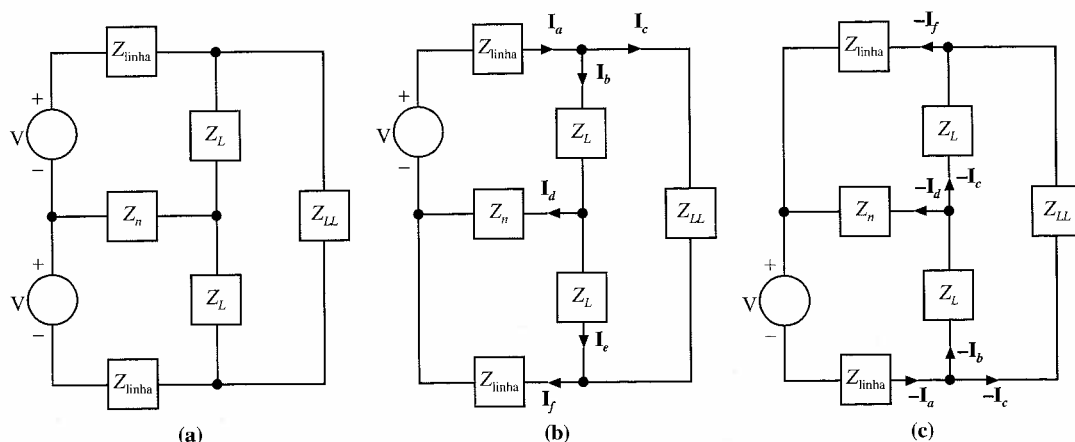


Figura 10.12 Circuitos para análise de um sistema de três fios monofásico.

## 10.5 Transformação de Fonte

Já vimos anteriormente que transformação de fonte pode ser uma ferramenta muito útil na simplificação de uma rede. Se a rede tem a topologia apropriada (ou seja, uma rede em cascata que lembra uma sucessão de janelas interligadas), a aplicação sucessiva de transformação de fonte pode também ser um método viável. Transformação de fonte pode também ser usada concomitantemente com outras técnicas para a simplificação da rede. A aplicação de transformação de fonte na análise de circuitos ac em regime permanente será mostrada no exemplo seguinte.

### Exemplo 10.11

Desejamos determinar  $I_4$  no circuito da Figura 10.1 usando transformação de fonte.

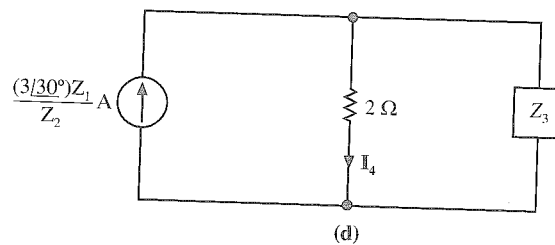
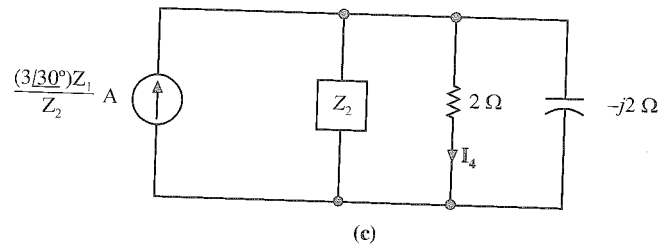
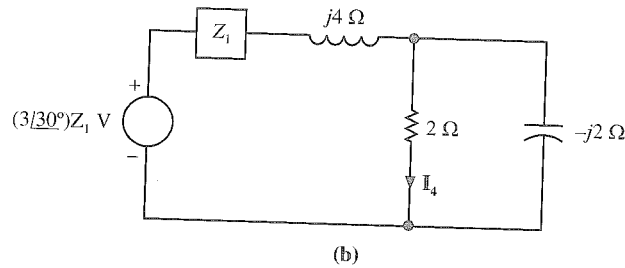
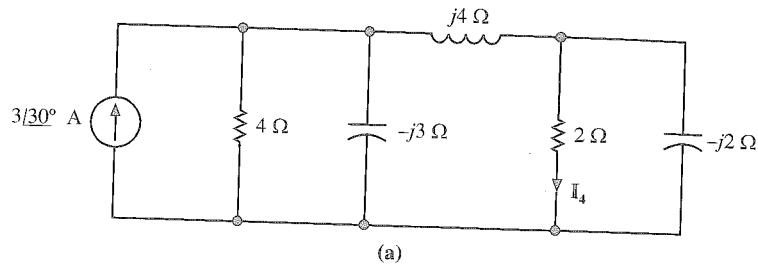


Figura 10.13 Circuitos usados para a resolução do Exemplo 10.1 via transformação de fonte.

Convertemos primeiramente a fonte de tensão e o resistor de  $4 \Omega$  em série em uma fonte de corrente e resistor de  $4 \Omega$  em paralelo, como mostrado na Figura 10.13a. A fonte de corrente e o resistor paralelo e o capacitor foram agora convertidos em um circuito equivalente consistindo de uma fonte de tensão em série com uma impedância, como mostrado na Figura 10.13b, onde

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{(4)(-j3)}{4 - j3} \\ &= \frac{-j12}{4 - j3} \Omega \end{aligned}$$

Combinando-se  $Z_1$  com o indutor, tem-se  $Z_2$ , onde

$$Z_2 = Z_1 + j4 = \frac{12 + j4}{4 - j3} \Omega$$

Convertendo-se o circuito da Figura 10.13b novamente em uma fonte de corrente em paralelo com  $Z_2$ , produz-se o circuito da Figura 10.13c. Combinando-se  $Z_2$  com o capacitor paralelo, obtém-se o circuito da Figura 10.13d, onde

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{(-j2)(Z_2)}{-j2 + Z_2} \\ &= \frac{4 - j12}{3 - j2} \Omega \end{aligned}$$

O valor da fonte de corrente é

$$\frac{(3/30^\circ)Z_1}{Z_2} = \frac{(3/30^\circ)[-j12/(4 - j3)]}{\frac{12 + j4}{4 - j3}} = 2,85 \angle -78,43^\circ \text{ A}$$

Empregando-se agora divisão de corrente

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{(2,85 \angle -78,43^\circ)[(4 - j12)/(3 - j2)]}{2 + \frac{4 - j12}{3 - j2}} \\ &= 1,91 \angle -92^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

### Exercício

**E10.8** Determine  $V_o$  na rede da Figura E10.6 usando transformação.

*Resp.:*  $V_o = 12 \angle 90^\circ \text{ V}$ .

## 10.6 Teoremas de Thévenin e Norton

Nos exemplos seguintes, vamos demonstrar o uso dos teoremas de Norton e Thévenin na solução de vários problemas, inclusive aqueles em que os teoremas são combinados com outras técnicas de análise. Vamos ilustrar o uso dos teoremas de Thévenin e Norton no domínio da frequência e mostrar que a tensão em circuito aberto e corrente de curto-circuito são fasores e, portanto, sua razão é um valor complexo, o que chamamos impedância equivalente de Thévenin.

O teorema de Thévenin é extremamente útil na redução de uma porção de uma rede a uma única fonte em série com uma impedância. Como um exemplo extremo de tal simplificação, suponhamos que estamos projetando a rede elétrica de uma localidade como a rede de distribuição elétrica de uma universidade. Para analisar o sistema local, o mapa completo de distribuição elétrica dos Estados Unidos, ao qual a rede de força local está conectada, pode ser representado pelo circuito equivalente de Thévenin; isto é, o sistema completo de eletricidade dos Estados Unidos é substituído por dois elementos para estudar-se o sistema de força do campus. Esses parâmetros equivalentes de Thévenin estão à disposição nas concessionárias de energia. Tais companhias têm como rotina o cálculo de tais valores no projeto de seus sistemas utilizando uma simulação computacional de suas redes.

### Exemplo 10.12

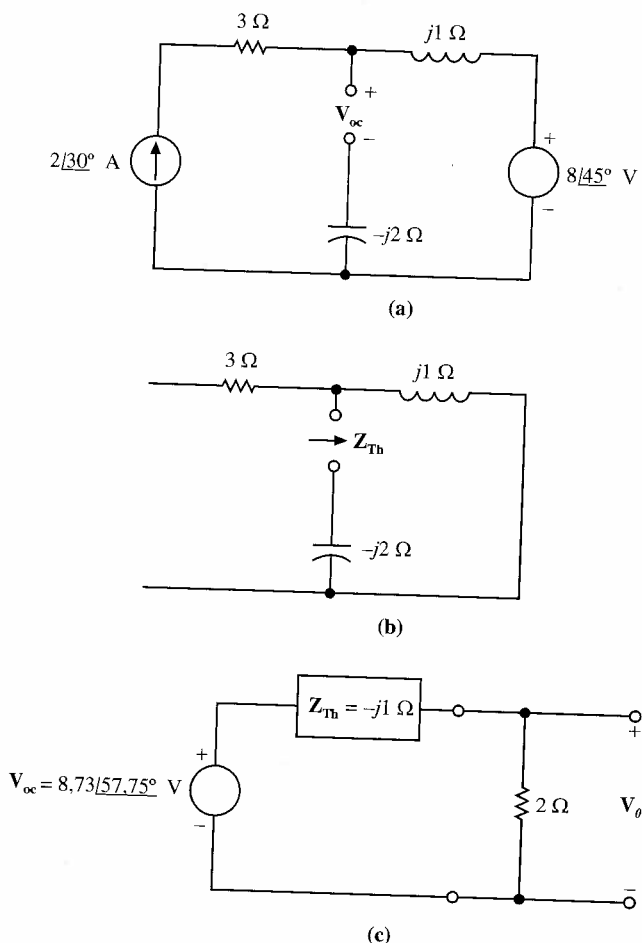
Vamos determinar a tensão  $V_o$  no circuito da Figura 10.7 utilizando o teorema de Thévenin.

A tensão em circuito aberto  $V_{oc}$  é obtida do circuito da Figura 10.14a. Uma vez que a corrente no laço externo é  $2 \angle 30^\circ \text{ A}$ , então

$$\begin{aligned} V_{oc} &= (2 \angle 30^\circ)(j1) + 8 \angle 45^\circ \\ &= 8,73 \angle 57,75^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

A impedância equivalente de Thévenin é determinada desconectando as fontes independentes; isto é, substituindo-se fontes de corrente por circuitos abertos e fontes de tensão por curto-circuitos, e calculando-se a impedância nos terminais, onde  $V_{oc}$  é determinada como mostrado na Figura 10.14b. Repare que

$$Z_{Th} = -j2 + j1 = -j1 \Omega$$



**Figura 10.14** Circuitos utilizados no cálculo de  $V_o$  na Figura 10.7 usando o teorema de Thévenin.

Poderíamos ter determinado a corrente de curto-circuito e então calcular  $Z_{Th}$  de  $V_{oc}/I_{sc}$ , porém tal procedimento poderia ter sido muito mais difícil nesse caso.

O circuito equivalente de Thévenin é então mostrado na Figura 10.14c juntamente com a carga de  $2 \Omega$ . A tensão  $V_o$  é então calculada como

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{(8,73/57,75^\circ)(2)}{2 - j1} \\ &= 0,76 + j7,76 \text{ V} \end{aligned}$$

### Exemplo 10.13

Vamos determinar a tensão  $V_o$  no circuito do Exemplo 10.8 usando o teorema de Thévenin.

A tensão de circuito aberto é calculada da rede da Figura 10.15a. Aplicando-se a LKC aos nós da rede, obtém-se

$$I_1 = 4/0^\circ - 2/0^\circ = 2/0^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 6/0^\circ + I_1 = 8/0^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = 6/0^\circ + 4/0^\circ = 10/0^\circ \text{ A}$$

$$I_4 = I_2 + 2/0^\circ - I_3 = 0$$

A LKT ao longo do laço que contém  $V_{oc}$  e somente elementos passivos é

$$+V_{oc} + (1)(2)\angle 0^\circ - (-j1)I_2 - j1I_4 = 0$$

Portanto,

$$V_{oc} = -(2 + j8) \text{ V}$$

$Z_{Th}$  é determinada a partir da rede da Figura 10.15b como  $Z_{Th} = 1 \Omega$ . A rede equivalente de Thévenin conectada ao resistor de carga de saída é mostrada na Figura 10.15c e a tensão de saída é

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{1}{2}(-2 - j8) \\ &= -(1 + j4) \text{ V} \end{aligned}$$

que é o valor obtido no Exemplo 10.8.

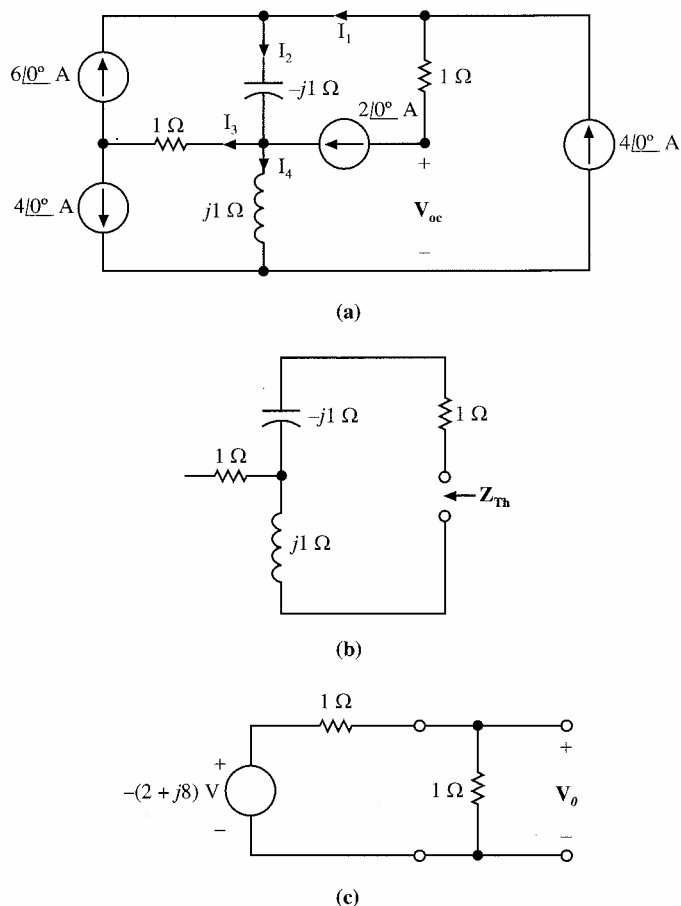


Figura 10.15 Circuitos usados no Exemplo 10.13.

#### Exemplo 10.14

Vamos usar o teorema de Thévenin para determinar a tensão  $V_o$  na rede do Exemplo 10.9.

A tensão em circuito aberto é determinada a partir da rede da Figura 10.16a. Note que  $I'_x = 4\angle 0^\circ \text{ A}$  e uma vez que  $2I_x$  flui através do indutor, a tensão do circuito aberto  $V_{oc}$  é

$$\begin{aligned} V_{oc} &= -1(4\angle 0^\circ) + j1(2I'_x) \\ &= -4 + j8 \text{ V} \end{aligned}$$

Para determinar a impedância equivalente de Thévenin, desligamos as fontes independentes, aplicamos uma fonte de tensão teste aos terminais de saída e calculamos a corrente que deixa a fonte de teste. Como mostrado na Figura 10.16b, uma vez que  $I'_x$  flui na fonte de teste, a LKC exige que a corrente no indutor seja também  $I'_x$ . A LKT ao longo da malha contendo a fonte de teste indica que

$$j1\mathbf{I}_x'' - \mathbf{I}_x'' - \mathbf{V}_{\text{teste}} = 0$$

Portanto,

$$\mathbf{I}_x'' = \frac{-\mathbf{V}_{\text{teste}}}{1 - j}$$

Então

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\text{Th}} &= \frac{\mathbf{V}_{\text{teste}}}{-\mathbf{I}_x''} \\ &= 1 - j \, \Omega \end{aligned}$$

Se a rede equivalente de Thévenin é agora conectada à carga, como mostrado na Figura 10.16c, a tensão de saída  $\mathbf{V}_o$  é tida como

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_o &= \frac{-4 + j8}{2 - j1} (1) \\ &= -4 \angle -36,87^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

que é idêntica à obtida no Exemplo 10.9.

O exemplo seguinte ilustra o uso do Teorema de Norton. Mais uma vez, o mesmo problema foi resolvido em um exemplo anterior e, portanto, podemos conferir nossos resultados e comparar os métodos.

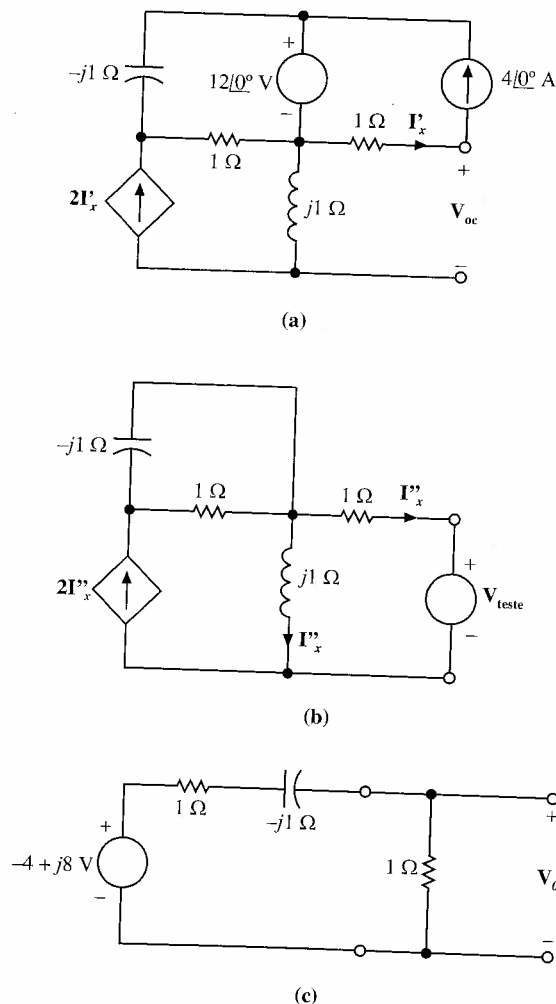
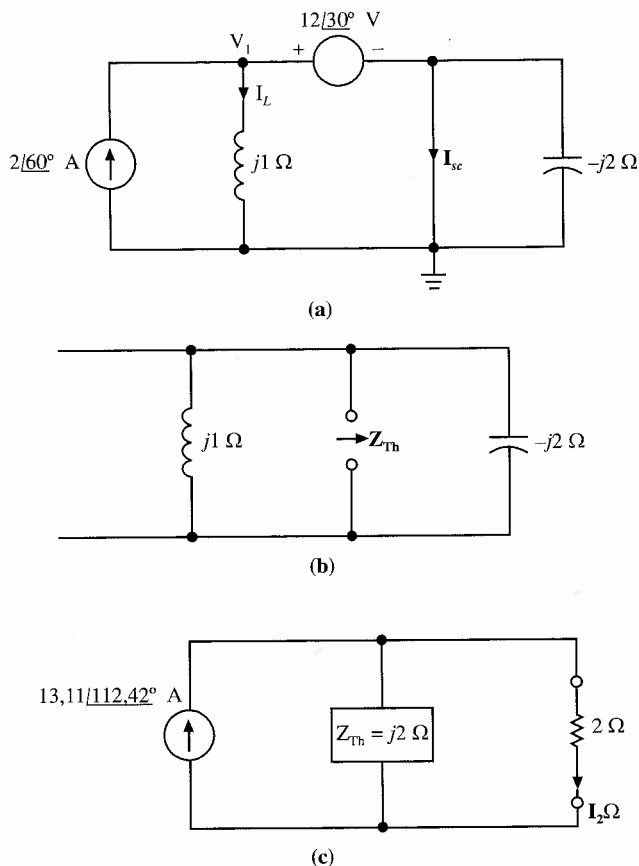


Figura 10.16 Circuitos utilizados no Exemplo 10.14.

**Exemplo 10.15**

Vamos empregar o teorema de Norton para achar a corrente no resistor de  $2\ \Omega$  da Figura 10.2, que flui do nó chamado de  $V_2$  para o terra.



**Figura 10.17** Circuitos utilizados no cálculo da corrente no resistor de  $2\ \Omega$  da Figura 10.2 usando o teorema de Norton.

A corrente de curto-circuito é calculada a partir do circuito da Figura 10.17a. O curto-circuito coloca a fonte de tensão diretamente sobre o indutor e por isso a corrente é

$$I_L = \frac{12\angle 30^\circ}{j1} = 12\angle -60^\circ\text{ A}$$

A LKC aplicada ao nó 1 indica que

$$\begin{aligned} I_{sc} &= 2\angle 60^\circ - 12\angle -60^\circ \\ &= 13,11\angle 112,42^\circ\text{ A} \end{aligned}$$

A impedância equivalente de Thévenin é calculada da Figura 10.17b como

$$Z_{Th} = \frac{(j1)(-j2)}{j1 - j2} = j2\ \Omega$$

Portanto, a corrente no resistor de  $2\ \Omega$  da Figura 10.2 é calculada empregando-se o circuito equivalente de Norton, como mostrado na Figura 10.17c.

$$\begin{aligned} I_{2\Omega} &= \frac{(13,11\angle 112,42^\circ)(j2)}{2 + j2} \\ &= \frac{18,50\angle 157,54^\circ}{2}\text{ A} \end{aligned}$$

Uma vez que a tensão  $V_2$  na Figura 10.2 foi calculada como  $V_2 = 18,50 \angle 157,54^\circ$  V no Exemplo 10.2, o valor de  $I_{2\Omega}$  confere com os resultados anteriores.

### Exercícios

- E10.9** Utilize o teorema de Thévenin para calcular  $V_o$  na rede da Figura E10.6.  
**Resp.:**  $V_o = 12 \angle 90^\circ$  V.
- E10.10** Utilize o teorema de Norton para calcular  $V_o$  na rede da Figura E10.6.  
**Resp.:**  $V_o = 12 \angle 90^\circ$  V.
- E10.11** Utilize o teorema de Thévenin para calcular  $V_o$  na rede da Figura E10.7.  
**Resp.:**  $V_o = 5,66 \angle -45^\circ$  V.
- E10.12** Determine  $V_o$  na rede da Figura E10.4 utilizando o teorema de Thévenin.  
**Resp.:**  $V_o = 10,86 \angle 36,53^\circ$  V.

### Exemplo 10.16

Desejamos determinar a tensão de saída  $V_o$  na rede mostrada na Figura 10.18a.

A rede é consideravelmente complicada e, portanto, parece que um ataque direto seria muito trabalhoso. Uma vez que é necessária a tensão de saída à direita da rede, podemos começar simplificando a porção esquerda da rede. Note que, se formamos um equivalente de Thévenin para a porção à esquerda da fonte dependente, podemos reduzir o circuito a um que tenha duas tensões nodais desconhecidas, uma das quais é a tensão de saída  $V_o$ .

A porção da rede à esquerda da fonte de corrente é mostrada na Figura 10.18b. A tensão de circuito aberto é

$$\begin{aligned} V_{oc} &= \frac{(12 \angle 0^\circ)(-j1)}{1 - j1} \\ &= 8,49 \angle -45^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

A impedância equivalente de Thévenin derivada da Figura 10.18c é

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= 1 + \frac{-j1}{1 - j1} \\ &= 1,5 - j0,5 \Omega \end{aligned}$$

A rede simplificada empregando o equivalente de Thévenin é mostrada na Figura 10.18d. Esse resultado poderia ter sido obtido diretamente pela aplicação repetida de transformações de fonte. As equações nodais para a rede equivalente são

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - 8,49 \angle -45^\circ}{1,5 - j0,5} + \frac{V_1 - V_o}{j1} &= 2I_x \\ \frac{V_o - V_1}{j1} + \frac{V_o}{-j1} + \frac{V_o}{1} &= 0 \\ I_x &= \frac{V_o}{-j1} \end{aligned}$$

Resolvendo-se tais equações, tem-se

$$V_o = 6,00 \angle 0^\circ \text{ V}$$



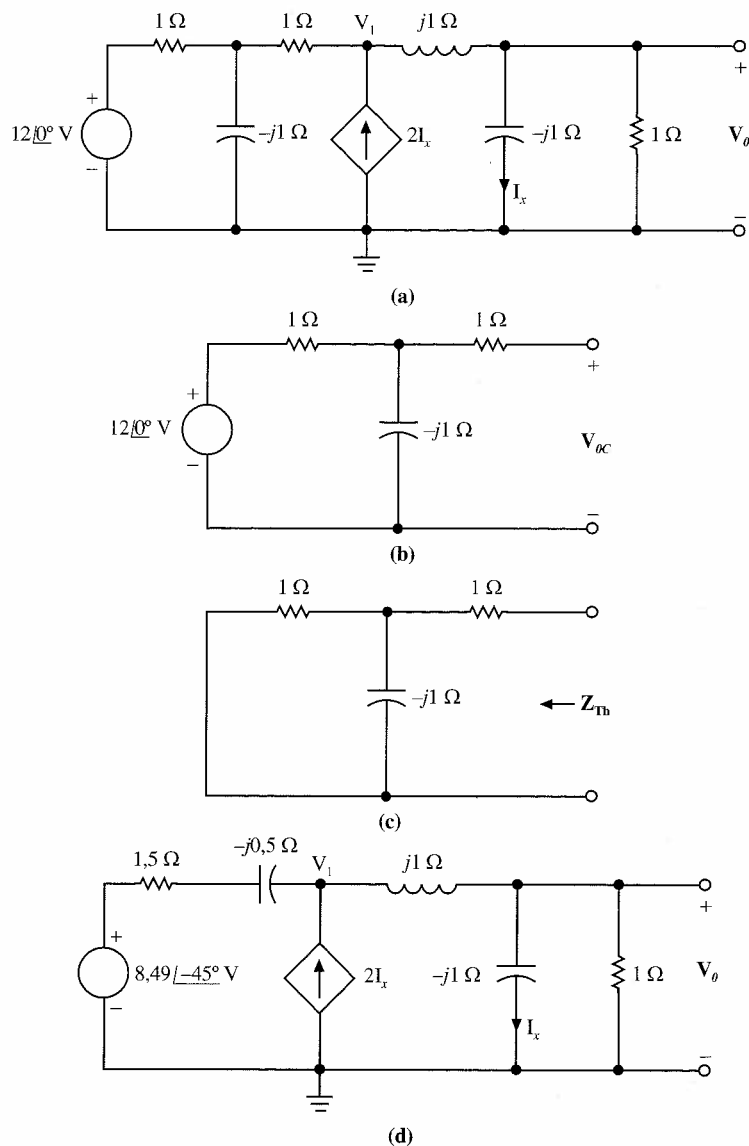


Figura 10.18 Exemplo de rede.

## 10.7 Técnicas de Análise PSPICE

A porção de análise ac no PSPICE é semelhante à parte da análise dc, com a exceção de que se obtém uma solução no domínio da frequência. O circuito resolvido com o PSPICE é um circuito no domínio da frequência. Uma vez que a análise está no domínio da frequência, todas as fontes ac devem ser senoidais e ter a mesma frequência. O computador calcula as impedâncias de todos os ramos a partir dos valores de entrada dos elementos (e a frequência), e o programador fornece as magnitudes e ângulos de fase de todas as fontes. Fontes dependentes são também fasores e são sempre uma constante multiplicada por uma corrente ou tensão de ramo.

Já apresentamos, nos capítulos 4 e 7, todas as ferramentas necessárias para uma análise PSPICE nesse caso, com a exceção do devido comando de controle de solução. Para uma análise ac, o comando controle de solução é

```
.AC XXX NO FSTART FSTOP
```

XXX é DEC para variação de década, OCT para variação de oitava ou LIN para variação linear. NO é o número de pontos por década, oitava ou número total de pontos, dependendo se a especificação foi DEC, OCT

ou LIN. FSTART é a frequência inicial e FSTOP é a frequência de término, ambas em hertz. Note que o comando AC não é significativo, caso nenhuma fonte ac tenha sido especificada.

Para a análise ac, cinco variáveis de saída adicionais podem ser usadas substituindo-se V por

VR parte real

VI parte imaginária

VM magnitude

VP fase

VDB  $20 \log_{10}$  (magnitude)

Note que neste capítulo usaremos somente variação linear. De fato, vamos computar as tensões desconhecidas e correntes em somente uma frequência; isto é, a frequência de fonte não será variada. Variações em décadas e oitavas serão explicadas no Capítulo 14.

Um comando de impressão típico utilizado na análise ac é

```
.PRINT AC VM(1) VP(1) IM(1) IP(1) VM(3,4) VP(3,4)
```

Note que, contrastando com a análise dc, podemos calcular a tensão ou corrente entre dois nós não-referenciados.

Os exemplos seguintes nos servirão para ilustrar o uso do PSPICE na análise de um circuito ac.

### Exemplo 10.17

Vamos utilizar o PSPICE para determinar a tensão  $V_o$  na rede da Figura 10.19.

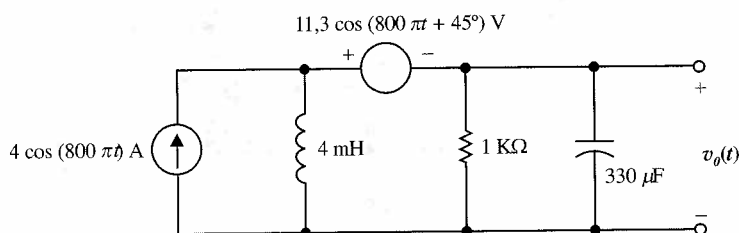


Figura 10.19 Circuito utilizado no Exemplo 10.17.

Note que a frequência das fontes é de 400 Hz. O programa PSPICE que calcula a tensão de saída está listado abaixo.

```
EXAMPLE 10.17
V1 1 2 AC 11.3 45
I1 0 1 AC 4 0
R1 2 0 1K
C1 2 0 330U
L1 1 0 4MH
*AC ANALYSIS
.AC LIN 1 400 400
.PRINT AC VM(2) VP(2)
.END
```

A listagem da saída inclui

| FREQ      | VM(2)     | VP(2)      |
|-----------|-----------|------------|
| 4.000E+02 | 4.524E+00 | -7.599E+01 |

### Exemplo 10.18

Vamos utilizar o PSPICE para determinar a tensão de saída na rede da Figura 10.20a.

Note que a frequência da fonte é 60 Hz. O programa PSPICE para calcular a tensão de saída  $V_o$  é

## EXAMPLE 10.18

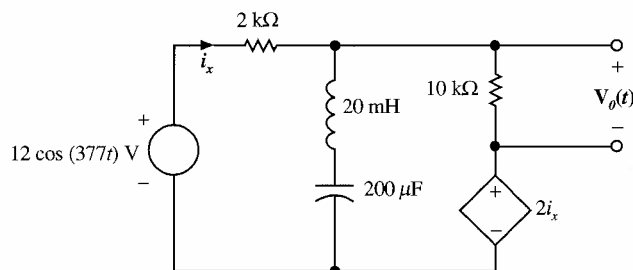
```

VC 1 0 AC 12 0
VX 1 5 AC 0
HX 3 0 VX 2
R1 5 2 2K
R2 2 3 10K
C1 4 0 200UF
L1 2 4 20MH
* ANALYSIS
.AC LIN 1 60 60
.PRINT AC VM(2,3) VP(2,3)
.END

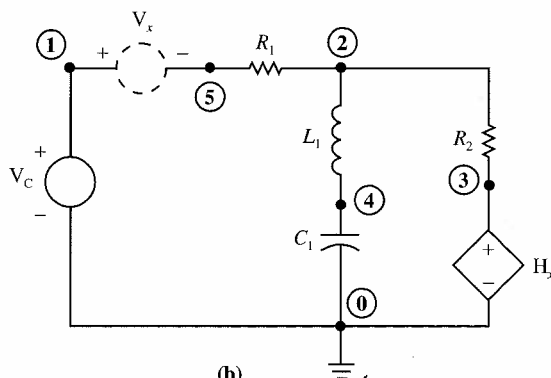
```

A listagem de saída fornecida pelo computador inclui o seguinte:

| FREQ      | VM(2,3)   | VP(2,3)    |
|-----------|-----------|------------|
| 6.000E+01 | 3.637E-02 | -1.091E+02 |



(a)



(b)

Figura 10.20 Circuitos empregados no Exemplo 10.18.

## Exemplo 10.19

Vamos considerar mais uma vez o problema do Exemplo 10.16. A Figura 10.21 mostra a rede da Figura 10.18a redesenhada para análise PSPICE. Note que no Exemplo 10.16 a rede é especificada no domínio da frequência, e a frequência não foi explicitada. Para a análise PSPICE devemos especificar a frequência e os valores dos parâmetros. Temos a liberdade de escolher qualquer frequência e parâmetros do circuito que sejam consistentes com os valores de impedância dados. Um valor conveniente é  $f = \frac{1}{2} \pi$  hertz, que produz  $\omega = 1$  rad/s.

O programa PSPICE para calcular a tensão de saída é

```

EXAMPLE 10.16 AC ANALYSIS
V1 1 0 AC 12 0
R1 1 2 1
C1 2 0 1
R2 2 3 1

```

```

F1 0 3 VX 2
L1 3 4 1
C2 4 5 1
VX 5 0 AC 0 0
R3 4 0 1
.AC LIN 1 0.159155 0.159155
.PRINT AC VM(4) VP(4)
.END
    
```

A saída do computador para tal programa é

| FREQ      | VM(4)     | VP(4)   |
|-----------|-----------|---------|
| 1.592E-01 | 6.000E+00 | 2.04-05 |

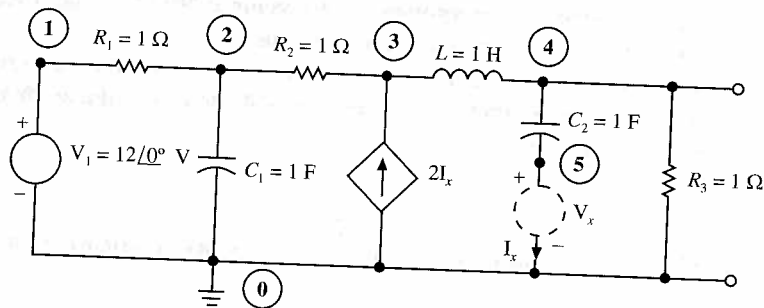


Figura 10.21 Rede da Figura 10.18a redesenhada para análise PSPICE.

Já que o enfoque de nossa análise neste capítulo ficou restrita a uma frequência única, os exemplos PSPICE mantiveram tal formato. No entanto, o uso de rotinas gráficas para análise de uma gama de frequências é apresentado no Capítulo 14.

### Exercícios

**E10.13** Dada a rede da Figura E10.13, calcule  $V_o$  e  $I_o$  usando PSPICE se a frequência for  $f = \frac{1}{2\pi}$  Hz.

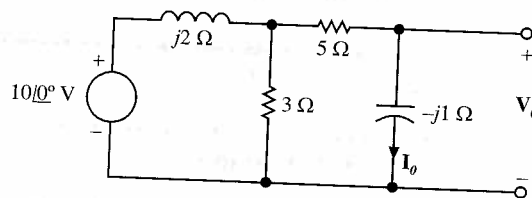


Figura E10.13

*Resp.:  $V_o = 1,402 \angle -127,4^\circ$  V,  $I_o = 1,402 \angle -37,4^\circ$  A.*

**E10.14** Usando PSPICE, calcule  $V_o$  na rede da Figura E10.14.

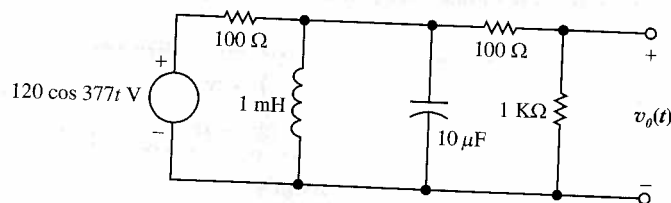


Figura E10.14

*Resp.:  $V_o = 0,4118 \angle 89,76^\circ$  V.*

## 10.8 Resumo

Este capítulo ilustrou que, por meio do uso de fasores, impedância e admitância, podemos determinar a resposta em regime permanente de um circuito ac a uma entrada senoidal utilizando técnicas como análise nodal, análise de laço, superposição, transformação de fonte e os teoremas de Thévenin e Norton.

Também demonstramos o uso do PSPICE na solução de problemas de circuitos ac em regime permanente. Finalmente, foi mostrado que a porção de análise ac do programa de análise de circuitos PSPICE é uma técnica simples e eficiente para se resolver problemas de análise de circuitos ac.

### Pontos-Chave

- O princípio de linearidade pode ser aplicado em problemas de circuitos ac em regime permanente.
- Todas as técnicas de solução aplicadas a circuitos dc – análise nodal, análise de laço, superposição, transformação de fonte e os teoremas de Thévenin e Norton – são todas aplicáveis na solução de problemas de circuitos ac em regime permanente.
- Com a adição de um comando de controle de solução e cinco variáveis de saída, as técnicas PSPICE apresentadas nos capítulos anteriores podem ser aplicadas na solução de problemas de circuitos ac em regime permanente.

### Problemas

- 10.1** Dada a rede da Figura P10.1, use linearidade e assuma que  $V_o = 1 \angle 0^\circ$  V para determinar o valor real de  $V_o$ , caso  $V_S = 24 \angle 0^\circ$  V.

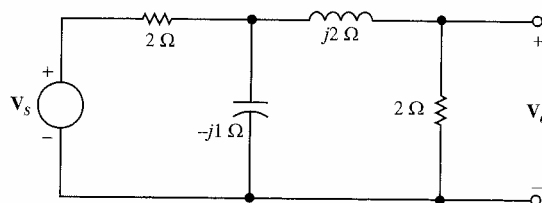


Figura P10.1

- 10.2** Dado o circuito da Figura P10.2, use linearidade e assuma que  $I_o = 1 \angle 0^\circ$  A para determinar o valor real de  $I_o$ , caso  $V_S = 12 \angle 0^\circ$  V.

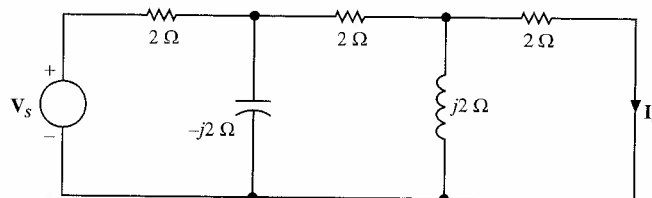


Figura P10.2

- 10.3** Dado a rede da Figura P10.3, use linearidade e assuma que  $I_o = 1 \angle 0^\circ$  A para determinar o valor real de  $I_o$ , caso  $I_S = 12 \angle 0^\circ$  A.

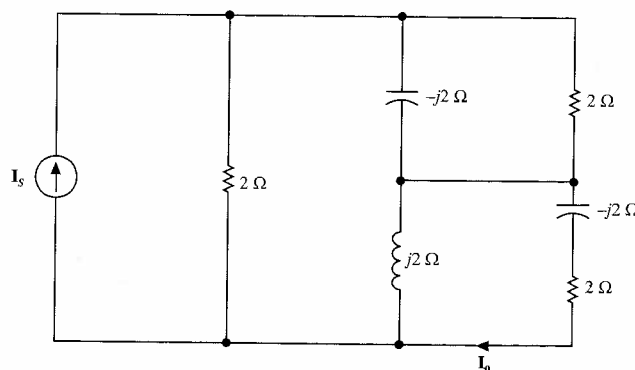


Figura P10.3

10.4 Determine  $V_o$  na rede da Figura P10.4.

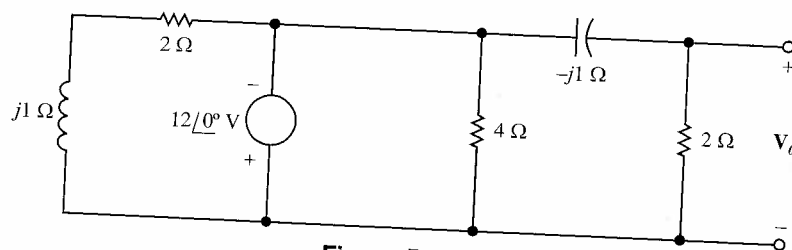


Figura P10.4

10.5 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P10.5.

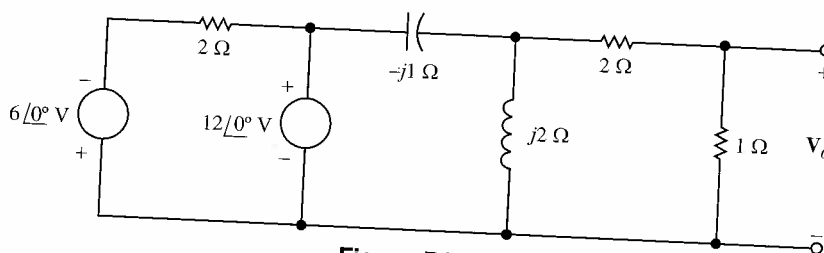


Figura P10.5

10.6 Determine  $V_o$  na rede da Figura P10.6.

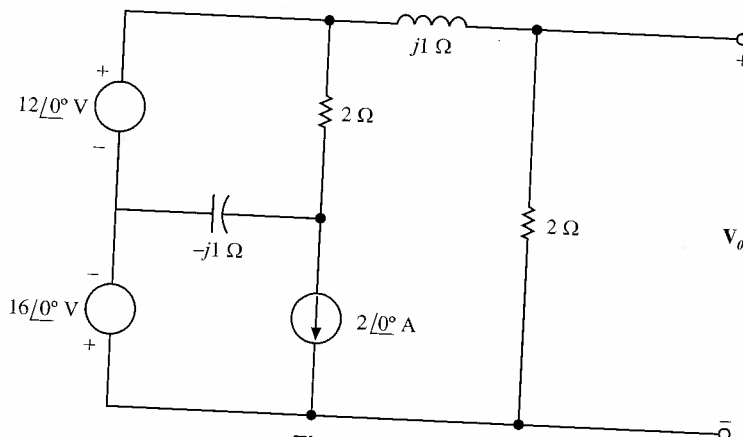


Figura P10.6

10.7 Utilize análise nodal para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P10.7.

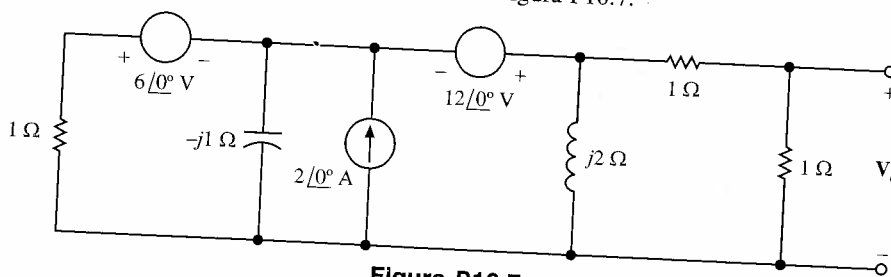


Figura P10.7

10.8 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  na rede da Figura P10.8.

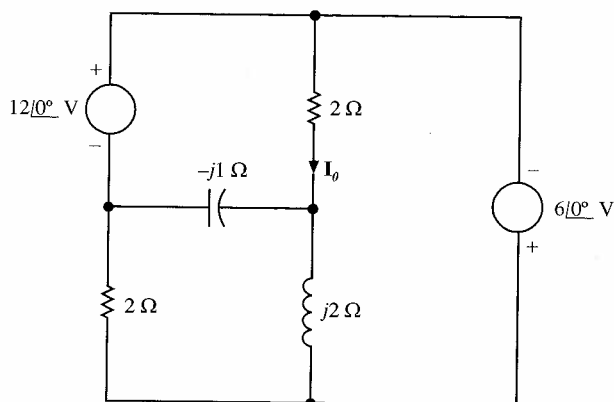


Figura P10.8

10.9 Determine  $V_o$  no circuito Figura P10.9 usando análise nodal.

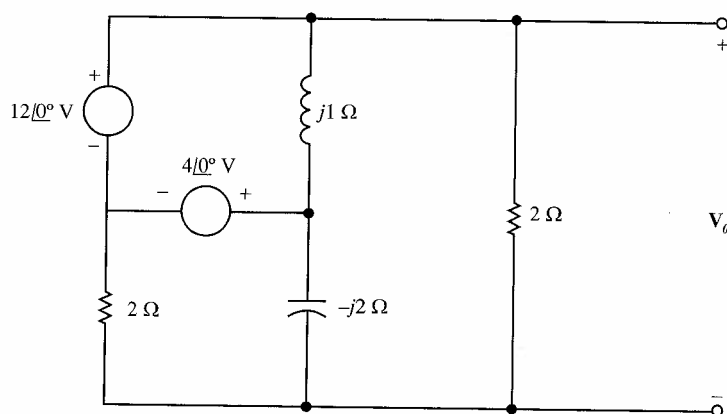


Figura P10.9

10.10 Determine  $I_o$  na rede da Figura P10.10 utilizando análise nodal.

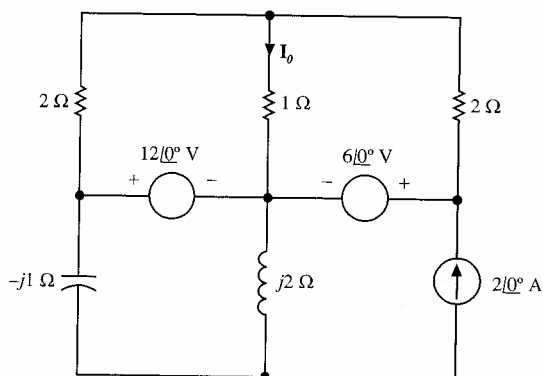


Figura P10.10

10.11 Determine  $V_o$  na rede da Figura P10.11 usando análise nodal.

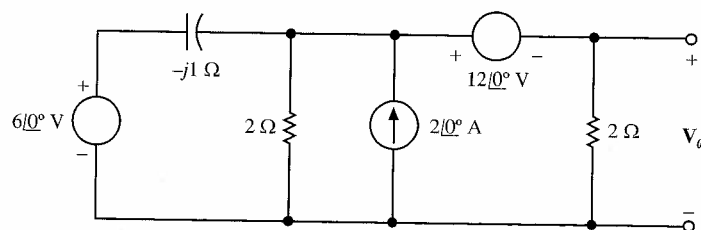


Figura P10.11

10.12 Utilize análise nodal para determinar  $I_o$  no circuito da Figura P10.12.

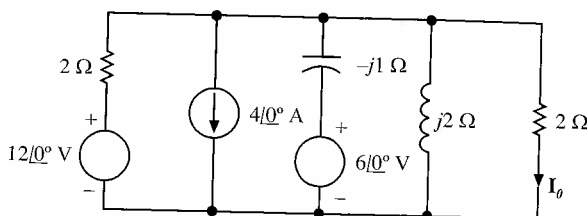


Figura P10.12

10.13 Usando análise nodal, determine  $I_o$  no circuito da Figura P10.13.

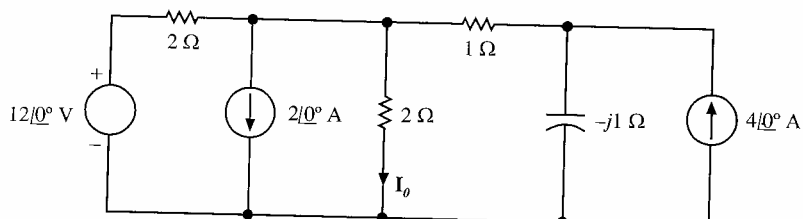


Figura P10.13

10.14 Determine  $V_o$  na rede da Figura P10.14 usando análise nodal.

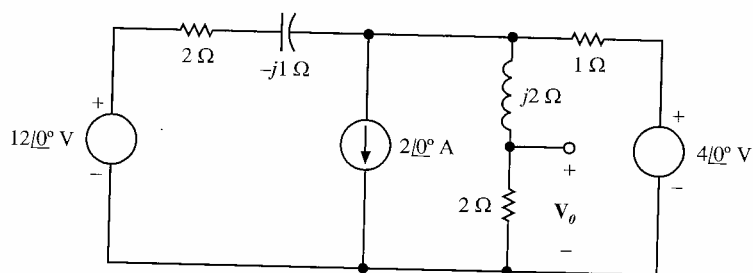


Figura P10.14

10.15 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P10.15 utilizando análise nodal.

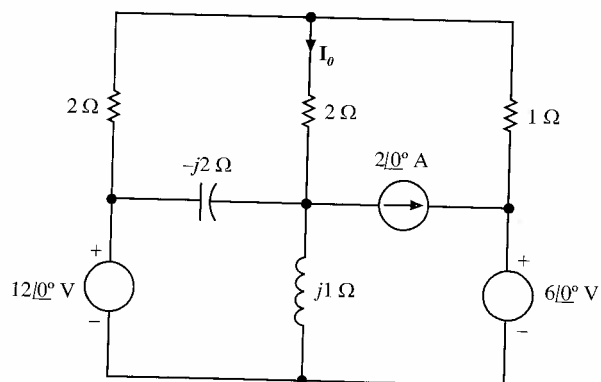
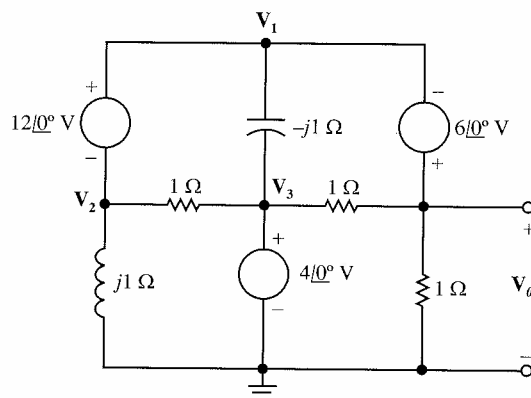


Figura P10.15

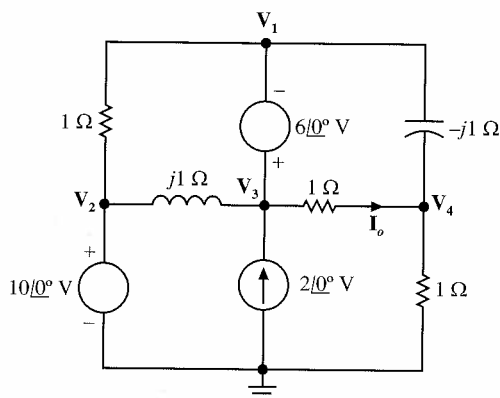


**10.16** Determine  $V_o$  na rede da Figura P10.16 utilizando análise nodal.



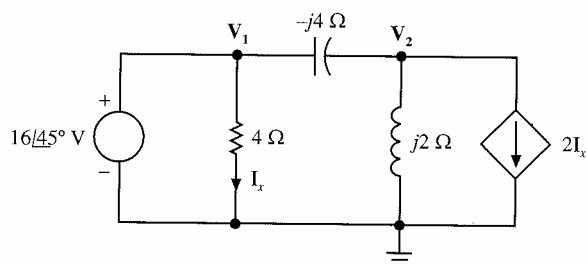
**Figura P10.16**

**10.17** Determine  $I_o$  na rede da Figura P10.17 utilizando análise nodal.



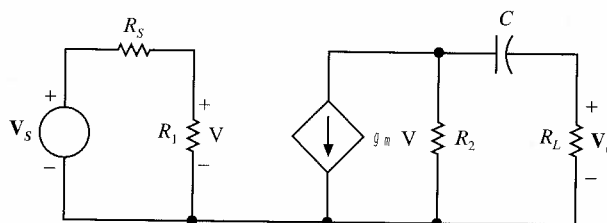
**Figura P10.17**

**10.18** Determine a tensão sobre o indutor no circuito mostrado na Figura P10.18 usando análise nodal.



**Figura P10.18**

**10.19** O circuito de baixa frequência equivalente para um transistor amplificador emissor comum é mostrado na Figura P10.19. Calcule o ganho de tensão  $V_o/V_s$ .



**Figura P10.19**

10.20 Utilize análise nodal para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P10.20.

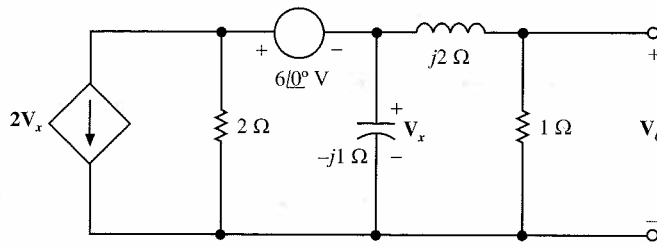


Figura P10.20

10.21 Utilize análise nodal para determinar  $V_o$  na rede da Figura P10.21.

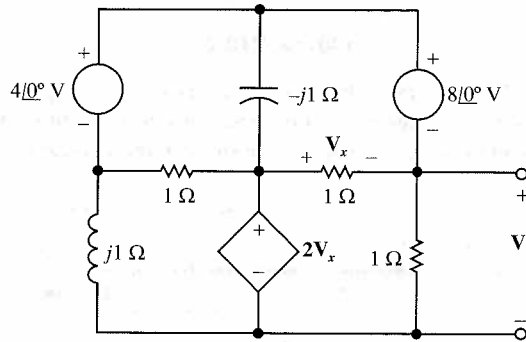


Figura P10.21

10.22 Determine  $I_o$  na rede da Figura P10.22.

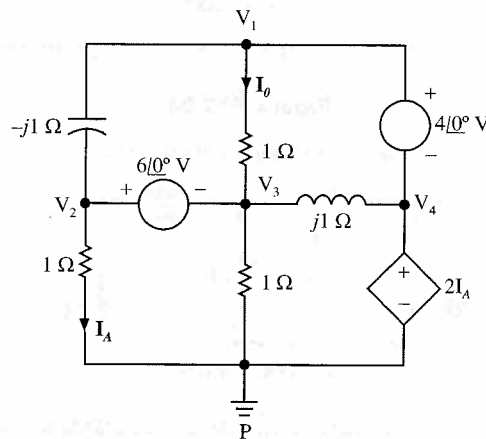


Figura P10.22

10.23 Determine o ganho de tensão  $V_o/V_S$  para o filtro passa-baixas mostrado na Figura P10.23 (e descrito no Capítulo 14) utilizando análise nodal. Assuma que o amp-op é ideal para que o amp-op juntamente com os resistores  $R_3$  e  $R_4$  possam ser representados por um ganho de  $A = (1 + R_4/R_3)$ , usando a representação da Figura 3.33b com  $R_i = \infty$  e  $R_o = 0$ .

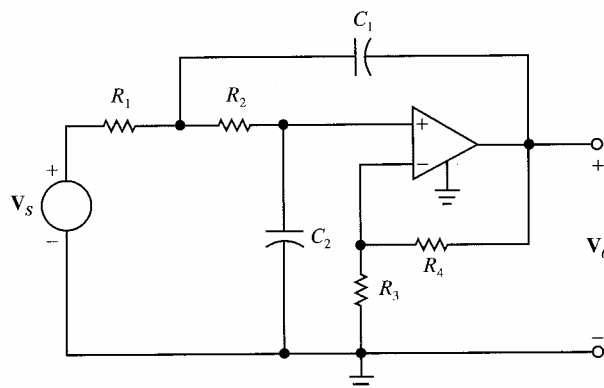


Figura P10.23

- 10.24** Determine o ganho de tensão  $V_o/V_s$  para o filtro passa-altas mostrado na Figura P10.24 (e descrito no Capítulo 14) utilizando análise nodal. Assuma que o amp-op é ideal para que o amp-op juntamente com os resistores  $R_3$  e  $R_4$  possam ser representados por um ganho de  $A = (1 + R_4/R_3)$ , usando a representação da Figura 3.33b com  $R_i = \infty$  e  $R_o = 0$ .

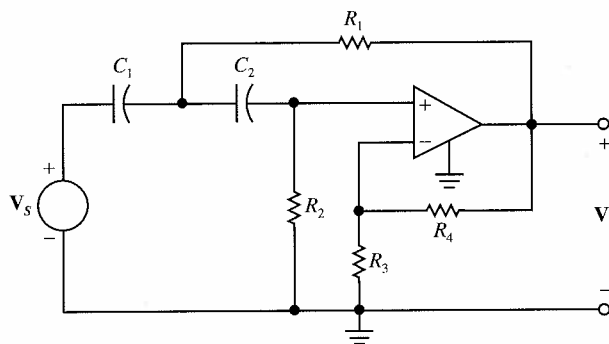


Figura P10.24

- 10.25** Utilize análise de malha para determinar  $V_o$  na rede da Figura P10.25.

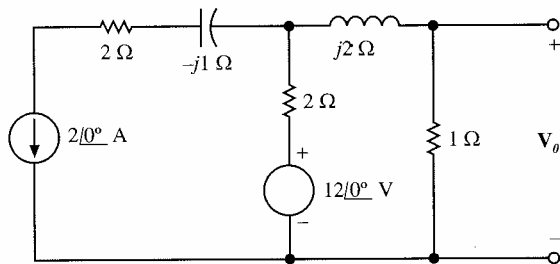


Figura P10.25

- 10.26** Utilize análise de malha para determinar  $V_o$  na rede da Figura P10.26.

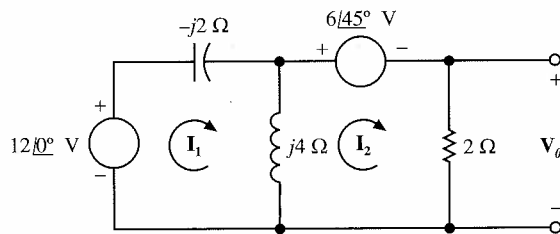


Figura P10.26

10.27 Utilize análise de malha para determinar  $V_o$  no circuito mostrado na Figura P10.27.

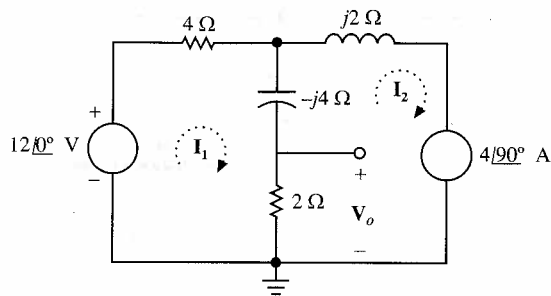


Figura P10.27

10.28 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P10.28 usando análise de malha.

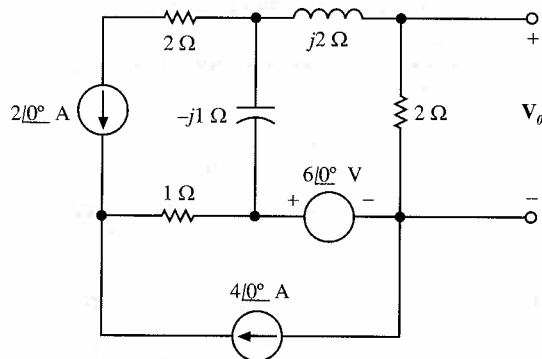


Figura P10.28

10.29 Utilize análise de malha para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P10.29.

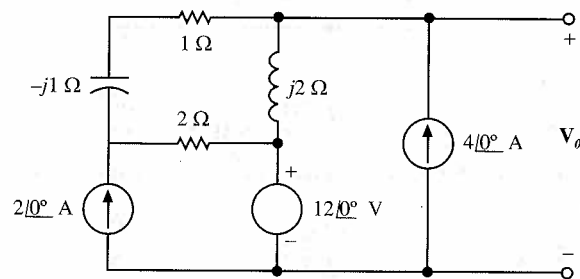


Figura P10.29

10.30 Utilizando análise de malha, determine  $I_o$  na rede da Figura P10.30.

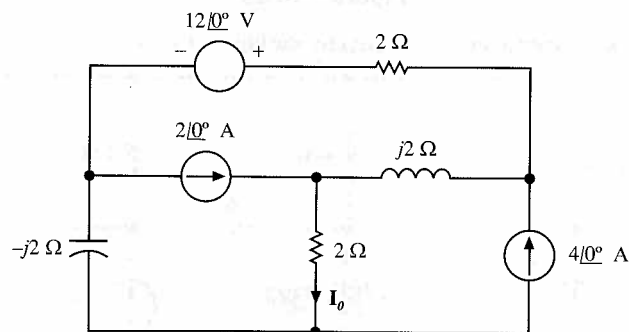
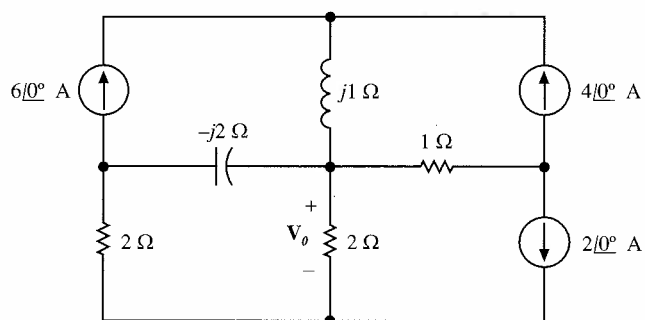


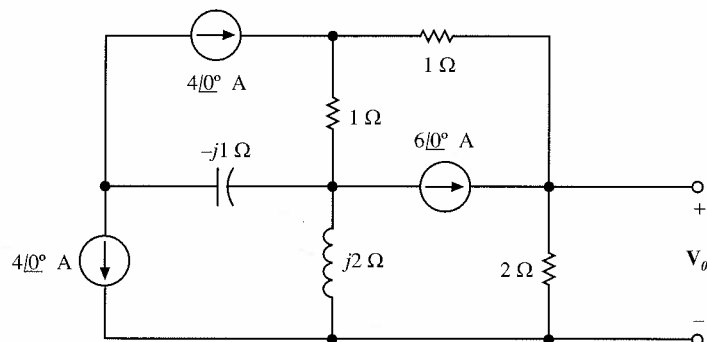
Figura P10.30

**10.31** Utilize análise de malha para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P10.31.



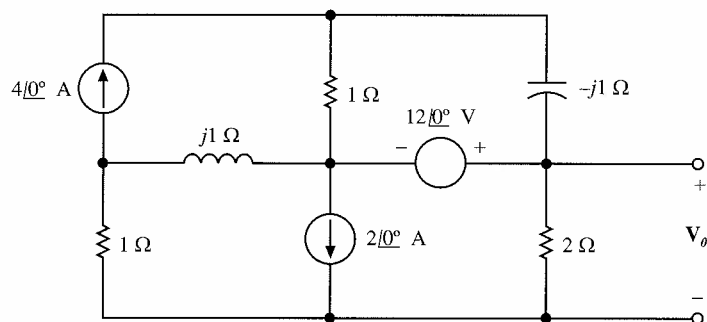
**Figura P10.31**

**10.32** Utilizando análise de laço, determine  $V_o$  na rede da Figura P10.32.



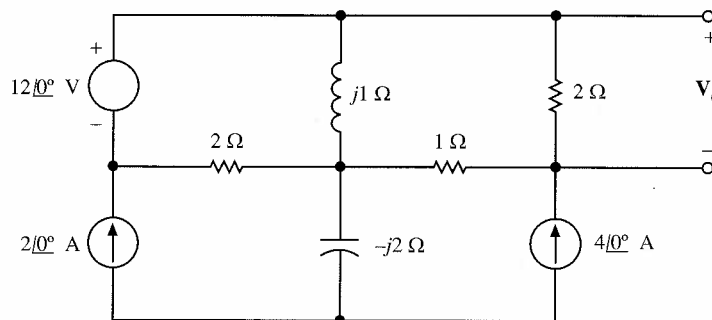
**Figura P10.32**

**10.33** Utilizando análise de laço, determine  $V_o$  no circuito da Figura P10.33.



**Figura P10.33**

**10.34** Utilize análise de laço para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P10.34.



**Figura P10.34**

10.35 Utilize análise de laço para determinar  $V_o$  na rede da Figura P10.35.

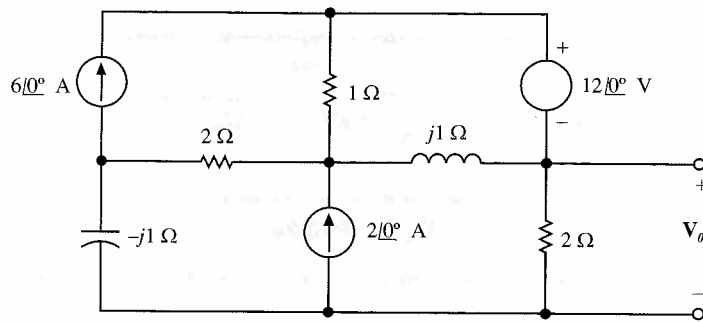


Figura P10.35

10.36 Determine  $V_o$  na rede da Figura P10.36.

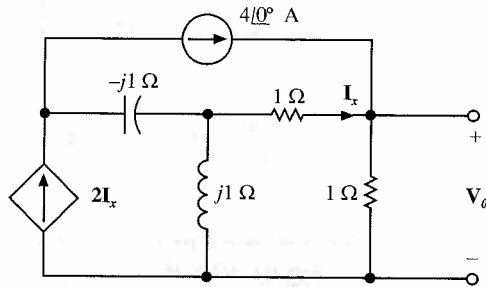


Figura P10.36

10.37 Determine  $V_o$  na rede da Figura P10.37.

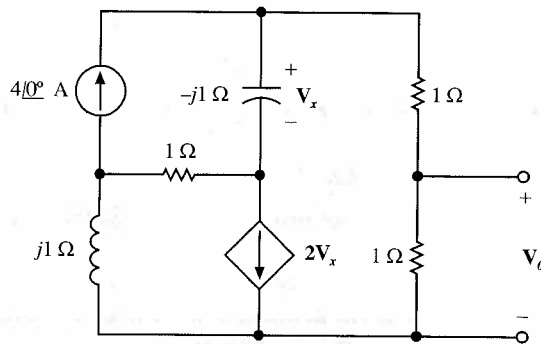


Figura P10.37

10.38 Usando o princípio da superposição, determine  $V_o$  no circuito da Figura P10.38.

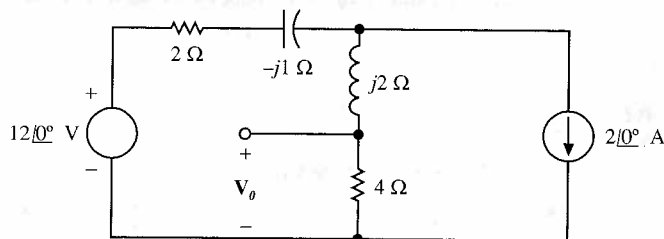


Figura P10.38

10.39 Utilize o princípio da superposição para determinar  $V_o$  na rede da Figura P10.39.

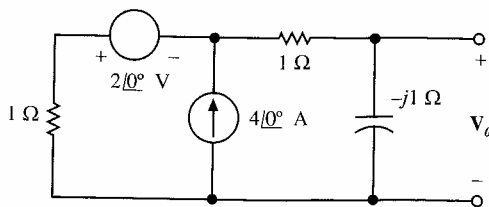


Figura P10.39

10.40 Utilize o princípio da superposição para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P10.40.

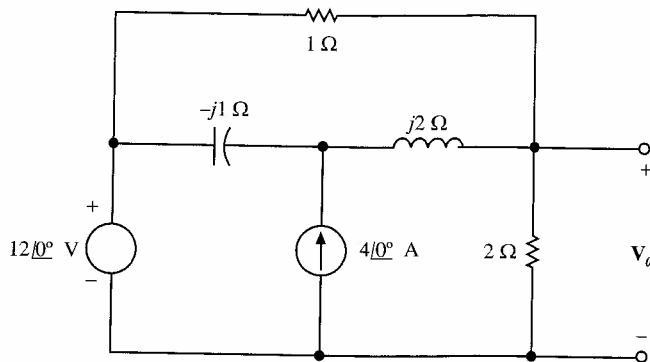


Figura P10.40

10.41 Determine  $V_o$  na rede da Figura P10.41 usando o princípio da superposição.

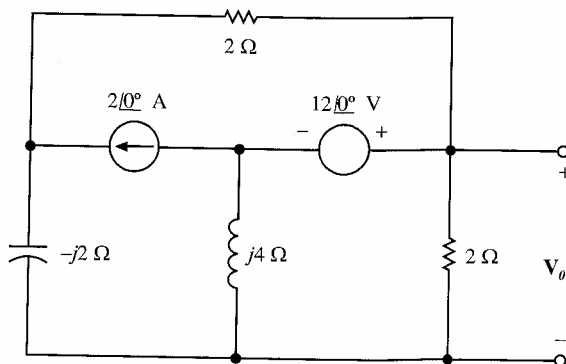


Figura P10.41

10.42 Determine  $V_o$  na rede da Figura P10.42 usando o princípio da superposição.

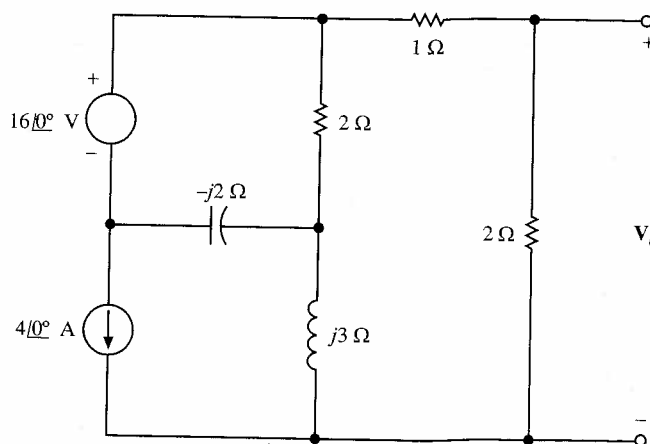


Figura P10.42

- 10.43 Use transformação de fonte para determinar  $V_o$  na rede da Figura P10.11.  
 10.44 Usando transformação de fonte, determine  $I_o$  na rede da Figura P10.12.  
 10.45 Resolva o Problema 10.13 usando transformação de fonte.  
 10.46 Resolva o Problema 10.14 usando transformação de fonte.  
 10.47 Resolva o Problema 10.26 usando o teorema de Thévenin.  
 10.48 Resolva o Problema 10.27 usando o teorema de Thévenin.  
 10.49 Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na rede da Figura P10.49.

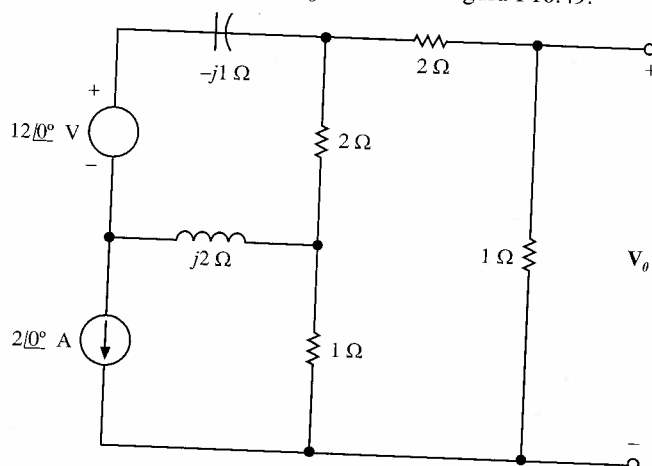


Figura P10.49

- 10.50 Aplique o teorema de Thévenin duas vezes para determinar  $V_o$  no circuito da Figura P10.50.

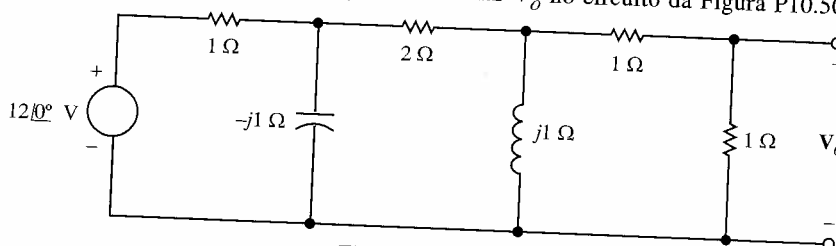


Figura P10.50

- 10.51 Use o teorema de Thévenin para determinar  $V_o$  na rede da Figura P10.51.

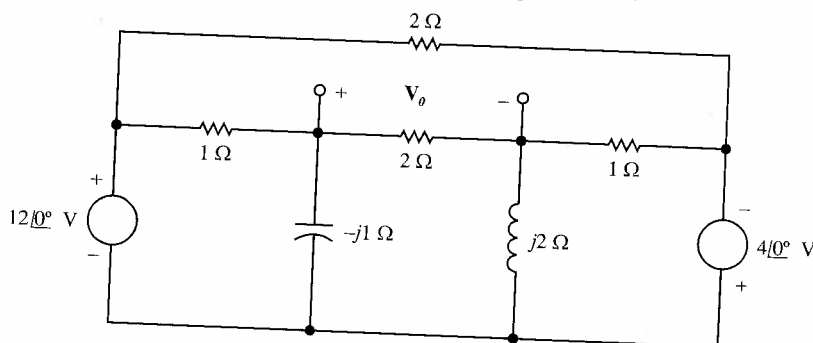
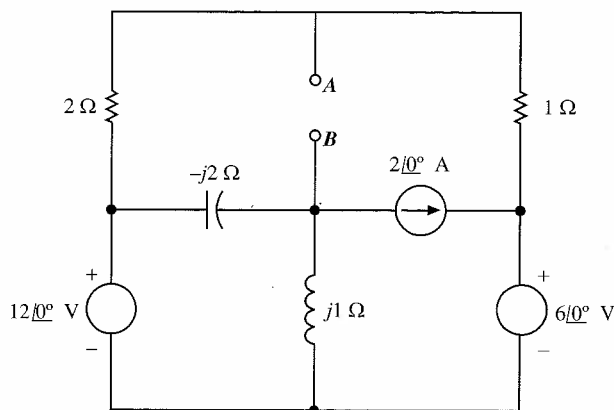


Figura P10.51

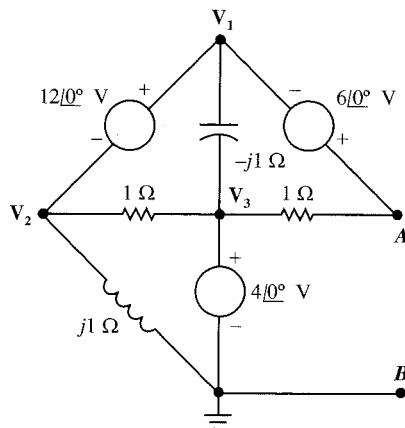


**10.52** Dado o circuito da Figura P10.52, determine o circuito equivalente de Thévenin nos terminais A-B.



**Figura P10.52**

**10.53** Dada a rede da Figura P10.53, determine o equivalente de Thévenin na rede entre os terminais A-B.



**Figura P10.53**

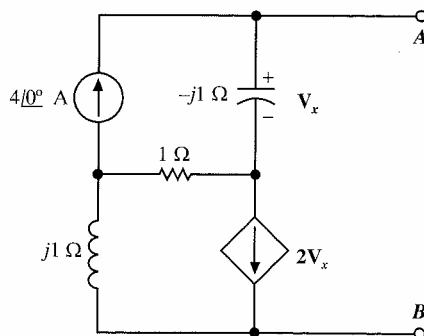
**10.54** Resolva o Problema 10.18 usando o teorema de Thévenin.

**10.55** Resolva o Problema 10.20 usando o teorema de Thévenin.

**10.56** Resolva o Problema 10.21 usando o teorema de Thévenin.

**10.57** Resolva o Problema 10.22 usando o teorema de Thévenin.

**10.58** Ache o equivalente de Thévenin para a rede da Figura P10.58 entre os terminais A-B.



**Figura P10.58**

- 10.59 Determine a corrente no indutor do circuito mostrado na Figura P10.59 usando o teorema de Norton.

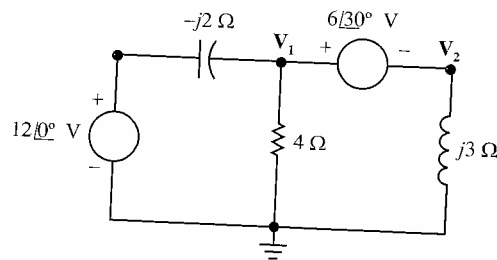


Figura P10.59

- 10.60 Determine  $I_o$  na rede da Figura P10.60 usando o teorema de Norton.

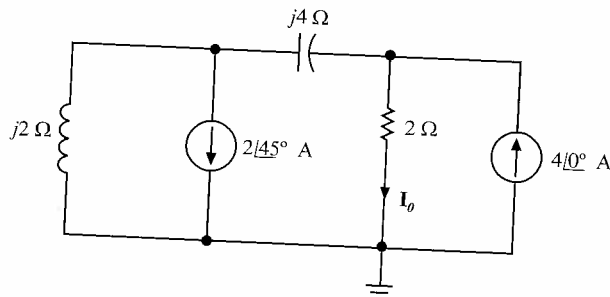


Figura P10.60

- 10.61 Determine  $V_x$  no circuito da Figura P10.61 usando o teorema de Norton.

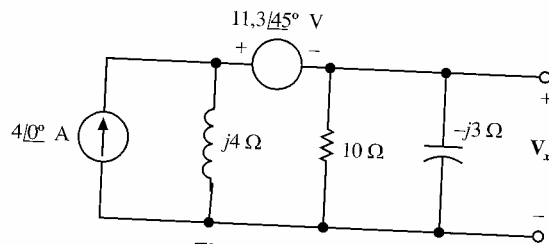


Figura P10.61

- 10.62 Determine o equivalente de Thévenin para a rede da Figura P10.62 entre os terminais A-B.

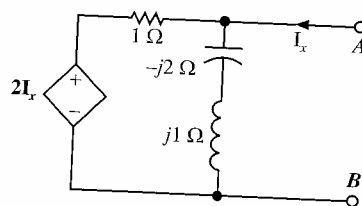


Figura P10.62

- 10.63 Determine o equivalente de Thévenin da rede da Figura P10.63 entre os terminais A-B.

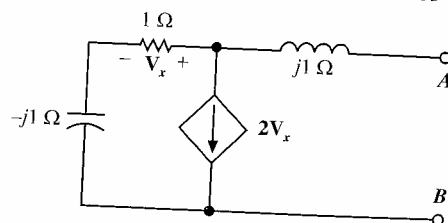
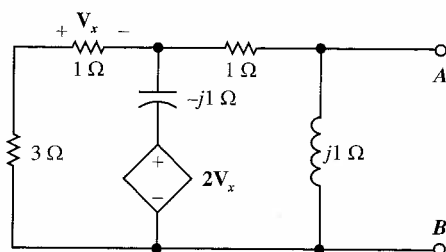


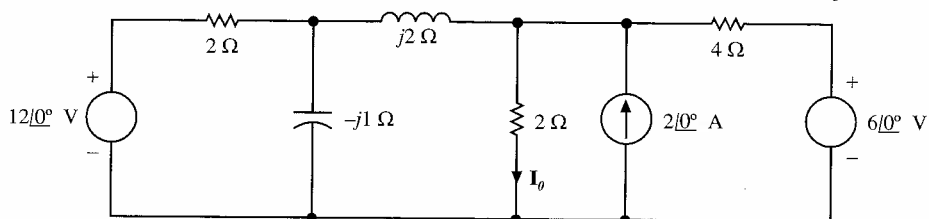
Figura P10.63

**10.64** Determine o equivalente de Thévenin da rede da Figura P10.64 entre os terminais A-B.



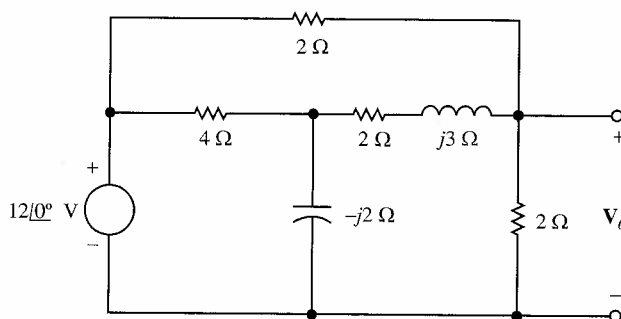
**Figura P10.64**

**10.65** A rede da Figura P10.65 opera em  $f = 400$  Hz. Use PSPICE para determinar a corrente  $I_o$ .



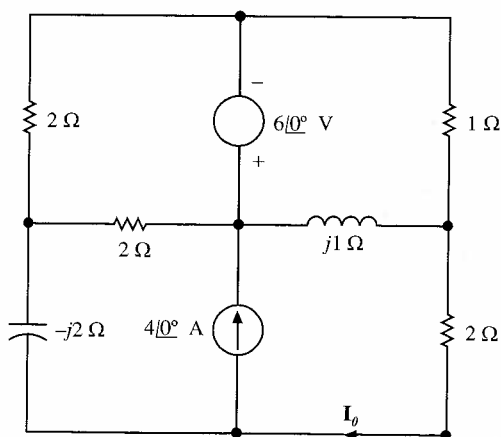
**Figura P10.65**

**10.66** O circuito da Figura P10.66 opera em  $f = 60$  Hz. Use PSPICE para achar a tensão  $V_o$ .



**Figura P10.66**

**10.67** A rede da Figura P10.67 opera em  $f = 400$  Hz. Use PSPICE para determinar a corrente  $I_o$ .



**Figura P10.67**



- 10.72 Use PSPICE para calcular tanto a função de transferência para pequenos sinais  $V_o/V_S$  quanto a tensão de saída  $V_o$  na rede da Figura P10.72.

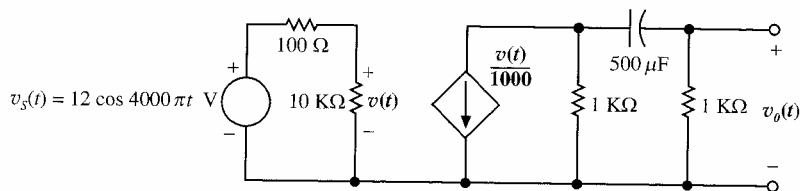


Figura P10.72

- 10.73 A rede da Figura P10.73 opera em  $f = 60$  Hz. Use PSPICE para determinar a corrente  $I_o$ .

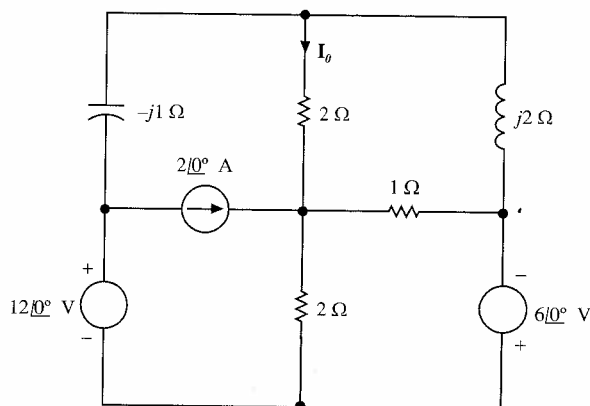


Figura P10.73

- 10.74 A rede da Figura P10.74 opera em  $f = 60$  Hz. Use PSPICE para determinar a tensão  $V_o$ .

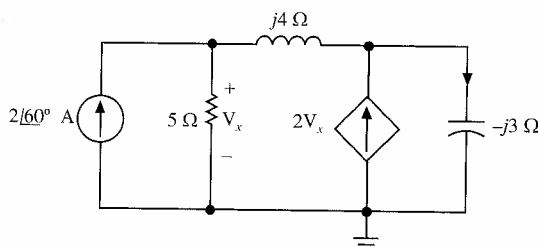


Figura P10.74

- 10.75 A rede da Figura P10.75 opera em 60 Hz. Determine as correntes  $I_o$  e  $I_x$  usando PSPICE.

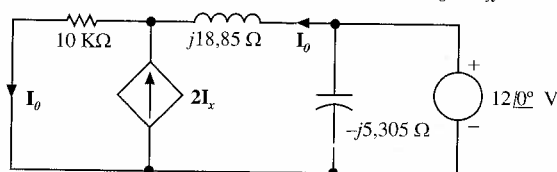


Figura P10.75

- 10.76 O circuito da Figura P10.76 opera em  $f = 60$  Hz. Use PSPICE para calcular a tensão  $V_o$ .

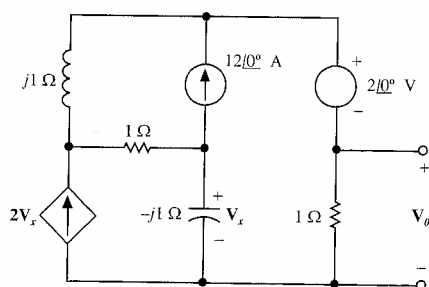


Figura P10.76

# Análise de Potência em Regime Permanente

Nossa preocupação primordial nos capítulos anteriores foi determinar a tensão ou corrente em algum ponto de uma rede. A potência que é fornecida ou dissipada por um componente é também de grande importância em diversas situações. Tipicamente, equipamentos eletro-eletrônicos têm taxas de pico de potência ou de potência máxima instantânea que não podem ser ultrapassadas sem danificar o equipamento.

Em sistemas eletro-eletrônicos, os níveis de potência são diversos. A potência absorvida por um elemento em um chip de circuito integrado pode ser picowatts, enquanto a potência fornecida por uma grande subestação pode chegar a gigawatts. Note que a variação entre esses dois exemplos é consideravelmente grande ( $10^{21}$ ).

Em capítulo anterior, definimos potência instantânea como o produto da tensão pela corrente. Potência média, obtida pela média da potência instantânea, é a taxa média em que a energia é absorvida ou dissipada. No caso dc, onde tanto a corrente como a tensão são constantes, a potência instantânea é igual à potência média. No entanto, como veremos, este não é o caso quando correntes e tensões são funções senoidais do tempo.

Neste capítulo, iremos explorar as muitas ramificações da potência em circuitos ac. Examinamos potência instantânea, potência média, transferência máxima de potência, potência média para formas de ondas não-senoidais, o fator de potência, potência complexa e medição de potência. Por último, considerações a respeito de segurança são introduzidas e discutidas a partir de uma variedade de exemplos.

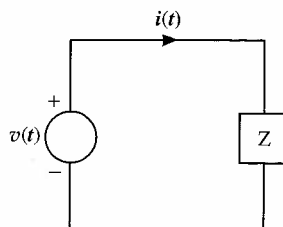
## 11.1 Potência Instantânea

Empregando-se a mesma convenção de sinal empregada nos capítulos anteriores, podemos calcular a potência instantânea fornecida ou dissipada por qualquer elemento como o produto da tensão instantânea sobre o elemento e a corrente instantânea através dele.

Considere o circuito mostrado na Figura 11.1. De um modo geral, tensão e corrente em regime permanente podem ser escritas como

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta_v) \quad (11.1)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \theta_i) \quad (11.2)$$

**Figura 11.1** Rede ac simples.

A potência instantânea é então

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= V_M I_M \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) \end{aligned} \quad (11.3)$$

Empregando-se a seguinte identidade trigonométrica

$$\cos \phi_1 \cos \phi_2 = \frac{1}{2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_1 + \phi_2)] \quad (11.4)$$

concluimos que a potência instantânea pode ser escrita como

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] \quad (11.5)$$

Note que a potência instantânea consiste de dois termos. O primeiro termo é uma constante (ou seja, é independente do tempo), o segundo termo é uma função cosseno do dobro da frequência de excitação. Vamos examinar essa equação mais detalhadamente na Seção 11.2.

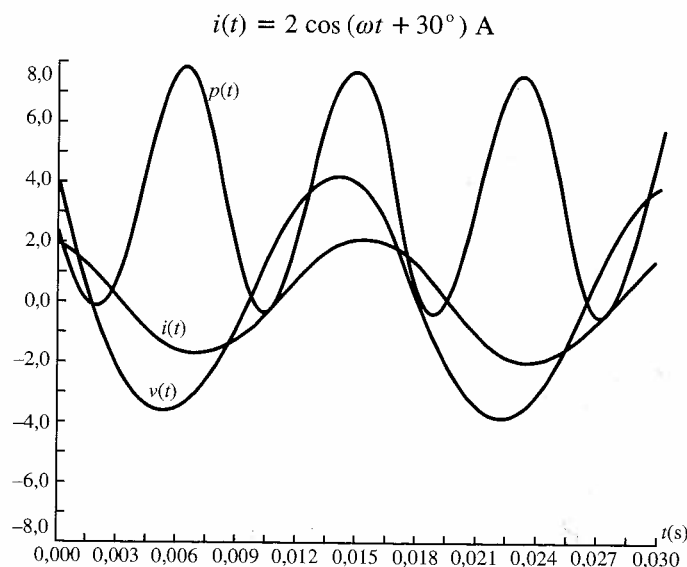
### Exemplo 11.1

O circuito da Figura 11.1 possui os seguintes parâmetros:  $v(t) = 4 \cos(\omega t + 60^\circ)$  V e  $Z = 2 \angle 30^\circ \Omega$ . Desejamos determinar equações para a corrente e a potência instantânea como uma função do tempo e traçar um único gráfico dessas funções com a tensão para que possamos compará-las.

Já que

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{4 \angle 60^\circ}{2 \angle 30^\circ} \\ &= 2 \angle 30^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

então

**Figura 11.2** Curvas de  $v(t)$ ,  $i(t)$  e  $p(t)$  para o circuito no Exemplo 11.1 usando-se  $f = 60$  Hz.

Da Equação 11.5,

$$\begin{aligned} p(t) &= 4[\cos(30^\circ) + \cos(2\omega t + 90^\circ)] \\ &= 3,46 + 4 \cos(2\omega t + 90^\circ) \text{ W} \end{aligned}$$

O gráfico dessa função, juntamente com a tensão e a corrente, são mostrados na Figura 11.2. Como pode ser visto pela figura, a potência instantânea tem um valor médio, e a frequência é duas vezes maior que a tensão e a corrente. ■

## 11.2 Potência Média

O valor médio de qualquer forma de onda (por exemplo, uma função senoidal) pode ser calculado integrando-se a função sobre um período e dividindo-se tal resultado pelo período. Portanto, se a tensão e a corrente são dadas pelas equações 11.1 e 11.2, respectivamente, a potência média é

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) dt \end{aligned} \quad (11.6)$$

onde  $t_0$  é arbitrário,  $T = 2\pi/\omega$  é o período da tensão ou corrente e  $P$  é medida em watts. Na verdade, podemos tirar a média de qualquer forma de onda sobre qualquer número inteiro de períodos de modo que a Equação 11.6 possa ser escrita como

$$P = \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0+nT} V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) dt \quad (11.7)$$

onde  $n$  é um número inteiro positivo.

Empregando-se a Equação 11.5 na expressão 11.6, obtemos

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] dt \quad (11.8)$$

Poderíamos, é claro, manipular a integral indicada; porém, com um pouco de percepção podemos determinar o resultado por inspeção. O primeiro termo é independente de  $t$ , e portanto uma constante na integração. Integrando-se a constante dentro do período e dividindo pelo período simplesmente resulta na constante original. O segundo termo é uma função cosseno. É bem sabido que a média de uma função cosseno sobre um período completo ou um número inteiro de períodos é zero, e portanto o segundo termo na Equação 11.8 desaparece. Tendo em vista tal ocorrido, a Equação 11.8 se reduz a

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.9)$$

Note que uma vez que  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ , o argumento da função cosseno pode ser  $\theta_v - \theta_i$  ou  $\theta_i - \theta_v$ . Além disso, note que  $\theta_v - \theta_i$  é o ângulo da impedância do circuito, como mostrado na Figura 11.1. Portanto, para um circuito puramente resistivo,

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \quad (11.10)$$

e para um circuito puramente reativo,

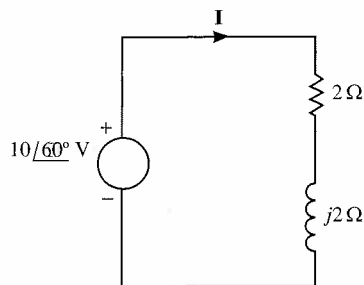
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(90^\circ) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Porque impedâncias puramente reativas não absorvem potência média, elas são chamadas de *elementos sem perda*. As redes puramente reativas operam de forma a armazenar energia durante uma parte do período e liberar energia na outra parte.

### Exemplo 11.2

Desejamos determinar a potência média absorvida pela impedância mostrada na Figura 11.3.





**Figura 11.3** Exemplo de circuito  $RL$ .

A partir da figura, notamos que

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{V_M \angle \theta_v}{2 + j2} = \frac{10 \angle 60^\circ}{2,83 \angle 45^\circ} = 3,53 \angle 15^\circ \text{ A}$$

Portanto,

$$I_M = 3,53 \text{ A} \quad \text{e} \quad \theta_i = 15^\circ$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= \frac{1}{2} (10)(3,53) \cos(60^\circ - 15^\circ) \\ &= 12,5 \text{ W} \end{aligned}$$

Já que o indutor não absorve potência alguma, podemos empregar a Equação 11.10 desde que  $V_M$  em tal equação seja a tensão sobre o resistor. Usando divisão de tensão, obtemos

$$\mathbf{V}_R = \frac{(10 \angle 60^\circ)(2)}{2 + j2} = 7,07 \angle 15^\circ$$

e portanto,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} (7,07)(3,53) \\ &= 12,5 \text{ W} \end{aligned}$$

Além disso, usando a lei de Ohm, poderíamos empregar as expressões

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R}$$

ou

$$P = \frac{1}{2} I_M^2 R$$

onde mais uma vez deve ficar claro que  $V_M$  e  $I_M$  nessas equações se referem à tensão sobre o resistor e a corrente através dele, respectivamente.

### Exemplo 11.3

Para o circuito mostrado na Figura 11.4, desejamos determinar a potência média total absorvida e a potência média total fornecida.

A partir da figura, notamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \frac{12 \angle 45^\circ}{4} = 3 \angle 45^\circ \text{ A} \\ \mathbf{I}_2 &= \frac{12 \angle 45^\circ}{2 - j1} = \frac{12 \angle 45^\circ}{2,24 \angle -26,57^\circ} = 5,37 \angle 71,57^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

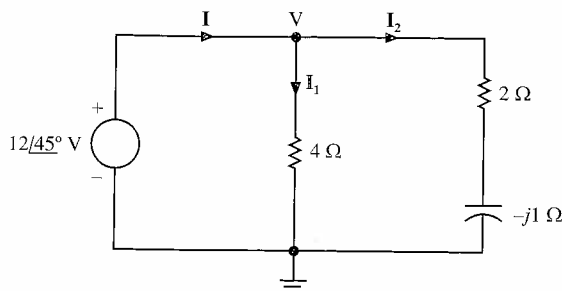


Figura 11.4 Exemplo de circuito para ilustrar o equilíbrio de potência.

e portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \\ &= 3 \angle 45^\circ + 5,37 \angle 71,57^\circ \\ &= 8,16 \angle 62,08^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

A potência média dissipada no resistor de  $4 \Omega$  é

$$P_4 = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{1}{2} (12)(3) = 18 \text{ W}$$

A potência média dissipada no resistor de  $2 \Omega$  é

$$P_2 = \frac{1}{2} I_M^2 R = \frac{1}{2} (5,37)^2 (2) = 28,8 \text{ W}$$

Portanto, a potência total média dissipada é

$$P_A = 18 + 28,8 = 46,8 \text{ W}$$

Note que poderíamos ter calculado a potência dissipada no resistor de  $2 \Omega$  usando  $\frac{1}{2} V_M^2/R$  se tivéssemos primeiramente calculado a tensão sobre o resistor.

A potência média total fornecida pela fonte é

$$\begin{aligned} P_S &= +\frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= +\frac{1}{2} (12)(8,16) \cos(45^\circ - 62,08^\circ) \\ &= +46,8 \text{ W} \end{aligned}$$

Dessa forma, a potência total média fornecida é, obviamente, igual à potência média dissipada. ■

## Exercícios

**E11.1** Determine a potência média dissipada por cada resistor da rede da Figura E11.1.

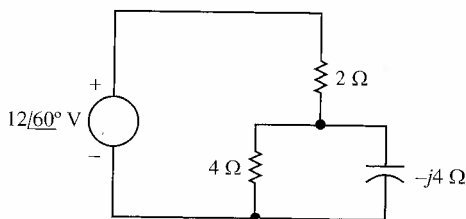


Figura E11.1

*Resp.:*  $P_{2\Omega} = 7,20 \text{ W}$ ,  $P_{4\Omega} = 7,20 \text{ W}$ .

**E11.2** Dada a rede da Figura E11.2, determine a potência média absorvida por cada elemento passivo do circuito e a potência total média fornecida pela fonte de corrente.

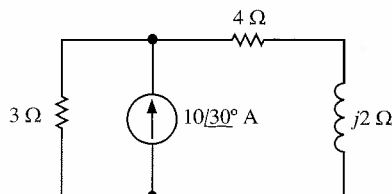


Figura E11.2

Resp.:  $P_{3\Omega} = 56,55 \text{ W}$ ,  $P_{4\Omega} = 33,95 \text{ W}$ ,  $P_L = 0$ ,  $P_{cs} = -90,50 \text{ W}$ .

Quando determinarmos a potência média, se houver mais de uma fonte na rede, poderemos usar qualquer uma das técnicas de análise úteis para se achar a tensão e/ou corrente. No entanto, devemos lembrar que em geral não podemos aplicar o princípio da superposição à potência. Deveríamos, entretanto, mencionar que existe um caso especial em que o princípio da superposição se aplica à potência. Se a corrente for da forma

$$i(t) = I_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + I_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

e se  $n\omega_1 = m\omega_2$ , onde  $n$  e  $m$  são dois números inteiros diferentes, então  $n\omega_1 = 2\pi/(T/n)$  e  $m\omega_2 = 2\pi/(T/m)$ , para que  $\cos \omega_1 t$  tenha  $n$  períodos completos no tempo  $T$  e  $\cos \omega_2 t$  tenha  $m$  períodos completos no tempo  $T$ . Tais senóides estão relacionadas harmonicamente. Esse assunto será discutido em detalhes no Capítulo 18.

A potência média que é dissipada pelo resistor  $R$ , em um intervalo de tempo  $T$ , é dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [I_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + I_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)]^2 R dt$$

onde ambos,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , são periódicos em  $T$ . A equação acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T [I_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1) + I_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \theta_2) \\ &\quad + 2I_1 I_2 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2)] R dt \\ &= \frac{I_1^2}{2} R + \frac{I_2^2}{2} R + \frac{1}{T} \int_0^T \{I_1 I_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \theta_1 + \theta_2] \\ &\quad + I_1 I_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \theta_1 - \theta_2\} R dt \end{aligned}$$

Uma vez que  $(\omega_1 + \omega_2) = (n + m)(2\pi/T)$  e  $(\omega_1 - \omega_2) = (n - m)(2\pi/T)$ , a integral será zero. Portanto,

$$P = \frac{I_1^2}{2} R + \frac{I_2^2}{2} R$$

O princípio da superposição também se aplica se uma, e somente uma, das fontes for dc.

#### Exemplo 11.4

Considere a rede mostrada na Figura 11.5. Desejamos determinar a potência média total absorvida e fornecida por cada elemento.

A partir da figura, notamos que

$$I_2 = \frac{12/\underline{30^\circ}}{2} = 6/\underline{30^\circ} \text{ A}$$

e

$$I_3 = \frac{12/\underline{30^\circ} - 6/\underline{0^\circ}}{j1} = \frac{4,39 + j6}{j1} = 7,43 \underline{-36,19^\circ} \text{ A}$$

A potência dissipada pelo resistor de  $2 \Omega$  é

$$P_2 = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{1}{2} (12)(6) = 36 \text{ W}$$

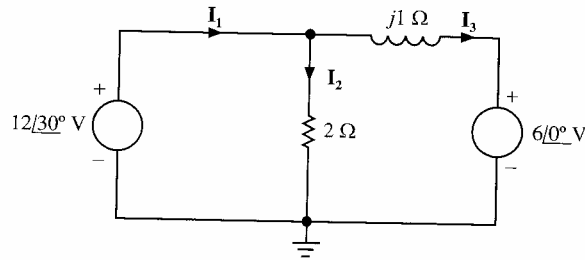


Figura 11.5 Exemplo de circuito  $RL$  com duas fontes.

De acordo com a direção de  $I_3$ , a fonte de  $6\angle 0^\circ$  V está absorvendo potência. A potência que ela consome é dada por

$$\begin{aligned} P_{6\angle 0^\circ} &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= \frac{1}{2} (6)(7,43) \cos[0^\circ - (-36,19^\circ)] \\ &= 18 \text{ W} \end{aligned}$$

Neste ponto, uma questão é levantada: como sabemos se a fonte de  $6\angle 0^\circ$  V está fornecendo potência ao restante da rede ou consumindo potência? A resposta a essa questão é na verdade bem simples. Se empregarmos a convenção que foi adotada nos capítulos anteriores, isto é, se a direção de referência da corrente entrar no terminal positivo da fonte e o resultado for positivo, a fonte estará absorvendo potência. Se o resultado for negativo, a fonte estará fornecendo potência ao restante do circuito. Por outro lado, se a convenção oposta fosse usada, a interpretação do sinal do resultado calculado deve ser invertida. Note que uma vez que a convenção de sinal é adotada e usada, o sinal para a potência média será negativo somente se a diferença do ângulo for maior que  $90^\circ$  (ou seja,  $|\theta_v - \theta_i| > 90^\circ$ ).

Para se obter a potência fornecida à rede, calculamos  $I_1$  como

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ &= 6\angle 30^\circ + 7,43\angle -36,19^\circ \\ &= 11,29\angle -7,07^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Portanto, a potência fornecida pela fonte de  $12\angle 30^\circ$  V usando-se a convenção de gerador de sinal é

$$\begin{aligned} P_s &= +\frac{1}{2} (12)(11,29) \cos(30^\circ + 7,07^\circ) \\ &= +54 \text{ W} \end{aligned}$$

e, dessa maneira, a potência absorvida é igual à potência fornecida. ■

### Exemplo 11.5

A corrente em um resistor de  $2\ \Omega$  é da forma

$$i(t) = 4 \cos(377t + 30^\circ) + 2 \cos(754t + 60^\circ)$$

Desejamos determinar a potência média dissipada pelo resistor.

Já que  $\omega_1 = 377$  e  $\omega_2 = 754$  (ou seja,  $\omega_2 = 2\omega_1$ ), então

$$P = \frac{1}{2} (4^2 + 2^2) = 20 \text{ W}$$

### Exercícios

E11.3 Determine a potência média total consumida e fornecida por cada elemento na rede da Figura E11.3. ■

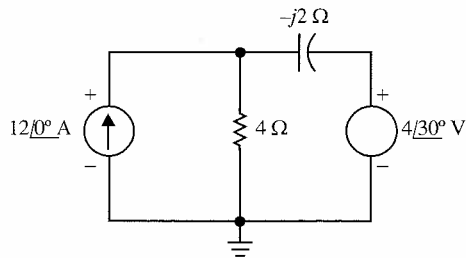


Figura E11.3

**Resp.:**  $P_{cs} = -69,3 \text{ W}$ ,  $P_{Vs} = 19,8 \text{ W}$ ,  $P_{4\Omega} = 49,5 \text{ W}$ ,  $P_C = 0$ .

**E11.4** Dada a rede da Figura E11.4, determine a potência média total consumida ou fornecida por cada elemento.

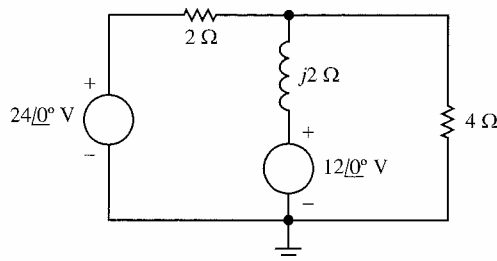


Figura E11.4

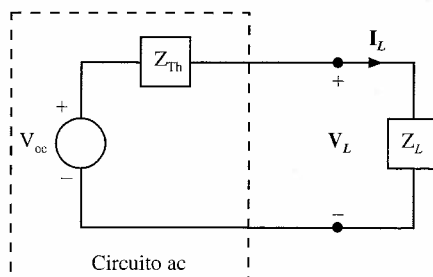
**Resp.:**  $P_{24\angle 0^\circ} = -55,4 \text{ W}$ ,  $P_{12\angle 0^\circ} = 5,5 \text{ W}$ ,  $P_{2\Omega} = 22,1 \text{ W}$ ,  $P_{4\Omega} = 27,8 \text{ W}$ ,  $P_L = 0$ .

### 11.3 Transferência Máxima de Potência Média

No nosso estudo de redes resistivas mostramos o problema de transferência máxima de potência para uma carga resistiva. Mostramos que, se a rede com exceção da carga fosse representada por um circuito equivalente de Thévenin, a transferência máxima de potência resultaria se o valor resistivo da carga fosse igual ao da resistência equivalente de Thévenin (ou seja,  $R_L = R_{Th}$ ). Vamos agora reexaminar tal assunto dentro do contexto atual para determinar a impedância de carga para a rede mostrada na Figura 11.6, que resultará em potência média máxima sendo consumida pela impedância de carga  $Z_L$ .

A equação para a potência média na carga é

$$P_L = \frac{1}{2} V_L I_L \cos(\theta_{V_L} - \theta_{i_L}) \quad (11.11)$$



**Figura 11.6** Circuito usado para examinar a transferência máxima de potência.

A corrente e tensão de fasor na carga são dadas pelas expressões

$$I_L = \frac{V_{oc}}{Z_{Th} + Z_L} \quad (11.12)$$

$$V_L = \frac{V_{oc} Z_L}{Z_{Th} + Z_L} \quad (11.13)$$

onde

$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th} \quad (11.14)$$

e

$$Z_L = R_L + jX_L \quad (11.15)$$

As magnitudes da corrente e tensão fasoriais são dadas pelas expressões

$$I_L = \frac{V_{oc}}{[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^{1/2}} \quad (11.16)$$

$$V_L = \frac{V_{oc}(R_L^2 + X_L^2)^{1/2}}{[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^{1/2}} \quad (11.17)$$

Os ângulos de fase para a corrente e tensão fasoriais estão incluídos em  $(\theta_{V_L} - \theta_{I_L})$ . Observe também que  $\theta_{V_L} - \theta_{I_L} = \theta_{Z_L}$  e além disso

$$\cos \theta_{Z_L} = \frac{R_L}{[R_L^2 + X_L^2]^{1/2}} \quad (11.18)$$

Substituindo-se as equações 11.16 a 11.18 na Equação 11.11, tem-se

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{V_{oc}^2 R_L}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \quad (11.19)$$

o que poderia, é claro, ser obtido diretamente da Equação (11.16) usando-se  $\frac{1}{2} I_L^2 R_L$ . Mais uma vez, uma rápida consideração do problema vai nos poupar algum trabalho. Do ponto de vista da maximização de  $P_L$ ,  $V_{oc}$  é uma constante. A quantidade  $(X_{Th} + X_L)$  não consome potência e, portanto, qualquer valor diferente de zero dessa quantidade somente serve para reduzir  $P_L$ . Dessa forma, podemos eliminar esse termo selecionando  $X_L = -X_{Th}$ . Nosso problema se reduz então a maximizar

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{V_{oc}^2 R_L}{(R_L + R_{Th})^2} \quad (11.20)$$

No entanto, esta é a mesma quantidade que maximizamos no caso puramente resistivo selecionando  $R_L = R_{Th}$ . Portanto, para uma transferência máxima de potência média para a carga mostrada na Figura 11.6,  $Z_L$  poderia ser escolhida tal que

$$Z_L = R_L + jX_L = R_{Th} - jX_{Th} = Z_{Th}^* \quad (11.21)$$

Finalmente, se a impedância da carga é puramente resistiva (ou seja,  $X_L = 0$ ), a condição para a transferência máxima de potência média pode ser derivada a partir da expressão

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0$$

onde  $P_L$  é a expressão na Equação 11.19 com  $X_L = 0$ . O valor de  $R_L$  que maximiza  $P_L$  na condição  $X_L = 0$  é

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + X_{Th}^2} \quad (11.22)$$

### Exemplo 11.6

Dado o circuito da Figura 11.7a, desejamos encontrar o valor de  $Z_L$  para uma transferência máxima de potência média. Além disso, desejamos determinar o valor de potência média máxima transferida para a carga.

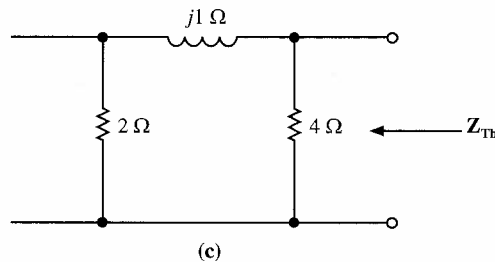
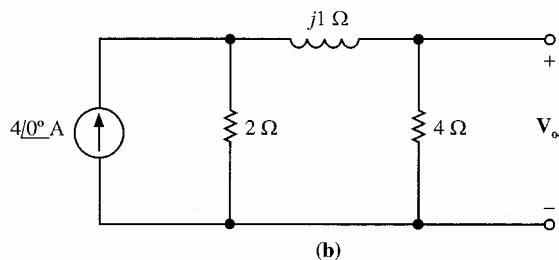
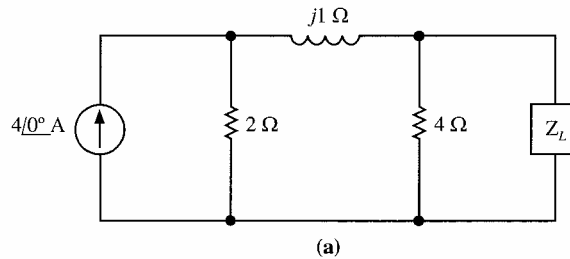
Para resolver esse problema, formamos uma equivalente de Thévenin para a carga. O circuito da Figura 11.7b é usado para calcular a tensão de circuito aberto

$$\mathbf{V}_{oc} = \frac{4 \angle 0^\circ (2)}{6 + j1} (4) = 5,28 \angle -9,46^\circ \text{ V}$$

A impedância equivalente de Thévenin pode ser derivada do circuito da Figura 11.7c. Como mostrado na figura,

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{4(2 + j1)}{6 + j1} = 1,40 + j0,43 \, \Omega$$

Portanto,  $\mathbf{Z}_L$  para uma transferência máxima de potência média é



**Figura 11.7** Circuitos usados para ilustrar transferência máxima de potência média.

$$\mathbf{Z}_L = 1,40 - j0,43 \, \Omega$$

Para o valor de  $\mathbf{Z}_L$  acima, a corrente na carga é

$$\mathbf{I} = \frac{5,28 \angle -9,46^\circ}{2,8} = 1,89 \angle -9,46^\circ \text{ A}$$

Portanto, a potência média máxima transferida para a carga é

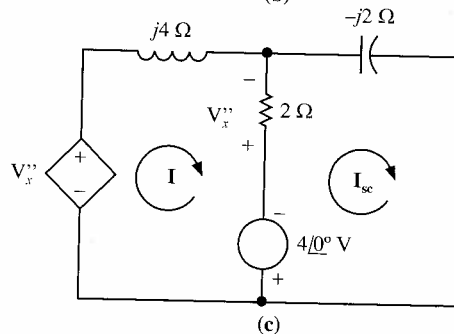
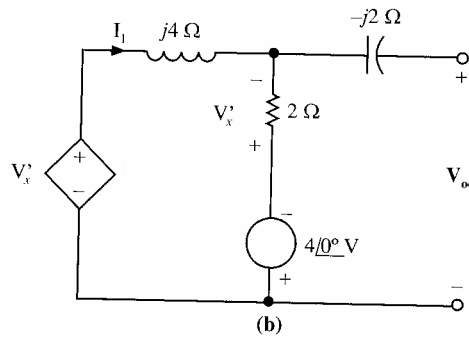
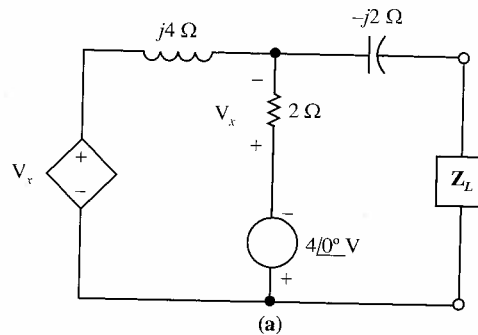
$$P_L = \frac{1}{2} I_M^2 R_L = \frac{1}{2} (1,89)^2 (1,4) = 2,50 \text{ W}$$

### Exemplo 11.7

Para o circuito mostrado na Figura 11.8a, desejamos achar o valor de  $\mathbf{Z}_L$  para uma transferência máxima de potência média. Além disso, vamos determinar o valor de potência média máxima fornecido à carga.

Vamos primeiramente reduzir o circuito, com a exceção da carga, a um circuito equivalente de Thévenin. A tensão de circuito aberto pode ser calculada a partir da Figura 11.8b. As equações para o circuito são

$$\begin{aligned} V'_x + 4 &= (2 + j4)I_1 \\ V'_x &= -2I_1 \end{aligned}$$



**Figura 11.8** Circuitos para ilustrar a transferência máxima de potência média.

Resolvendo para  $I_1$ , obtém-se

$$I_1 = \frac{1 \angle -45^\circ}{\sqrt{2}}$$

A tensão de circuito aberto é então

$$\begin{aligned} V_{oc} &= 2I_1 - 4 \angle 0^\circ \\ &= \sqrt{2} \angle -45^\circ - 4 \angle 0^\circ \\ &= -3 - j1 \\ &= -3,16 \angle 18,43^\circ \text{ V} \end{aligned}$$



A corrente de curto-circuito pode ser derivada da Figura 11.8c. As equações para esse circuito são

$$\begin{aligned} V_x'' + 4 &= (2 + j4)\mathbf{I} - 2\mathbf{I}_{sc} \\ -4 &= -2\mathbf{I} + (2 - j2)\mathbf{I}_{sc} \\ V_x'' &= -2(\mathbf{I} - \mathbf{I}_{sc}) \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações para  $\mathbf{I}_{sc}$ , tem-se

$$\mathbf{I}_{sc} = -(1 + j2) \text{ A}$$

A impedância equivalente de Thévenin é então

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{3 + j1}{1 + j2} = 1 - j1 \Omega$$

Portanto, para uma transferência máxima de potência média, a impedância da carga deveria ser

$$\mathbf{Z}_L = 1 + j1 \Omega$$

A corrente nessa carga  $\mathbf{Z}_L$  é então

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{oc}}{\mathbf{Z}_{Th} + \mathbf{Z}_L} = \frac{-3 - j1}{2} = -1,58 \angle 18,43^\circ \text{ A}$$

Desse modo, a transferência máxima de potência média transferida à carga é

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2}(1,58)^2 (1) \\ &= 1,25 \text{ W} \end{aligned}$$

## Exercícios

**E11.5** Dada a rede da Figura E11.5, determine  $\mathbf{Z}_L$  para uma transferência máxima de potência média total transferida para a carga.

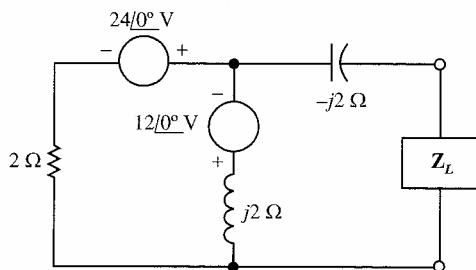


Figura E11.5

*Resp.:*  $\mathbf{Z}_L = 1 + j1 \Omega$ ,  $P_L = 44,94 \text{ W}$ .

**E11.6** Determine  $\mathbf{Z}_L$  para uma transferência máxima de potência média e a potência média máxima transferida para a carga na rede da Figura E11.6.

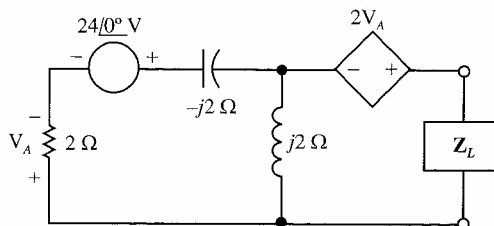


Figura E11.6

*Resp.:*  $\mathbf{Z}_L = 2 + j2 \Omega$ ,  $P_L = 180 \text{ W}$ .

## 11.4 Valores Eficazes ou rms

Nas seções anteriores deste capítulo, mostramos que a potência média consumida por uma carga resistiva é diretamente dependente do tipo, ou tipos, de fontes que estão fornecendo potência à carga. Por exemplo, se a fonte for dc, a potência média consumida será  $I^2 R$ , e se a fonte for senoidal, a potência será  $\frac{1}{2} I_M^2 R$ . Apesar de esses dois tipos de formas de onda serem extremamente importantes, elas não são de modo algum as únicas formas de ondas que encontraremos na análise de circuitos. Portanto, uma técnica com a qual possamos comparar a *eficiência* de diferentes fontes no fornecimento de potência a uma carga resistiva seria consideravelmente útil.

A fim de conseguir fazer tal comparação, definimos o que é chamado de *valor eficaz de uma onda periódica*. Embora tanto corrente quanto tensão pudessem ser usadas, empregaremos corrente na definição. Desse modo, definimos o valor eficaz de uma corrente periódica como uma constante, ou valor dc, que fornece a mesma potência média a um resistor  $R$ . Vamos chamar a corrente constante  $I_{ef}$ . A potência média então fornecida ao resistor como resultado dessa corrente é

$$P = I_{ef}^2 R$$

Do mesmo modo, a potência média fornecida a um resistor por uma corrente periódica  $i(t)$  é

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) R dt$$

Equacionando essas duas expressões, achamos que

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt} \quad (11.23)$$

Note que esse valor eficaz é achado determinando-se o *quadrado* da corrente, calculando-se então a *média* ou valor médio, e finalmente tirando a *raiz* quadrada. Assim, ao “ler” a Equação matemática 11.23, estamos determinando a raiz quadrada do valor quadrático médio, a qual abreviaremos como rms (*root mean square*), e portanto  $I_{ef}$  é chamada de  $I_{rms}$ .

Uma vez que o nível dc é constante, ele é também seu valor eficaz (ou rms). Vamos agora determinar o valor rms de outras formas de onda. A mais importante forma de onda é a senóide, portanto, vamos analisar esse caso particular no próximo exemplo.

### Exemplo 11.8

Desejamos calcular o valor rms da forma de onda  $i(t) = I_M \cos(\omega t - \theta)$ , a qual tem um período de  $T = 2\pi/\omega$ .

Substituindo essas expressões na Equação 11.23, tem-se

$$I_{rms} = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \cos^2(\omega t - \theta) dt \right]^{1/2}$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi,$$

descobrimos que a equação acima pode ser expressa como

$$I_{rms} = I_M \left\{ \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t - 2\theta) \right] dt \right\}^{1/2}$$

Já que sabemos que o valor médio ou média de uma curva cosseno é zero,

$$\begin{aligned} I_{rms} &= I_M \left( \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2} dt \right)^{1/2} \\ &= I_M \left[ \frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi/\omega} \right]^{1/2} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (11.24)$$

Portanto, o valor rms de uma senóide é igual ao valor máximo dividido por  $\sqrt{2}$ . Dessa forma, uma corrente senoidal com um valor máximo de  $I_M$  fornece a mesma potência média a um resistor  $R$  que uma corrente dc com um valor de  $I_M/\sqrt{2}$ . ■

Usando-se os valores rms para tensão e corrente, a potência média pode ser escrita de forma geral

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.25)$$

A potência dissipada pelo resistor  $R$  é

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \quad (11.26)$$

Manipulando-se tensões e correntes em numerosas aplicações elétricas, é importante que saibamos se os valores referidos são máximos, médios, rms ou alguma outra coisa qualquer. Por exemplo, as tomadas elétricas ac normais de 120 V têm um valor rms de 120 V, um valor médio de 0 V e um valor máximo de  $120\sqrt{2}$  V.

Enfim, se a corrente em um resistor  $R$  é composta da soma de senóides harmonicamente relacionadas, a potência consumida pelo resistor pode ser expressa como

$$P = (I_{1\text{rms}}^2 + I_{2\text{rms}}^2 + \dots + I_{n\text{rms}}^2) R \quad (11.27)$$

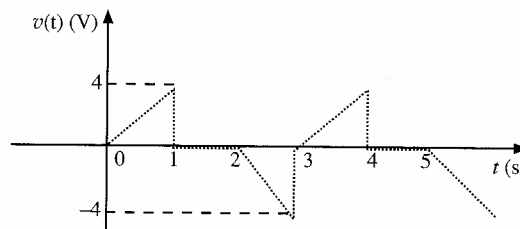
onde o valor rms da corrente total é

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{I_{1\text{rms}}^2 + I_{2\text{rms}}^2 + \dots + I_{n\text{rms}}^2} \quad (11.28)$$

Cada componente representa uma corrente de frequência diferente.

### Exemplo 11.9

Desejamos calcular o valor rms da forma de onda de tensão mostrada na Figura 11.9.



**Figura 11.9** Forma de onda usada para ilustrar valores rms.

A forma de onda é periódica com o período  $T = 3$  s. A equação para a tensão no intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 3$  s é

$$v(t) = \begin{cases} 4t \text{ V} & 0 < t \leq 1 \text{ s} \\ 0 \text{ V} & 1 < t \leq 2 \text{ s} \\ -4t + 8 \text{ V} & 2 < t \leq 3 \text{ s} \end{cases}$$

O valor rms é

$$\begin{aligned} V_{\text{rms}} &= \left\{ \frac{1}{3} \left[ \int_0^1 (4t)^2 dt + \int_1^2 (0)^2 dt + \int_2^3 (8 - 4t)^2 dt \right] \right\}^{1/2} \\ &= \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{16t^3}{3} \Big|_0^1 + \left( 64t - \frac{64t^2}{2} + \frac{16t^3}{3} \right) \Big|_2^3 \right) \right]^{1/2} \\ &= 1,89 \text{ V} \end{aligned}$$

### Exemplo 11.10

Determine o valor rms da forma de onda de corrente da Figura 11.10 e utilize tal valor para calcular a potência média fornecida a um resistor de  $2 \Omega$  através do qual essa corrente está fluindo.

A forma de onda de corrente é periódica com um período de  $T = 4$  s. O valor rms é

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \left\{ \frac{1}{4} \left[ \int_0^2 (4)^2 dt + \int_2^4 (-4)^2 dt \right] \right\}^{1/2} \\ &= \left[ \frac{1}{4} \left( 16t \Big|_0^2 + 16t \Big|_2^4 \right) \right]^{1/2} \\ &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

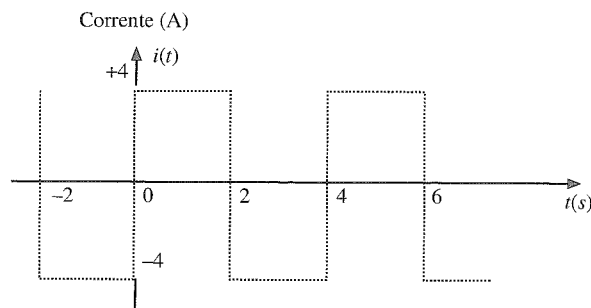


Figura 11.10 Forma de onda usada para ilustrar valores rms.

A potência média fornecida ao resistor de  $2 \Omega$  com tal corrente é

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = (4)^2 (2) = 32 \text{ W}$$

### Exemplo 11.11

Desejamos encontrar o valor rms da corrente

$$i(t) = 12 \sin 377t + 6 \sin (754t + 30^\circ) \text{ A}$$

Uma vez que as frequências das duas formas de onda senoidais são diferentes,

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}}^2 &= I_{1\text{rms}}^2 + I_{2\text{rms}}^2 \\ &= \left( \frac{12}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{6}{\sqrt{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_{\text{rms}} = 9,49 \text{ A}$$

### Exercícios

E11.7 Calcule o valor rms da forma de onda de tensão mostrada na Figura E11.7.

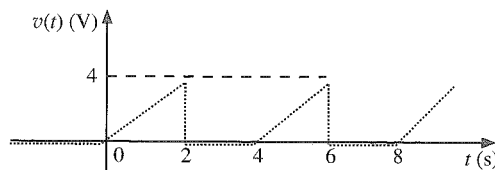


Figura E11.7

Resp.:  $V_{\text{rms}} = 1,633 \text{ V}$ .

E11.8 A forma de onda de corrente na Figura E11.8 está fluindo através de um resistor de  $4 \Omega$ . Calcule a potência média fornecida ao resistor.

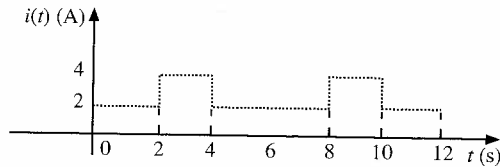


Figura E11.8

Resp.:  $P = 32 \text{ W}$ .

- E11.9** A forma de onda de corrente na Figura E11.9 está fluindo através de um resistor de  $10 \Omega$ . Calcule a potência média fornecida ao resistor.

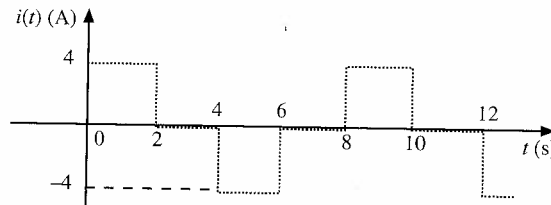


Figura E11.9

Resp.:  $P = 80 \text{ W}$ .

- E11.10** A corrente  $i(t)$  está fluindo através de um resistor de  $4 \Omega$ . Determine a potência dissipada pelo resistor, caso

$$i(t) = 4 \sin(377t - 30^\circ) + 6 \cos(754t - 45^\circ) \text{ A}$$

Resp.:  $P = 104 \text{ W}$ .

## 11.5 O Fator de Potência

O fator de potência é uma grandeza de muita importância. Sua importância se baseia em parte no impacto econômico que ela tem entre os usuários industriais de grandes quantidades de potência. Nesta seção, vamos definir cuidadosamente tal termo e então ilustrar seu significado mediante alguns exemplos práticos.

Na Seção 11.4, mostramos que uma carga operando em regime permanente ac fornece uma potência média de

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Iremos agora definir mais detalhadamente os termos dessa importante equação. O produto  $V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$  é referido como a potência aparente. Enquanto o termo  $\cos(\theta_v - \theta_i)$  é uma grandeza adimensional e a unidade de  $P$  é watts, a potência aparente é normalmente escrita em volt-ampères (VA) ou quilovolt-ampères (kVA) para ser distinguida da potência média.

Definimos agora o *fator de potência* (fp) como a razão de uma potência média pela potência aparente; isto é,

$$\text{fp} = \frac{P}{V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}} = \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.29)$$

onde

$$\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos \theta_{z_L} \quad (11.30)$$

o ângulo  $\theta_v - \theta_i = \theta_{z_L}$  é o ângulo de fase da impedância da carga e é freqüentemente referido como o *ângulo do fator de potência*. Os dois limites extremos para tal ângulo correspondem a uma carga puramente resistiva onde  $\theta_{z_L} = 0$ , o fp é 1, e a puramente carga reativa onde  $\theta_{z_L} = \pm 90^\circ$  e o fp é 0. É possível ter um fp unitário para uma carga contendo elementos  $R$ ,  $L$  e  $C$ , caso os valores dos elementos do circuito sejam tais que o ângulo de fase seja obtido em uma freqüência de operação em particular.

Existe, é claro, uma variedade de ângulos de fator de potência entre  $\pm 90^\circ$  e  $0^\circ$ . Se a carga é uma combinação equivalente a  $RC$ , então o ângulo  $\text{fp}$  reside entre os limites  $-90^\circ < \theta_{Z_L} < 0^\circ$ . Por outro lado, se a carga é uma combinação equivalente  $RL$ , então o ângulo de  $\text{fp}$  reside entre os limites  $0^\circ < \theta_{Z_L} < 90^\circ$ . Obviamente, a identificação do tipo de carga poderia resultar em confusão, devido ao fato de que  $\cos \theta_{Z_L} = \cos (-\theta_{Z_L})$ . Para evitar tal problema,  $\text{fp}$  é dito estar *em avanço* ou *em atraso*, onde esses termos *se referem à fase da corrente em relação à tensão*. Uma vez que a corrente se adianta à tensão em uma carga  $RC$ , a carga tem um  $\text{fp}$  em avanço. Do mesmo modo, uma carga  $RL$  tem um  $\text{fp}$  em atraso; portanto impedâncias de cargas de  $Z_L = 1 - j1$  e  $Z_L = 2 + j1$  têm fatores de potência de  $\cos (-45^\circ) = 0,707$  em avanço e  $\cos (26,59^\circ) = 0,894$  em atraso, respectivamente.

### Exemplo 11.12

Uma carga industrial consome 88 kW a um  $\text{fp}$  de 0,707 em atraso de uma linha rms de 480 V. A resistência na linha de transmissão do transformador de potência da companhia para a planta é de  $0,08 \Omega$ . Vamos determinar a potência que deve ser fornecida pela companhia de energia (a) sob tais condições e (b) se o  $\text{fp}$  é de algum modo mudado para 0,90 em atraso.

(a) O circuito equivalente para tais condições é mostrado na Figura 11.11. Usando-se a Equação 11.29, obtemos a magnitude da corrente rms na planta:

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \frac{P_L}{(\text{pf})(V_{\text{rms}})} \\ &= \frac{(88)(10^3)}{(0,707)(480)} \\ &= 259,3 \text{ A rms} \end{aligned}$$

A potência que será fornecida pela companhia de energia é

$$\begin{aligned} P_S &= P_L + (0,08)I_{\text{rms}}^2 \\ &= 88.000 + (0,08)(259,3)^2 \\ &= 93,38 \text{ kW} \end{aligned}$$

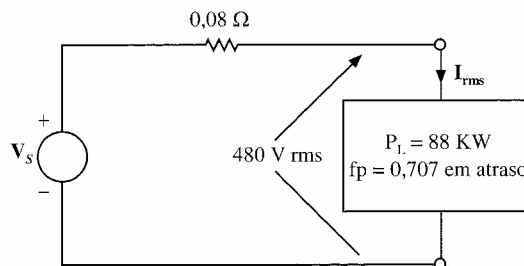


Figura 11.11 Circuito exemplo para examinar mudanças no fator de potência.

(b) Suponhamos agora que o  $\text{fp}$  foi de algum modo mudado para 0,90 em atraso, porém a tensão permanece constante a 480 V. A corrente rms da carga nessas condições é

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \frac{P_L}{(\text{pf})(V_{\text{rms}})} \\ &= \frac{(88)(10^3)}{(0,90)(480)} \\ &= 203,7 \text{ A rms} \end{aligned}$$

Sob tais condições, a companhia de energia deve gerar

$$\begin{aligned} P_S &= P_L + (0,08)I_{\text{rms}}^2 \\ &= 88.000 + (0,08)(203,7)^2 \\ &= 91,32 \text{ kW} \end{aligned}$$

Deve-se notar a diferença entre esses dois casos. Uma simples mudança no fp da carga de 0,707 para 0,90 em atraso tem um efeito interessante. Note que no primeiro caso a companhia de energia deve gerar 93,38 kW a fim de suprir a planta com 88 kW de potência porque o fator de potência mais baixo significa que a perda da linha será alta – 5,38 kW. Todavia, no segundo caso a companhia de energia precisa gerar somente 91,32 kW a fim de suprir a planta com a potência necessária e a perda na linha é de somente 3,32 kW. ■

O exemplo indica claramente o impacto econômico do fator de potência da carga. Um fator de potência baixo na carga significa que os geradores e linhas devem ser capazes de conduzir mais corrente a uma dada tensão (também para compensar perdas  $I_{\text{rms}}^2 R$  na linha) do que seria necessário se o fator de potência da carga fosse mais alto. Uma vez que perdas de linha representam energia dissipada em forma de calor e não beneficiam ninguém, a utilidade insistirá que a planta mantenha um alto fp, tipicamente 0,90 em atraso, e ajuste sua taxa para penalizar as plantas que não cumprirem as normas. Na próxima seção, demonstraremos uma técnica simples e econômica para corrigir o fator de potência.

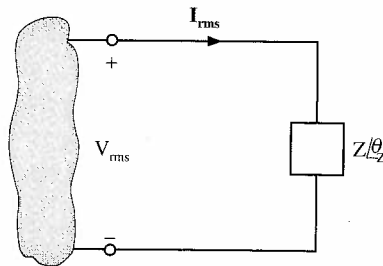
### Exercício

**E11.11** Uma carga industrial consome 100 kW com um fp de 0,707 em atraso. A tensão de linha de 60 Hz na carga é de 480  $\angle 0^\circ$  V rms. A resistência da linha de transmissão entre o transformador da companhia e a carga é de 0,1  $\Omega$ . Determine a economia de potência que poderia ser obtida, caso o fp fosse mudado para 0,94 em atraso.

**Resp.:** A potência economizada seria de 3,771 kW.

## 11.6 Potência Complexa

No nosso estudo de potência em regime permanente, é conveniente introduzir outra grandeza, que é normalmente chamada de *potência complexa*. Para desenvolver o relacionamento entre tal grandeza e as outras apresentadas nas seções anteriores, considere o circuito mostrado na Figura 11.12.



**Figura 11.12** Circuito usado para explicar relacionamentos de potência.

A potência complexa é definida como sendo

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^* \quad (11.31)$$

onde  $I_{\text{rms}}^*$  se refere ao complexo conjugado de  $I_{\text{rms}}$ ; isto é, se  $I_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} \angle \theta_i = I_R + jI_I$ , então  $I_{\text{rms}}^* = I_{\text{rms}} \angle -\theta_i = I_R - jI_I$ . A potência complexa é então

$$S = V_{\text{rms}} \angle \theta_v I_{\text{rms}} \angle -\theta_i = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \angle \theta_v - \theta_i \quad (11.32)$$

ou

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (11.33)$$

onde, é claro,  $\theta_v - \theta_i = \theta_z$ . Da Equação 11.33 vê-se que a parte real da potência complexa é simplesmente a *potência média* ou *real*. A parte imaginária de  $S$  chamamos de *potência em quadratura* ou *reativa*. Portanto, potência complexa pode ser expressa na forma

$$S = P + jQ \quad (11.34)$$

onde

$$P = \text{Re}(S) = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.35)$$

$$Q = \text{Im}(S) = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (11.36)$$

e, como mostrado na Equação 11.33, a magnitude da potência complexa é o que chamamos de *potência aparente*, e o ângulo de fase para a potência complexa é simplesmente o ângulo do fator de potência. Potência complexa, tal como potência aparente, é medida em volt-ampères, potência real é medida em watts, e para se distinguir  $Q$  das demais grandezas, que na realidade têm as mesmas dimensões, ela é medida em volt-ampères reativo, ou var.

Além das relações apresentadas acima, notamos que uma vez que

$$\cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{\text{Re}(\mathbf{Z})}{|\mathbf{Z}|}$$

$$\sin(\theta_v - \theta_i) = \frac{\text{Im}(\mathbf{Z})}{|\mathbf{Z}|}$$

e

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{|\mathbf{Z}|}$$

as equações 11.35 e 11.36 podem ser escritas como

$$P = I_{\text{rms}}^2 \text{Re}(\mathbf{Z}) \quad (11.37)$$

$$Q = I_{\text{rms}}^2 \text{Im}(\mathbf{Z}) \quad (11.38)$$

e, portanto, a Equação 11.34 pode ser expressa como

$$S = I_{\text{rms}}^2 \mathbf{Z} \quad (11.39)$$

Os diagramas da Figura 11.13 servem para explicar ainda mais as relações entre as diversas grandezas de potência. Como mostrado na Figura 11.13a, a corrente fasorial pode ser dividida entre dois componentes: um que está em fase com  $\mathbf{V}_{\text{rms}}$  e um que está 90° defasado com  $\mathbf{V}_{\text{rms}}$ . As equações 11.35 e 11.36 ilustram que o componente em fase produz a potência real, e o componente de 90°, chamado de *componente em quadratura*, produz a potência reativa ou em quadratura. Além disso, as equações 11.34 a 11.36 indicam que

$$\tan(\theta_v - \theta_i) = \frac{Q}{P} \quad (11.40)$$

que relaciona o ângulo de fp à  $P$  e  $Q$  no qual é chamado de *triângulo de potência*.

Os relacionamentos entre  $S$ ,  $P$  e  $Q$  podem ser expressos por meio dos diagramas mostrados na Figura 11.31b e c. Na Figura 11.31b, notamos as seguintes condições. Se  $Q$  é positivo, a carga é indutiva, o fator de potência está atrasado e o número complexo  $S$  está no primeiro quadrante. Se  $Q$  é negativo, a carga é capacitiva, o fator de potência está em avanço e o número complexo  $S$  está ao longo do eixo real positivo. A Figura 11.31c ilustra os relacionamentos expressos pelas equações 11.37 a 11.39 para uma carga indutiva.

Finalmente, é importante ressaltar que potência complexa, tal como energia, é conservada; isto é, a potência complexa total fornecida a um número qualquer de cargas individuais é igual à soma das potências complexas fornecidas a cada carga individual, independentemente de como as cargas estão interconectadas.



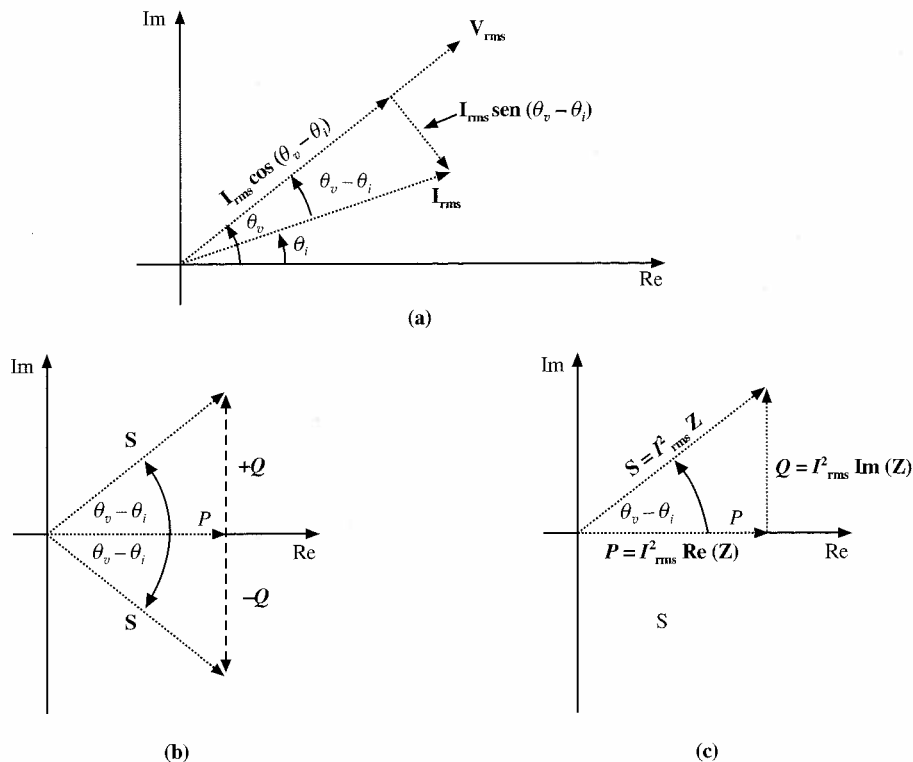


Figura 11.13 Diagrama para ilustrar relacionamentos de potência.

### Exemplo 11.13

Uma carga opera a 20 kW, com um fp de 0,8 em atraso. A tensão da carga é 220  $\angle 0^\circ$  V rms a 60 Hz. A impedância da linha é de  $0,09 + j0,3 \, \Omega$ . Desejamos determinar a tensão e o fator de potência na linha do lado da fonte.

O diagrama de circuito para esse problema é mostrado na Figura 11.14. A magnitude da corrente de carga rms é

$$I_L = \frac{(20)(10^3)}{(220)(0,8)} = 113,64 \text{ A rms}$$

A corrente está atrasada em relação à tensão de  $\theta = \cos^{-1} 0,8 = 36,87^\circ$ . A potência reativa na carga é

$$\begin{aligned} Q_L &= P_L \tan \theta \\ &= (20)(10^3)(0,75) \\ &= 15.000 \text{ var} \end{aligned}$$

A perda de potência real na linha é

$$\begin{aligned} P_{\text{linha}} &= (113,64)^2 (0,09) \\ &= 1162,26 \text{ W} \end{aligned}$$

A perda de potência reativa na linha é

$$\begin{aligned} Q_{\text{linha}} &= (113,64)^2 (0,3) \\ &= 3874,21 \text{ var} \end{aligned}$$

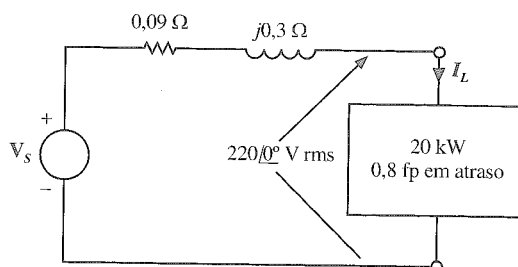


Figura 11.14 Exemplo de circuito para análise de potência.

A potência suprida pelo gerador deve ser igual à consumida pelo sistema, e dessa forma

$$\begin{aligned} P_s &= P_L + P_{\text{linha}} \\ &= 20.000 + 1162,26 \\ &= 21.162,26 \text{ W} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q_s &= Q_L + Q_{\text{linha}} \\ &= 15.000 + 3874,21 \\ &= 18.874,21 \text{ var} \end{aligned}$$

Portanto, a potência complexa no gerador é

$$\begin{aligned} S_s &= P_s + jQ_s \\ &= 21.162,26 + j18.874,21 \\ &= 28.356,25 \angle 41,73^\circ \text{ VA} \end{aligned}$$

Desse modo, a tensão do gerador é

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{|S_s|}{I_L} = \frac{28.356,25}{113,64} \\ &= 249,53 \text{ V rms} \end{aligned}$$

e o fator de potência do gerador é

$$\cos(41,73^\circ) = 0,75 \text{ em atraso}$$

Poderíamos ter resolvido esse problema usando a LKT. Por exemplo, calculamos a corrente da carga como

$$I_L = 113,64 \angle -36,87^\circ \text{ A rms}$$

Dessa maneira, a queda da tensão na linha de transmissão é

$$\begin{aligned} V_{\text{linha}} &= (113,64 \angle -36,87^\circ)(0,09 + j0,3) \\ &= 35,59 \angle 36,43^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

Portanto, o gerador de tensão é

$$\begin{aligned} V_s &= 220 \angle 0^\circ + 35,59 \angle 36,43^\circ \\ &= 249,53 \angle 4,86^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

Desse modo, o gerador de tensão é 249,53 V rms. Além disso,

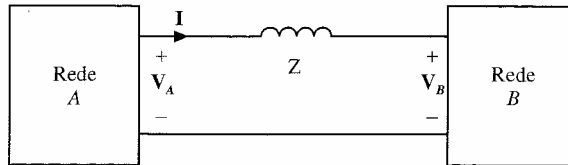
$$\theta_v - \theta_i = 4,86^\circ - (-36,87^\circ) = 41,73^\circ$$

e portanto,

$$\text{fp} = \cos(41,73^\circ) = 0,75 \text{ em atraso}$$

**Exemplo 11.14**

Duas redes A e B estão interligadas por dois condutores com uma impedância total de  $Z = 0 + j1 \Omega$ , como mostrado na Figura 11.15. As tensões nos terminais das redes são  $V_A = 120 \angle 30^\circ \text{ V rms}$  e  $V_B = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ . Desejamos determinar a potência média que flui entre as redes e identificar qual é a fonte e qual é a carga.



**Figura 11.15** Rede utilizada no Exemplo 11.14.

Como mostrado na Figura 11.15,

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_A - V_B}{Z} \\ &= \frac{120 \angle 30^\circ - 120 \angle 0^\circ}{j1} \\ &= 62,12 \angle 15^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

A potência fornecida pela rede A é

$$\begin{aligned} P_A &= |V_A| |I| \cos(\theta_{V_A} - \theta_I) \\ &= (120)(62,12) \cos(30^\circ - 15^\circ) \\ &= 7.200,4 \text{ W} \end{aligned}$$

A potência consumida pela rede B é

$$\begin{aligned} P_B &= |V_B| |I| \cos(\theta_{V_B} - \theta_I) \\ &= (120)(62,12) \cos(0^\circ - 15^\circ) \\ &= 7.200,4 \text{ W} \end{aligned}$$

Se o fluxo de potência estivesse realmente vindo da rede B para a rede A, os sinais resultantes em  $P_A$  e  $P_B$  teriam sido negativos. ■

**Exercícios**

**E11.12** Uma carga industrial exige 40 kW a 0,84 fp em atraso. A tensão da carga é 220  $\angle 0^\circ \text{ V rms}$  a 60 Hz. A impedância da linha de transmissão é  $0,1 + j0,25 \Omega$ . Determine as perdas de potência real e reativa na linha e as potências real e reativa necessárias na entrada da linha de transmissão.

**Resp.:**  $P_{\text{linha}} = 4,685 \text{ kW}$ ,  $Q_{\text{linha}} = 11,713 \text{ kvar}$ ,  $P_S = 44,685 \text{ kW}$ ,  $Q_S = 37,55 \text{ kvar}$ .

**E11.13** Uma carga exige 60 kW a 0,85 fp em atraso. A tensão de 60 Hz na carga é 220  $\angle 0^\circ \text{ V rms}$ . Se a impedância da linha de transmissão é  $0,12 + j0,18 \Omega$ , determine a tensão de linha e o fator de potência na entrada.

**Resp.:**  $V_{\text{in}} = 284,6 \angle 5,8^\circ \text{ V rms}$ ,  $\text{fp}_{\text{in}} = 0,792$  em atraso.

Plantas industriais que necessitam de grandes quantidades de potência têm uma ampla variedade de cargas. No entanto, por natureza as cargas normalmente têm um fator de potência em atraso. Em vista dos resultados obtidos no Exemplo 11.12, somos naturalmente conduzidos a perguntar se existe alguma técnica conveniente para se achar o fator de potência de uma carga. Uma vez que uma carga típica pode ser um banco de motores de indução ou qualquer outro equipamento de alto valor, a técnica para se determinar o fp deve ser econômica para que seja viável.

Para se responder à questão proposta, vamos examinar o circuito mostrado na Figura 11.16. O circuito ilustra uma carga industrial típica. Em paralelo com tal carga, colocamos um capacitor. A potência complexa original para a carga  $Z_L$ , que denotaremos como  $S_{\text{old}}$ , é

$$S_{\text{old}} = P_{\text{old}} + jQ_{\text{old}} = |S_{\text{old}}|/\theta_{\text{old}}$$

A nova potência complexa que resulta da adição do capacitor é

$$S_{\text{new}} = P_{\text{old}} + jQ_{\text{new}} = |S_{\text{new}}|/\theta_{\text{new}}$$

onde  $\theta_{\text{new}}$  é especificado pelo fator de potência exigido. A diferença entre as potências complexas velha (*old*) e nova (*new*) é causada pela adição do capacitor. Dessa forma,

$$S_{\text{cap}} = S_{\text{new}} - S_{\text{old}} \quad (11.41)$$

e uma vez que o capacitor é puramente reativo,

$$S_{\text{cap}} = +jQ_C = -j\omega CV_{\text{rms}}^2 \quad (11.42)$$

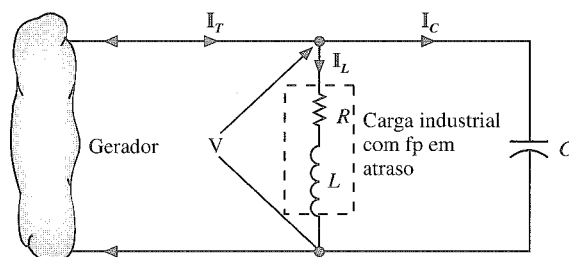


Figura 11.16 Circuito para correção do fator de potência.

A Equação 11.42 pode ser usada para determinar o valor exigido de  $C$  para se conseguir o novo fator de potência especificado. O procedimento que descrevemos está ilustrado na Figura 11.17, onde  $\theta_{\text{old}} = \theta_{v_L} - \theta_{i_L}$  e  $\theta_{\text{new}} = \theta_{v_T} - \theta_{i_T}$ . Desse modo, podemos obter um fator de potência em particular para a carga total simplesmente por uma seleção criteriosa de um capacitor e colocando-o em paralelo com a carga original. Em geral, queremos que o fator de potência seja grande, portanto, o ângulo do fator de potência deve ser pequeno (ou seja, quanto maior o fator de potência, menor será o ângulo  $\theta_{v_T} - \theta_{i_T}$ ).

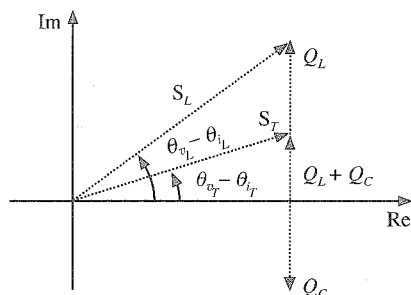


Figura 11.17 Ilustração da técnica para correção do fator de potência.

### Exemplo 11.15

Uma carga industrial consistindo de um banco de motores de indução consome 50 kW com um fp de 0,8 em atraso de uma linha de 220  $\angle 0^\circ$  V rms, 60 Hz. Desejamos aumentar o fp para 0,95 em atraso colocando um banco de capacitores em paralelo com a carga.

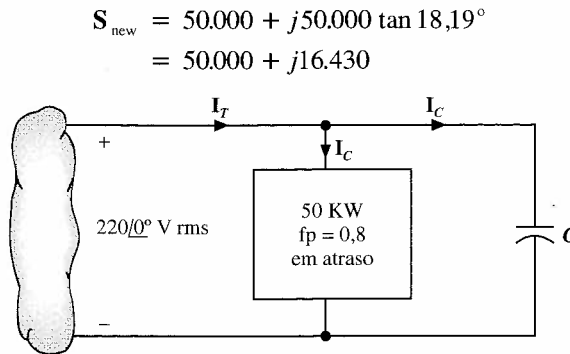
O diagrama do circuito para tal problema é mostrado na Figura 11.18.  $P_L = 50$  kW e uma vez que  $\cos^{-1} 0,8 = 36,87^\circ$ ,  $\theta_{\text{old}} = 36,87^\circ$ . Portanto,

$$Q_{\text{old}} = P_{\text{old}} \tan \theta_{\text{old}} = (50)(10^3)(0,75) = 37,5 \text{ kvar}$$

Dessa forma,

$$S_{\text{old}} = 50.000 + j37.500$$

Uma vez que o fator de potência exigido é 0,95,  $\theta_{\text{new}} = 18,19^\circ$ . Então



**Figura 11.18** Exemplo de circuito para a correção do fator de potência.

e portanto,

$$S_{\text{cap}} = S_{\text{new}} - S_{\text{old}}$$

$$= -j21.070$$

Desse modo,

$$C = \frac{21.070}{(377)(220)^2}$$

$$= 1155 \mu\text{F}$$

Usando-se um capacitor dessa magnitude em paralelo com a carga industrial, criamos, do ponto do sistema de energia, um fp de carga de 0,95 em atraso. Todavia, os parâmetros da carga real permanecem inalterados. ■

### Exercício

**E11.14** Calcule o valor do capacitor necessário para mudar o fator de potência no Exercício E11.11 para 0,95 em atraso.

**Resp.:**  $C = 773 \mu\text{F}$ .

## 11.7 Medindo Potência

Nas seções anteriores, ilustramos técnicas para calcular potência. Mostraremos agora como a potência pode ser medida em uma rede elétrica. Um instrumento usado para medir potência média é o wattímetro. Esse instrumento contém uma bobina de corrente de baixa impedância (cuja impedância ideal é zero), que é conectada em série com a carga, e uma bobina de tensão de alta impedância (cuja impedância ideal é infinita), que é conectada em paralelo com a carga. Se a tensão e a corrente são periódicas e o wattímetro está conectado como mostrado na Figura 11.19a, ele medirá

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt$$

onde  $v(t)$  e  $i(t)$  são definidos na figura. Foi convencionado que  $i(t)$  entra no terminal  $\pm$  da bobina de corrente e  $v(t)$  é positiva no terminal  $\pm$  da bobina de tensão. No domínio da frequência, o circuito equivalente é mostrado na Figura 11.19b, onde a corrente e a tensão são referidas como as mesmas no domínio do tempo e a leitura do wattímetro será

$$P = \text{Re}(\mathbf{VI}^*) = |\mathbf{V}||\mathbf{I}| \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Se  $v(t)$  e  $i(t)$  ou  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  são devidamente escolhidas, a leitura será a potência média. Na Figura 11.19, as conexões produzirão uma leitura de potência fornecida à carga. Uma vez que as duas bobinas estão completamente isoladas uma da outra, elas poderiam ser conectadas em qualquer lugar do circuito, resultando em uma leitura que poderia não ter significado.

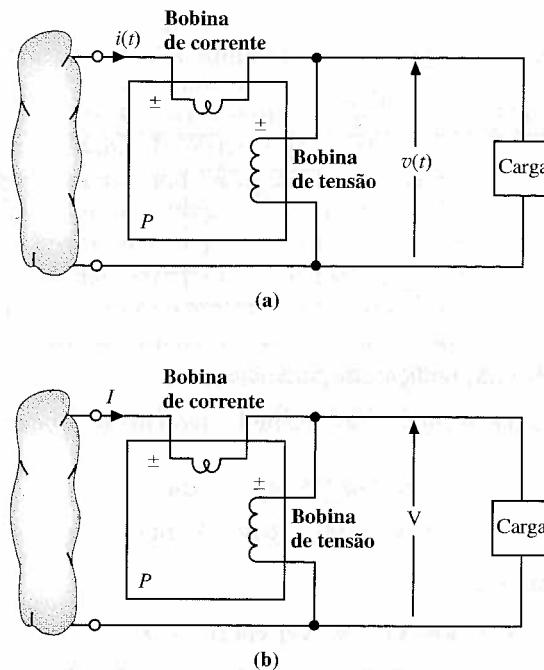


Figura 11.19 Conexões do wattímetro para medição de potência.

Note que se uma das bobinas do wattímetro estiver invertida, as equações para a potência terão o sinal trocado em relação àquelas que eram antes da inversão da bobina devido à mudança na variável de referência relacionada ao terminal  $\pm$ . Devido à construção física de wattímetros, o terminal  $\pm$  da bobina de potencial deveria sempre ser conectada à mesma linha que a bobina de corrente, como mostrado na Figura 11.20a. Se for necessário inverter um enrolamento, uma das bobinas deverá ser invertida. Por exemplo, a inversão da bobina de corrente resulta na rede mostrada na Figura 11.20b. Note que se o terminal  $\pm$  da bobina de potencial estiver conectado à linha contendo a bobina de corrente, a potência  $P$  estará fluindo através do wattímetro do circuito A para o circuito B.

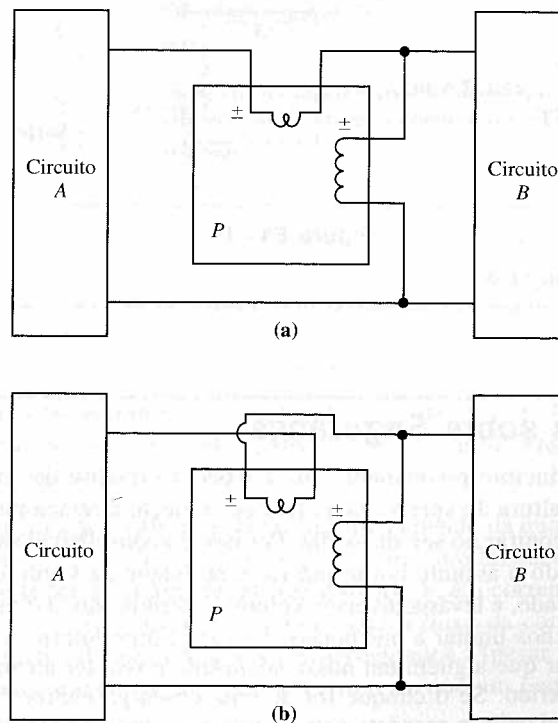
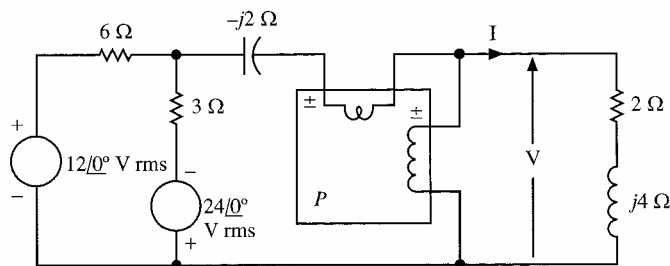


Figura 11.20 Conexões de wattímetros.

**Exemplo 11.16**

Dada a rede mostrada na Figura 11.21, desejamos determinar a leitura do wattímetro.



**Figura 11.21** Uso do wattímetro na medição de potência.

Usando qualquer uma das técnicas (por exemplo, teorema de Thévenin), podemos mostrar que

$$I = 2,68 \angle 153,43^\circ \text{ A rms}$$

$$V = 11,99 \angle 216,86^\circ \text{ V rms}$$

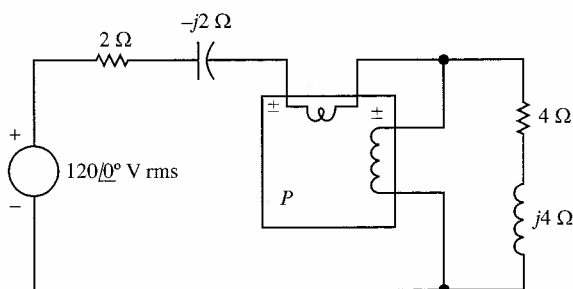
e, portanto, a leitura do wattímetro é

$$\begin{aligned} P &= \text{Re}(\mathbf{VI}^*) = |\mathbf{V}||\mathbf{I}| \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= (11,99)(2,68) \cos(216,86^\circ - 153,43^\circ) \\ &= 14,37 \text{ W} \end{aligned}$$

a potência média fornecida à impedância  $(2 + j4) \Omega$ . ■

**Exercício**

**E11.15** Determine a leitura do wattímetro na rede da Figura E11.15.



**Figura E11.15**

**Resp.:**  $P = 1440,24 \text{ W}$ .

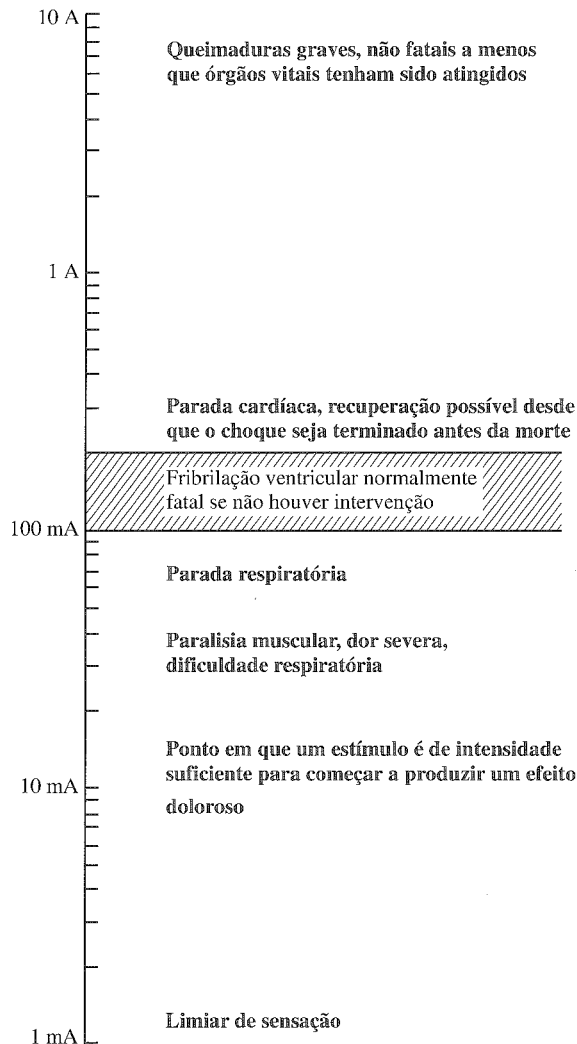
## 11.8 Considerações sobre Segurança

Apesar de este livro estar a princípio preocupado com a teoria da análise de circuitos, reconhecemos que a maioria dos estudantes, a esta altura do aprendizado, terá de começar a relacionar a teoria aos recursos elétricos e sistemas que eles vão encontrar no seu dia-a-dia. Por isso é aconselhável sair do teórico por um instante e gastar algum tempo discutindo o assunto muito prático e relevante da segurança. Segurança elétrica é um tópico muito amplo e diversificado, e levaria diversos volumes escritos para dar um tratamento completo a esse assunto. Em vez disso, iremos nos limitar a uns poucos conceitos introdutórios e ilustrá-los com exemplos.

Seria difícil imaginar que alguém em nossa sociedade possa ter alcançado a adolescência sem ter experimentado um choque elétrico. Se o choque foi de uma descarga eletrostática ou do contato acidental com um circuito elétrico energizado, a resposta seria a mesma – uma reação muscular imediata e involuntária. Em ambos os casos, a causa da reação é a corrente fluindo através do corpo. A severidade do choque

depende de diversos fatores tais como a magnitude, a duração e o caminho percorrido pela corrente através do corpo.

O efeito do choque elétrico varia muito de pessoa para pessoa. A Figura 11.22 mostra as reações em geral que ocorrem como resultado de uma corrente ac 60 Hz que flui através do corpo de uma mão a outra, com o coração no caminho percorrido. Observe que existe uma variação intermediária de corrente, de cerca de 0,1 a 0,2 A, que é provavelmente fatal. Os níveis de corrente nesse intervalo são capazes de produzir fibrilação muscular, o cessar de contrações normais dos músculos do coração. A recuperação dos batimentos cardíacos geralmente não ocorre sem a intervenção médica imediata. Os níveis de corrente acima do intervalo fatal tendem a fazer com que o músculo cardíaco se contraia severamente, e se o choque for removido imediatamente, o coração pode voltar a seu batimento por si só.



**Figura 11.22** Efeitos de um choque elétrico. (Extraído de C. F. Dalziel e W. R. Lee, *Lethal electric currents*, *IEEE Spectrum*, fevereiro de 1969, pp. 44-50, e C. F. Dalziel, *Electric shock hazard*, *IEEE Spectrum*, fevereiro de 1972, pp. 41-50.)

A tensão necessária para produzir uma dada corrente depende da qualidade do contato do corpo e a impedância deste entre os pontos de contato. A tensão eletrostática produzida deslizando no assento do carro em um dia seco de inverno pode ser da ordem de 20.000 a 40.000 V, e a corrente que flui ao se tocar a maçaneta da porta é da ordem de 40 A. No entanto, o percurso para o fluxo da corrente é na maior parte sobre a superfície do corpo, e sua duração, de apenas alguns microssegundos. Apesar de tal choque poder ser desastroso para alguns componentes eletrônicos, ele não causa mais do que um pequeno desconforto e irritação a um ser humano.

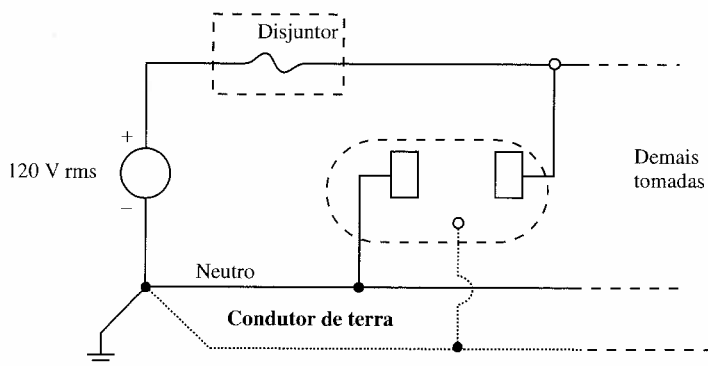


Eletrodomésticos exigem normalmente 120 ou 240 V rms para seu funcionamento. Apesar de o nível de tensão ser pequeno se comparado ao choque eletrostático, o potencial para danificar o indivíduo e o equipamento é muito maior. É mais provável que o contato acidental resulte em um fluxo de corrente entre mãos ou entre uma mão e um pé – ambos sujeitando o coração ao choque. Além disso, por causa da variação relativamente lenta (baixa frequência) da corrente de 60 Hz, esta tende a penetrar mais profundamente no corpo. Nesse caso também, a fonte de energia tem a capacidade de sustentar o fluxo de corrente sem perdas. Por causa disso, a discussão a seguir se concentrará primeiramente nos danos associados ao sistema elétrico ac de 60 Hz.

O sistema monofásico de três fios introduzido no Capítulo 10 é comum, mas não usado exclusivamente para a distribuição de energia elétrica em residências. Dois aspectos importantes que não foram mencionados anteriormente relacionados à segurança são: circuitos com fusíveis e aterramento.

Cada ramo de circuito, independente do tipo de carga que ele serve, é protegido contra o fluxo de excessiva corrente por fusíveis ou disjuntores. Circuitos de tomadas são geralmente limitados a 20 A e circuitos de luz a 15 A. Claramente, isto não pode proteger pessoas de choques mortais. O propósito principal desses recursos de limitação de corrente é proteger o equipamento.

O condutor neutro do sistema elétrico está conectado ao terra em vários pontos do sistema e em particular na chegada dos condutores na residência. A conexão com o terra pode ser através de vara dirigida ao solo ou por contato de um cano metálico de água que esteja enterrado. Os ramos de circuitos de 120 V saindo do quadro de distribuição (ou caixa de fusíveis) consiste geralmente de três condutores, não de dois, como mostrado anteriormente no Capítulo 10, Figura 10.11. O terceiro condutor é o fio de terra, como mostrado na Figura 11.23.

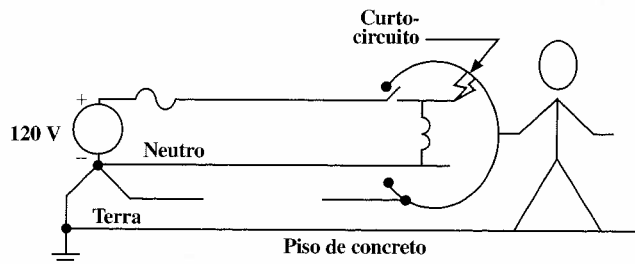


**Figura 11.23** Uma tomada residencial com pino terra.

O condutor de terra pode parecer redundante, já que ele não participa da operação normal de uma carga que poderia estar conectada ao receptáculo. Seu papel é ilustrado no exemplo a seguir.

### Exemplo 11.17

Joe College tem uma bancada no seu porão onde ele usa uma variedade de ferramentas como furadeiras, serras e lixadeiras. O chão do porão é de concreto e, por estar abaixo do nível do chão, normalmente está úmido. Concreto úmido é relativamente bom condutor. Joe não sabe que o isolamento do fio de sua furadeira elétrica está partido e o fio em contato com (ou em curto com) a carcaça metálica da furadeira, como mostrado na Figura 11.24.



**Figura 11.24** Circuito com defeito.

Sem o condutor de terra conectado à carcaça metálica da ferramenta, Joe receberia um choque considerável, talvez fatal, quando tentasse usar a ferramenta. A tensão entre sua mão e seu pé seria de 120 V, e a corrente através de seu corpo estaria limitada pela resistência de seu corpo e o chão de concreto. Tipicamente, os disjuntores do circuito não funcionariam. No entanto, se o condutor de terra estivesse presente e devidamente conectado à carcaça da furadeira, a carcaça permaneceria no potencial de terra, o condutor de 120 V entraria em curto com o solo, o disjuntor do circuito desarmaria e Joe continuaria vivo para furar outros buracos. ■

Foi mencionado anteriormente que o disjuntor do circuito ou fusível não fornece proteção eficaz contra choques elétricos. Existe, porém, um tipo especial de equipamento chamado de interruptor de falta de terra (GFI – *ground – fault interrupter*) que oferece proteção pessoal. Esse dispositivo detecta o fluxo de corrente fora do circuito normal. Considere o circuito da Figura 11.24. Na ausência de uma falta, a corrente no condutor neutro deve ser a mesma que no fio de fase. Se uma falta ocorrer, as correntes do neutro e da fase diferirão da corrente fluindo no fio de terra devido à falta. O GFI detecta o desequilíbrio de correntes entre o neutro e a fase e em seguida abre o circuito. Seu princípio de operação é ilustrado no exemplo a seguir.

### Exemplo 11.18

Considere a ação do circuito magnético da Figura 11.25. Sob condições normais de funcionamento,  $i_1$  e  $i_2$  são iguais, e se as bobinas nos condutores de neutro e de fase forem idênticas, como aprendemos em física básica, o fluxo magnético na carcaça será zero. Conseqüentemente, tensão alguma será induzida na bobina sensora.

Se ocorrer uma falta na carga, teremos corrente fluindo no condutor de terra e talvez até pelo terra; desse modo,  $i_1$  e  $i_2$  não mais serão iguais, o fluxo magnético não será zero e certa tensão será induzida na bobina sensora. Tal tensão pode ser usada para ativar um circuito disjuntor. Esta é a essência de um equipamento GFI.

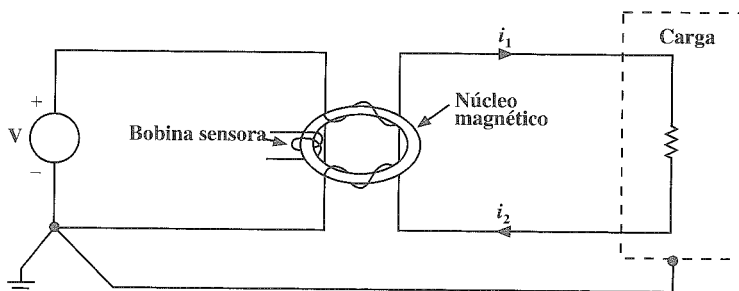


Figura 11.25 Circuito interruptor de falta de terra.

Interruptores de falta de terra estão disponíveis em várias formas, entre as quais podemos citar os disjuntores. Eles são necessários em ramos de circuitos que servem de escoamento em áreas como banheiros, porões, garagens e construções externas. Os equipamentos operarão para correntes de falta de terra em torno de alguns miliampères. Infelizmente, o GFI é um dispositivo relativamente novo e as normas elétricas não são retroativas. Desse modo, poucas residências possuem GFIs.<sup>1</sup>

Exigências para a instalação e manutenção de sistemas elétricos são meticulosamente definidas por várias normas estabelecidas para a proteção tanto da pessoa física quanto da sua propriedade. Instalação, alteração ou reparo de equipamentos e sistemas elétricos devem ser realizados somente por pessoas devidamente qualificadas. O assunto que estamos estudando na análise de circuitos não fornece tal qualificação.

Os exemplos a seguir ilustram os potenciais danos que podem ser causados em situações do dia-a-dia. Começamos revisando a situação descrita no exemplo anterior.

### Exemplo 11.19

Suponhamos que um homem esteja trabalhando no telhado de um trailer com uma furadeira elétrica. É de manhã, o homem está descalço e orvalho cobre o teto do trailer. A ponta do fio de terra foi removida da to-

<sup>1</sup> N.T.: O autor se refere a residências nos EUA.

mada da furadeira. Será que tal homem vai levar um choque caso a fase entre em curto com a carcaça da furadeira?

Para analisar tal problema, devemos construir um modelo que represente adequadamente a situação descrita. John G. Webster, em seu livro *Medical instrumentation* (Houghton Mifflin Company, Boston, 1978), sugere os seguintes valores para a resistência de um corpo humano:  $R_{\text{pele}}(\text{seca}) = 15 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{\text{pele}}(\text{molhada}) = 150 \Omega$ ,  $R_{\text{extremidades}}(\text{braço ou perna}) = 100 \Omega$  e  $R_{\text{tronco}} = 200 \Omega$ .

O modelo de rede é mostrado na Figura 11.26. Note que o fio de terra está em circuito aberto, um caminho fechado existe entre o fio “quente” através do curto, o corpo humano, o trailer e o solo. Para tais condições assumimos que as resistências da superfície de contato  $R_{\text{sc}_1}$  e  $R_{\text{sc}_2}$  são  $150 \Omega$  cada uma. A resistência do corpo,  $R_{\text{corpo}}$ , consistindo de braço, tronco e perna, é  $400 \Omega$ . A resistência do trailer é supostamente zero, e a resistência estimada do solo,  $R_{\text{solo}}$ , do chão do trailer até o solo propriamente dito, é  $1 \Omega$ . Portanto, a magnitude da corrente através do corpo, da mão ao pé, seria

$$\begin{aligned} I_{\text{corpo}} &= \frac{120}{R_{\text{sc}_1} + R_{\text{corpo}} + R_{\text{sc}_2} + R_{\text{solo}}} \\ &= \frac{120}{950} \\ &= 126 \text{ mA} \end{aligned}$$

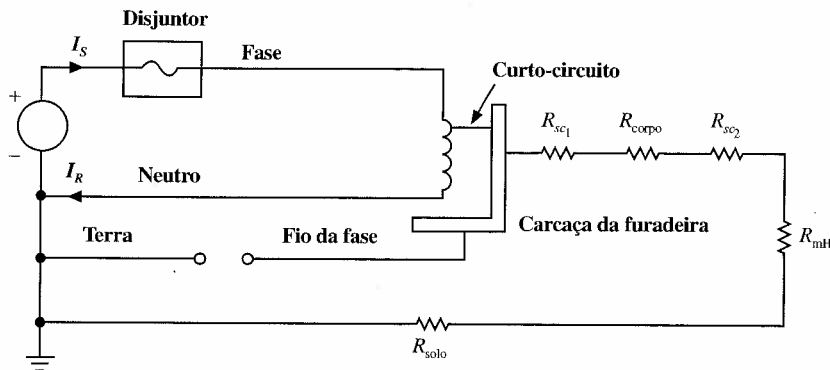


Figura 11.26 Modelo para o Exemplo 11.19.

Uma corrente dessa magnitude pode facilmente causar uma parada cardíaca.

É importante notar que proteção adicional seria fornecida se o dispositivo de proteção fosse um interruptor de falta de terra (GFI). ■

### Exemplo 11.20

Dois meninos estão jogando bola no quintal. Para se refrescar, eles decidem pular na piscina, que tem um forro de vinil, então a água está isolada eletricamente da terra. O que os dois não sabem é que há uma falta no terra em uma das luzes da piscina. Um menino pula e, ainda de pé dentro da piscina com água até o peito, puxa o outro menino, que está segurando a escada que está aterrada, como mostrado na Figura 11.27a. Qual é o impacto de tal ação?

A ação na Figura 11.27a está modelada como mostrado na Figura 11.27b. Note que, por causa da falta no terra, existe um caminho da corrente através dos dois garotos. Assumindo-se que as resistências da falta, da piscina e da escada são aproximadamente zero, a magnitude da corrente através dos dois seria

$$\begin{aligned} I &= \frac{120}{(3R_{\text{braço}}) + 3(R_{\text{contato úmido}}) + R_{\text{tronco}}} \\ &= \frac{120}{950} \\ &= 126 \text{ mA} \end{aligned}$$

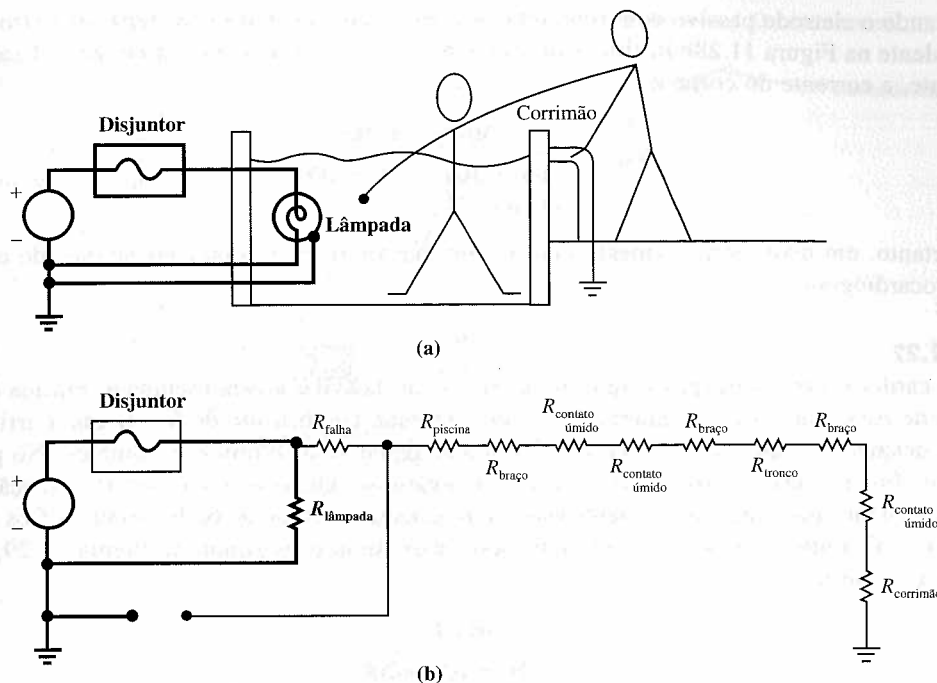


Figura 11.27 Diagramas usados no Exemplo 11.20.

Tal nível de corrente poderia causar considerável choque em ambos os garotos. O garoto localizado fora da piscina poderia ter uma parada cardíaca. ■

### Exemplo 11.21

Um paciente em um ambulatório tem preso ao seu antebraço um estimulador de músculos. Sua taxa cardíaca está sendo monitorada por um eletrocardiógrafo com dois eletrodos diferenciais sobre o coração e o eletrodo de terra afixado em seu tornozelo direito. Tal atividade é ilustrada na Figura 11.28a. O estimulador age como uma fonte de corrente que conduz 150 mA através do músculo do eletrodo ativo para o eletrodo passivo. Se o técnico do ambulatório por engano decide conectar o eletrodo passivo do estimulador ao eletrodo de terra do eletrocardiógrafo para conseguir um terra comum, haveria algum risco para o paciente?

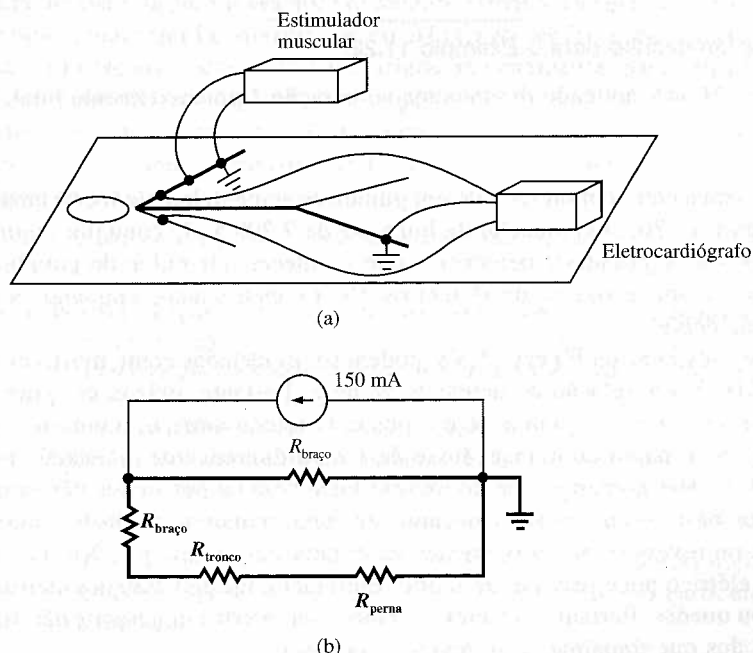


Figura 11.28 Diagramas usados no Exemplo 11.21.

Quando o eletrodo passivo do estimulador está conectado ao eletrodo de terra do eletrocardiógrafo, a rede equivalente na Figura 11.28b ilustra os dois caminhos para a corrente do estimulador. Usando-se divisão de corrente, a corrente do corpo é

$$\begin{aligned} I_{\text{corpo}} &= \frac{(150)(10^{-3})(100)}{100 + 100 + 200 + 100} \\ &= 30 \text{ mA} \end{aligned}$$

Portanto, um nível perigosamente alto de corrente fluirá do estimulador através do corpo para o terra do eletrocardiógrafo. ■

### Exemplo 11.22

Um paciente cardíaco com marcapasso ignorou as regras do hospital e está escutando música em um aparelho de som de baixa qualidade. O aparelho tem um zumbido amplificado de 60 Hz que é irritante. O paciente decide desmontar o aparelho parcialmente, em uma tentativa de eliminar o zumbido. No processo, ao segurar um dos fios da caixa de som, o outro toca o marcapasso. Quais os riscos em tal situação?

Suponhamos que a pele do paciente esteja úmida e que a tensão de 60 Hz sobre os fios das caixas é de somente 10 mV. Então, o modelo do circuito nesse caso seria o mostrado na Figura 11.29. A corrente através do coração seria

$$\begin{aligned} I &= \frac{(10)(10^{-3})}{150 + 100 + 200} \\ &= 22,2 \mu\text{A} \end{aligned}$$

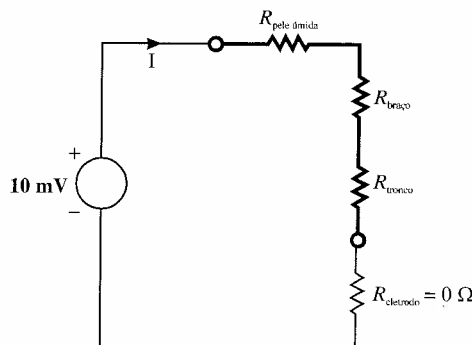


Figura 11.29 Modelo de circuito para o Exemplo 11.22.

É sabido que 10 mA aplicado diretamente ao coração é potencialmente fatal. ■

### Exemplo 11.23

Ao manobrar em área lamacenta, o motorista de um guindaste acidentalmente tocou uma linha de alta tensão, como ilustrado na Figura 11.30a. O potencial da linha era de 7.200 V. O condutor neutro estava aterrado ao poste. Quando o motorista do guindaste percebeu o que aconteceu, ele pulou do guindaste e correu em direção ao poste, que estava a uma distância de 10 metros. Ele foi eletrocutado enquanto corria. Como podemos explicar esse trágico acidente?

As condições descritas na Figura 11.30a podem ser modeladas como mostrado na Figura 11.30b. O guindaste estava a 7.200 V em relação ao potencial de terra. Portanto, existia um gradiente de 720 V/m ao longo da superfície da terra entre o guindaste e o poste. O trecho entre o guindaste e o poste é modelado como uma resistência. Se o passo do homem fosse de 1 m, a diferença de potencial entre seus pés seria de aproximadamente 720 V. Um homem de pé no mesmo local com os pés juntos não sofreria nada. ■

Os exemplos desta seção foram colocados em uma tentativa de ilustrar alguns dos perigos que existem em trabalhos ou diversões na proximidade de condutores de energia. No pior dos casos, deixar de prevenir um acidente elétrico pode resultar em morte. Entretanto, mesmo choques elétricos não-fatais podem causar queimaduras ou quedas. Portanto, devemos sempre estar alerta em garantir não somente a nossa segurança, mas também a dos que trabalham e se divertem conosco.

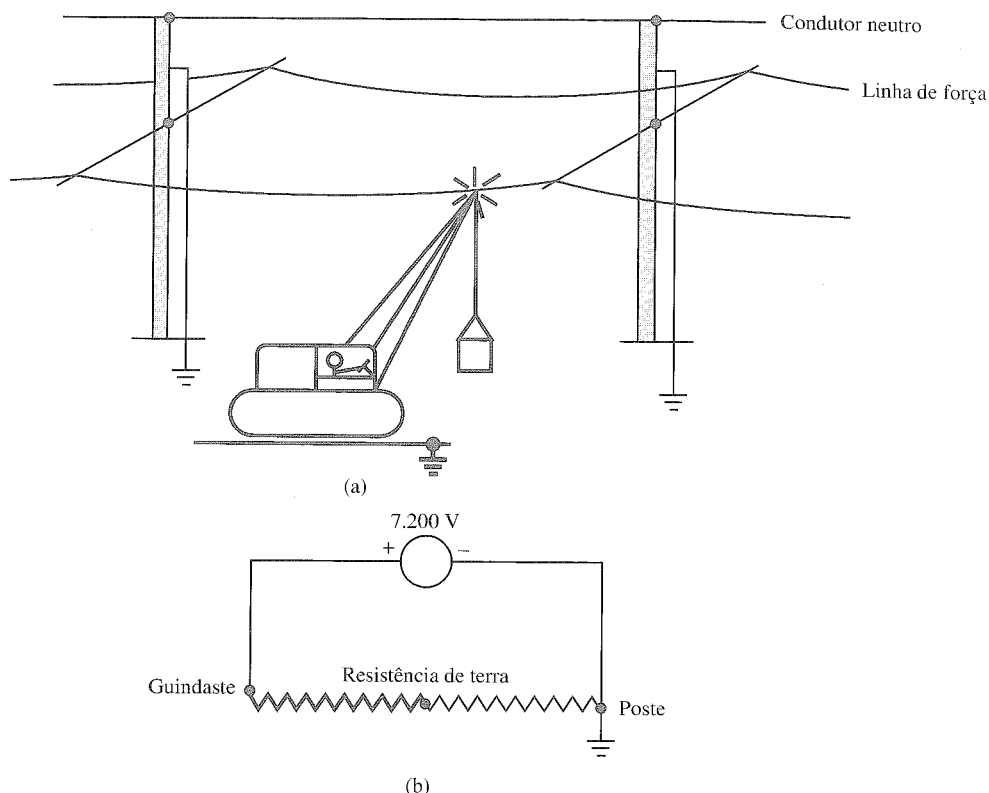


Figura 11.30 Ilustrações usadas no Exemplo 11.23.

As seguintes diretrizes nos ajudarão a minimizar as chances de acidentes.

1. Evite trabalhar com sistemas elétricos energizados.
2. Sempre assuma que um sistema elétrico está energizado, a menos que você possa verificar sem dúvidas que não está.
3. Nunca faça reparos ou alterações que não estejam de acordo com as normas em vigor.
4. Não trabalhe sozinho em sistemas elétricos potencialmente perigosos.
5. Se outra pessoa está paralisada por um circuito elétrico energizado, desligue a fonte de energia do circuito o mais rápido possível. Se isso não puder ser feito, use algum material não-condutivo, tal como tábuas, varas, cintos ou artigos de vestimenta, para separar o corpo do contato. Atue rapidamente para também se proteger.
6. Ao manipular equipamentos metálicos compridos, tais como escadas, antenas e assim por diante, do lado de fora, esteja continuamente atento às linhas de distribuição e evite qualquer possível contato com elas.

### Exercício

**E11.16** Uma mulher está dirigindo seu carro em uma tempestade violenta. Enquanto espera no cruzamento, uma linha de distribuição cai sobre o seu carro e faz contato. A linha é de 7.200 V.

- (a) Assumindo-se que a resistência do carro é irrelevante, qual é a corrente em potencial através de seu corpo se ela, segurando a maçaneta da porta com a mão seca, descesse no chão molhado?
- (b) Se ela permanecesse no carro, o que aconteceria?

**Resp.:** (a)  $I = 463$  mA, extremamente perigoso; (b) ela estaria a salvo.

A segurança no trabalho com eletricidade deve ser uma consideração primordial. Sem considerarmos quão eficiente ou conveniente uma rede elétrica é para uma aplicação em particular, ela não tem valor algum se for perigosa à vida humana.

Além de numerosas mortes que ocorrem a cada ano devido a acidentes elétricos, danos causados por incêndios por causa do uso inapropriado da fiação elétrica e equipamento de distribuição avultam milhões de dólares por ano.

Para evitar a perda de vidas e danos à propriedade, procedimentos detalhados e especificações têm sido estabelecidos para a construção e operação de sistemas elétricos para assegurar uma operação segura desses sistemas. O *National Electrical Code* ANSI C1 (American National Standards Institute – ANSI) é o guia primordial. Existem outros códigos, no entanto: por exemplo, o código nacional de segurança elétrica, ANSI C2, que lida com as exigências de segurança para utilidades públicas. O Underwriters' Laboratory (UL) testa todos os tipos de equipamentos e sistemas para assegurar que eles sejam seguros para uso do público em geral. Encontramos o selo UL em todos os tipos de equipamento elétrico que são usados em casa, tais como eletrodomésticos e extensões.<sup>2</sup>

A energia elétrica tem um papel importante em nossas vidas. Ela é extremamente importante à nossa saúde e bem-estar em geral. No entanto, se não for usada apropriadamente, poderá ser fatal.

## 11.9 Resumo

Foram apresentados os relacionamentos básicos de potência que se aplicam a circuitos ac em regime permanente. Potência instantânea e potência média foram definidas. Técnicas para conseguir a transferência máxima de potência média, que é análoga à transferência máxima em circuitos dc, foram apresentadas para várias condições de carga.

O valor eficaz, ou rms, de uma forma de onda periódica foi introduzido como uma maneira de se medir a eficácia de uma fonte em fornecer potência a uma carga resistiva.

O ângulo do fator de potência foi introduzido, juntamente com um esquema para a sua correção, se necessário. Potência complexa e seu relacionamento com potência real e reativa foram também apresentados.

Técnicas para se medir a potência foram apresentadas e, finalmente, considerações a respeito de segurança foram introduzidas e discutidas mediante de vários exemplos.

### Pontos-Chave

- Se a corrente e tensão são funções senoidais do tempo, a potência instantânea é igual a um valor médio independente do tempo mais um termo senoidal que tem uma frequência duas vezes maior que a tensão ou a corrente.
- Capacitores e indutores são elementos sem perda e não absorvem potência média.
- Quando múltiplas fontes estão presentes em uma rede, a superposição não pode ser usada no cálculo da potência, a menos que cada fonte forneça energia a uma frequência diferente.
- Para se obter uma transferência máxima de potência a uma carga, a impedância da carga deveria ser escolhida igual ao conjugado da impedância equivalente de Thévenin representando o restante da rede.
- O valor eficaz de uma onda periódica é encontrado determinando-se o valor da raiz quadrada média da onda.
- O valor rms de uma função senoidal é igual ao valor máximo dividido por  $\sqrt{2}$ .
- A potência aparente é definida como o produto  $V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$ .
- O fator de potência é definido como a razão de uma potência média pela potência aparente e é dito estar em avanço quando a corrente precede a tensão e atrasada quando a corrente sucede a tensão.
- O fator de potência em atraso de uma carga pode ser corrigido colocando-se um capacitor em paralelo com a carga.
- Potência complexa,  $S$ , é definida como o produto  $V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^*$ .
- A potência complexa  $S$  pode ser escrita como  $S = P + jQ$ , onde  $P$  é a potência real ou média e  $Q$  é a potência imaginária ou de quadratura.

2 N.T.: O autor está se referindo aos EUA.

## Problemas

- 11.1 Determine a potência média dissipada pela rede mostrada na Figura P11.1.

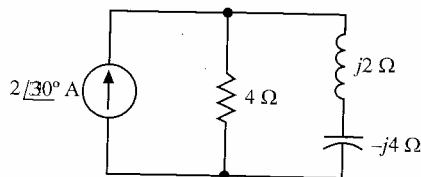


Figura P11.1

- 11.2 Dada a rede mostrada na Figura P11.2, determine a potência fornecida e a potência média dissipada por cada elemento.

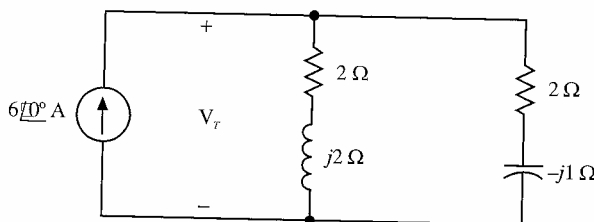


Figura P11.2

- 11.3 Dado o circuito da Figura P11.3, determine a potência média fornecida e a potência média dissipada por cada elemento.

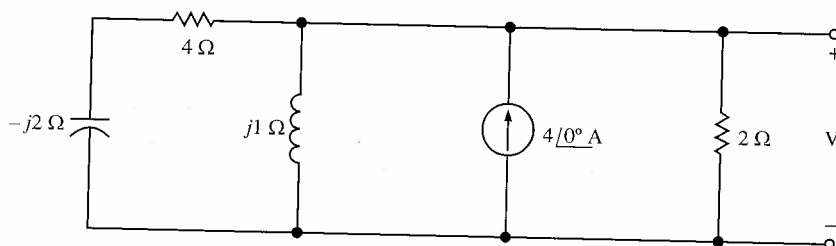


Figura P11.3

- 11.4 Dada a rede da Figura P11.4, determine a potência média total fornecida e a potência média dissipada pelo resistor de 4 Ω.

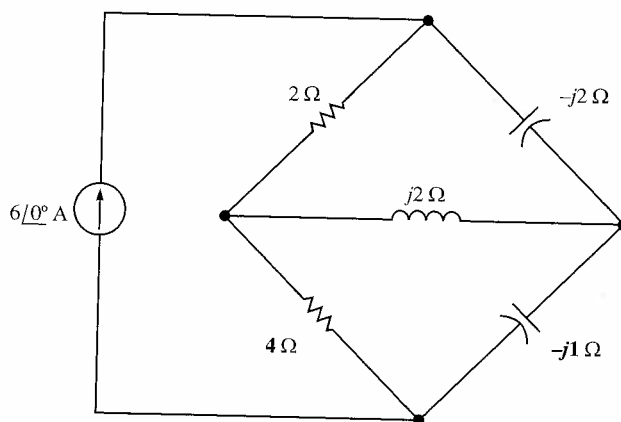
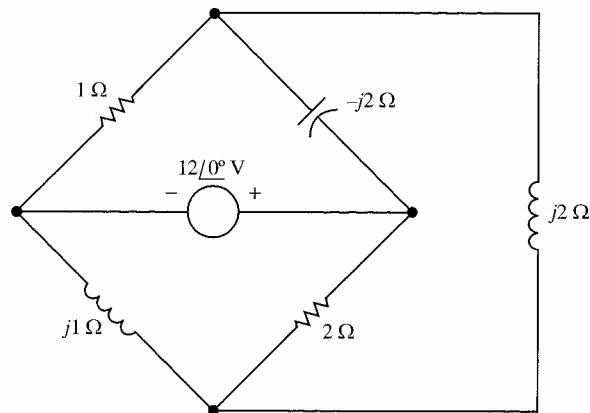


Figura P11.4

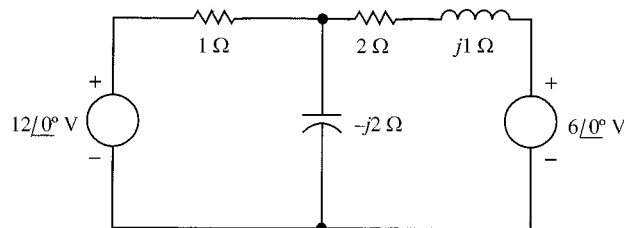


**11.5** Dada a rede da Figura P11.5, determine a potência média fornecida e a potência média total dissipada.



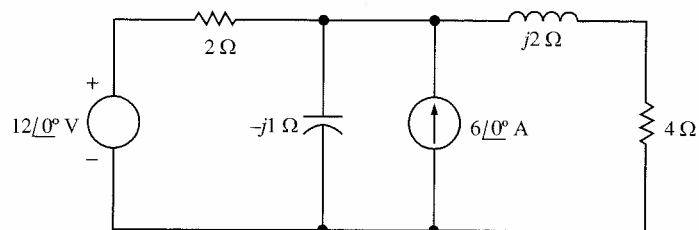
**Figura P11.5**

**11.6** Dada a rede da Figura P11.6, quais elementos estão fornecendo potência, quais estão dissipando potência e quanta potência está sendo fornecida e dissipada?



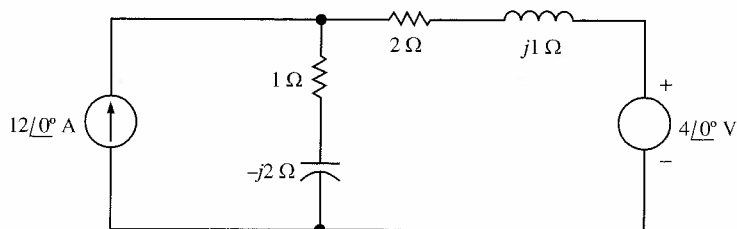
**Figura P11.6**

**11.7** Dado o circuito da Figura P11.7, determine a potência média dissipada pela rede.



**Figura P11.7**

**11.8** Dada a rede da Figura P11.8, determine a potência média fornecida ao circuito.



**Figura P11.8**

- 11.9 Dado o circuito da Figura P11.9, determine a quantidade de potência média fornecida à rede.

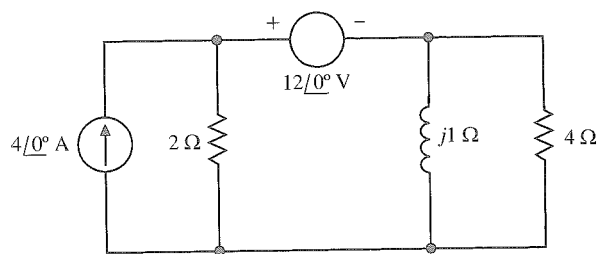


Figura P11.9

- 11.10 Determine a potência média dissipada pelo resistor de 4 Ω na rede mostrada na Figura P11.10.

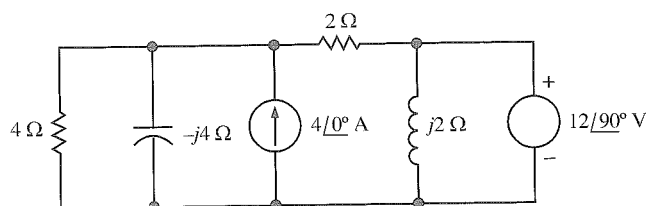


Figura P11.10

- 11.11 Determine a potência média dissipada pelo resistor de 2 Ω no circuito mostrado na Figura P11.11.

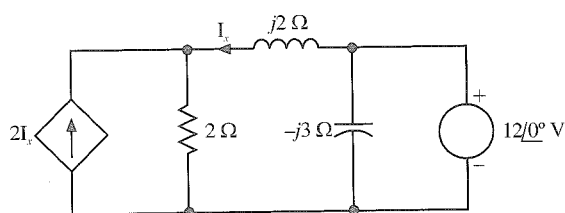


Figura P11.11

- 11.12 Dada a rede da Figura P11.12, determine quais elementos estão fornecendo potência, quais estão dissipando potência e quanta potência está sendo fornecida e dissipada.

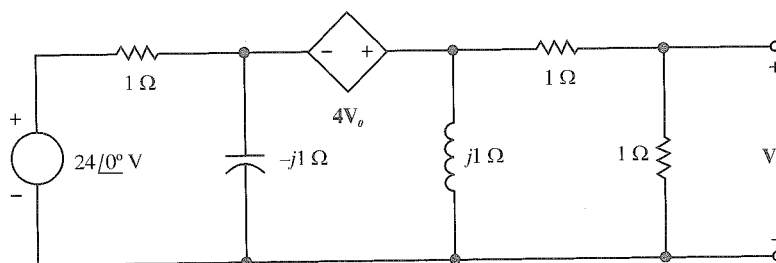


Figura P11.12

- 11.13 Determine a potência média dissipada pelo resistor de saída de 2 kΩ da Figura P11.13.

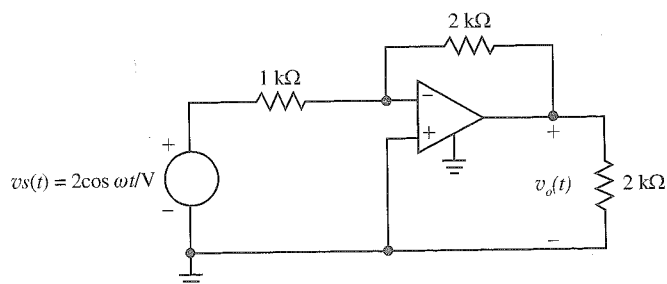
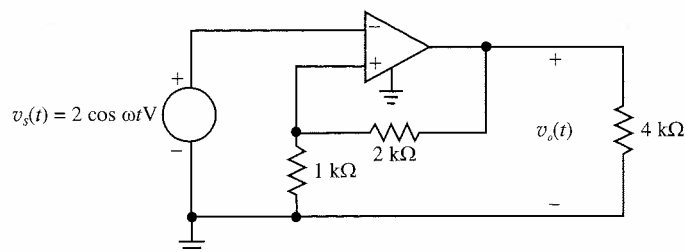


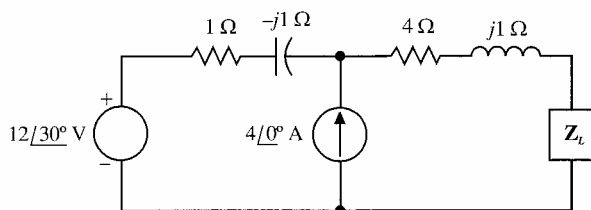
Figura P11.13

**11.14** Determine a potência média dissipada pelo resistor de  $4\text{ k}\Omega$  da Figura P11.14.



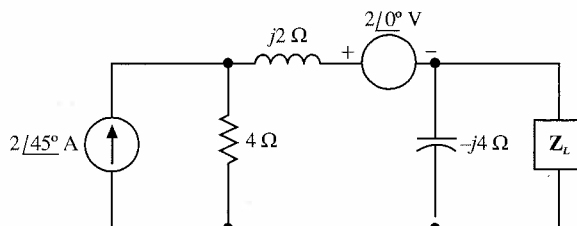
**Figura P11.14**

**11.15** Determine a impedância  $Z_L$  para uma transferência máxima de potência média e o valor de máxima potência média transferida a  $Z_L$  no circuito mostrado na Figura P11.15.



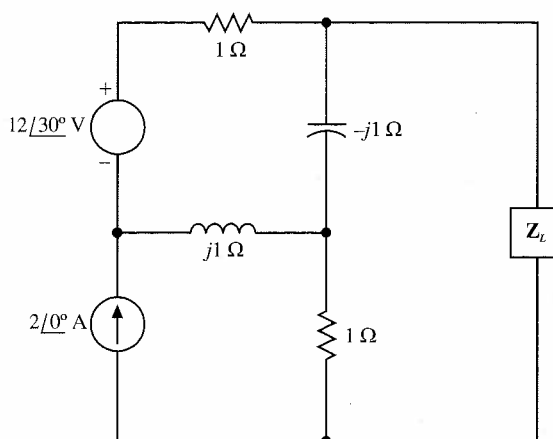
**Figura P11.15**

**11.16** Determine a impedância  $Z_L$  para uma potência média máxima transferida e o valor máximo da potência média dissipada pela carga na rede mostrada na Figura P11.16.



**Figura P11.16**

**11.17** Na rede da Figura P11.17, determine  $Z_L$  para uma transferência máxima de potência média e a potência média máxima transferida.



**Figura P11.17**

11.18 Repita o Problema 11.17 para a rede da Figura P11.18.

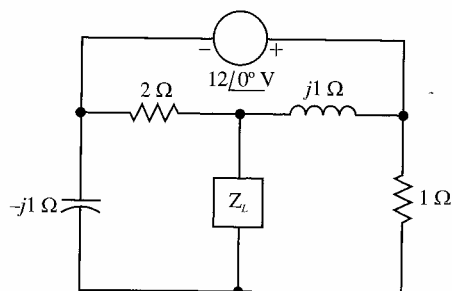


Figura P11.18

11.19 Repita o Problema 11.17 para a rede da Figura P11.19.

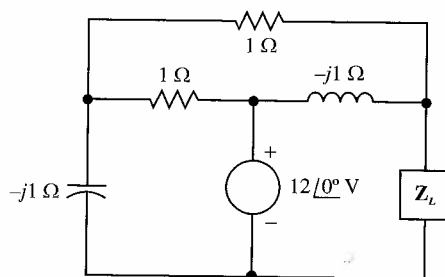


Figura P11.19

11.20 Determine a impedância  $Z_L$  para uma transferência máxima de potência média e o valor de máxima potência média dissipada pela carga na rede mostrada na Figura P11.20.

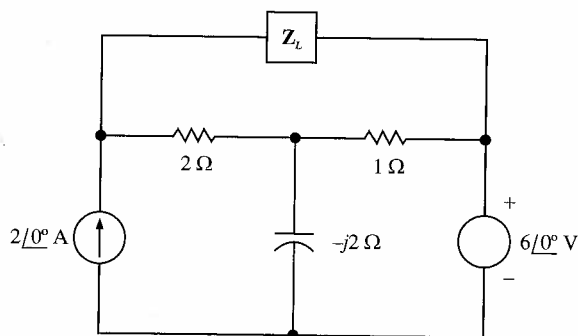


Figura P11.20

11.21 Determine a impedância  $Z_L$  para uma transferência máxima de potência média e o valor de potência média máxima dissipada pela carga na rede mostrada na Figura P11.21.

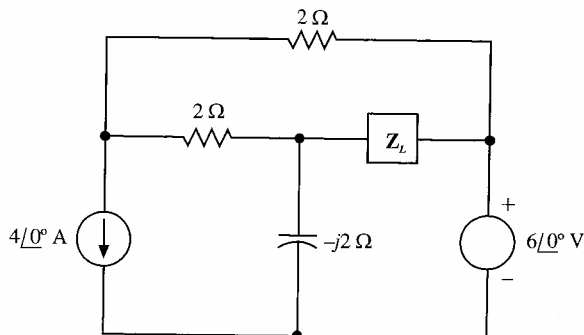


Figura P11.21

- 11.22** Determine a impedância  $Z_L$  para uma transferência máxima de potência média e o valor de potência média máxima dissipada pela carga na rede mostrada na Figura P11.22.

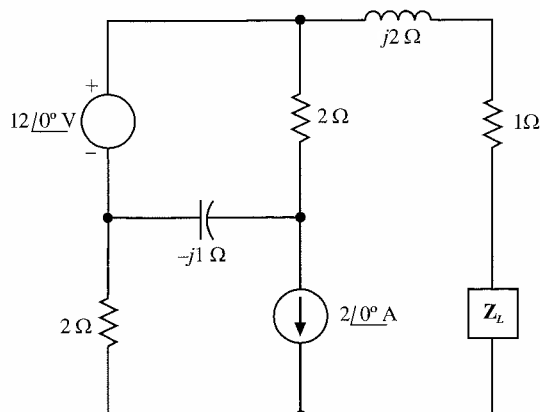


Figura P11.22

- 11.23** Determine a impedância  $Z_L$  para uma transferência máxima de potência média e o valor de potência média máxima dissipada pela carga na rede mostrada na Figura P11.23.

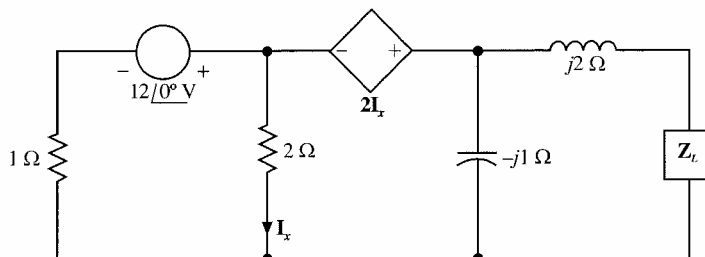


Figura P11.23

- 11.24** Determine a impedância  $Z_L$  para uma transferência máxima de potência média e o valor de potência média máxima dissipada pela carga na rede mostrada na Figura P11.24.

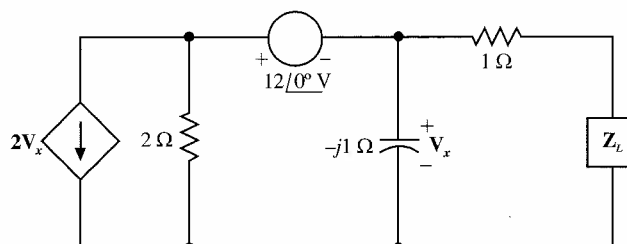


Figura P11.24

- 11.25** Dada a rede da Figura P11.25, determine  $Z_L$  para uma transferência máxima de potência média e a potência média máxima transferida.

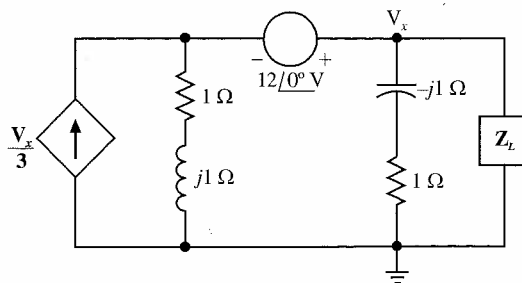


Figura P11.25

- 11.26 Determine a impedância  $Z_L$  para uma transferência máxima de potência média e o valor de potência média máxima transferida à  $Z_L$  no circuito mostrado na Figura P11.26.

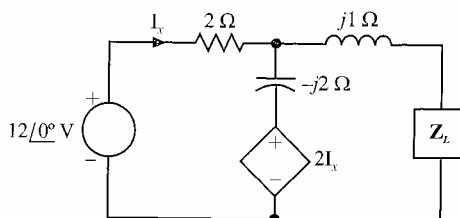


Figura P11.26

- 11.27 Repita o Problema 11.26 para a rede da Figura P11.27.

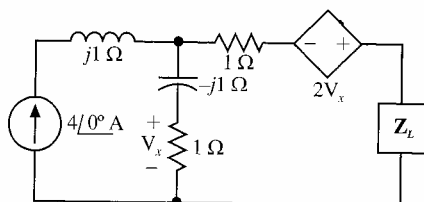


Figura P11.27

- 11.28 Repita o Problema 11.26 para a rede da Figura P11.28.

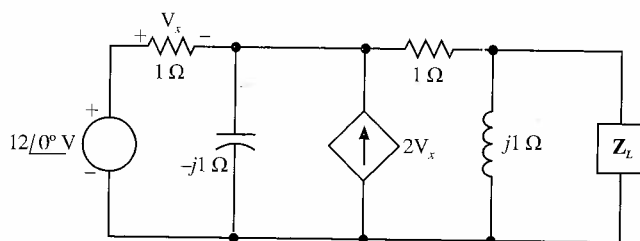


Figura P11.28

- 11.29 Determine o valor rms da forma de onda mostrada na Figura P11.29.

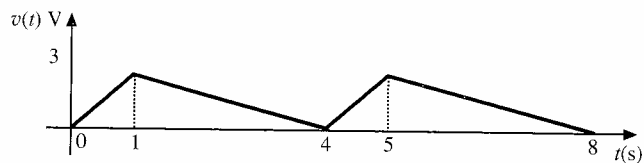


Figura P11.29

- 11.30 Calcule o valor rms da forma de onda mostrada na Figura P11.30.

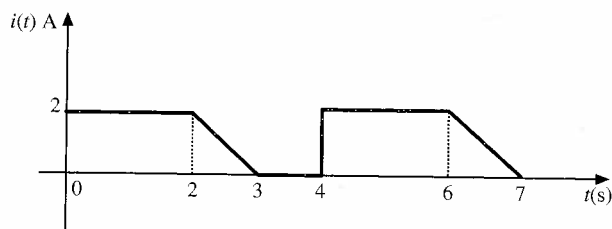
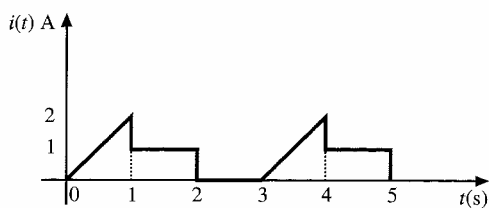


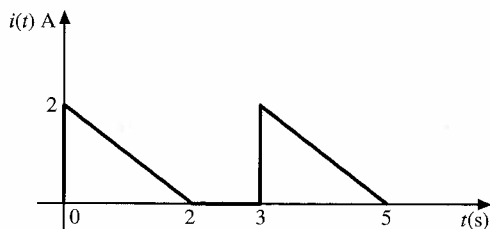
Figura P11.30

**11.31** Calcule o valor rms da forma de onda mostrada na Figura P11.31.



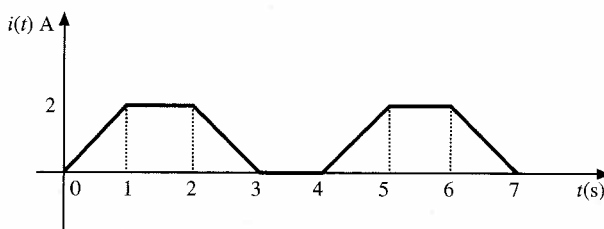
**Figura P11.31**

**11.32** Calcule o valor rms da forma de onda mostrada na Figura P11.32.



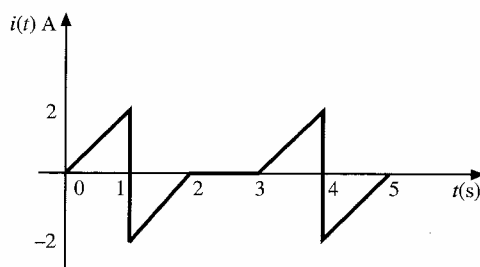
**Figura P11.32**

**11.33** Calcule o valor rms da forma de onda mostrada na Figura P11.33.



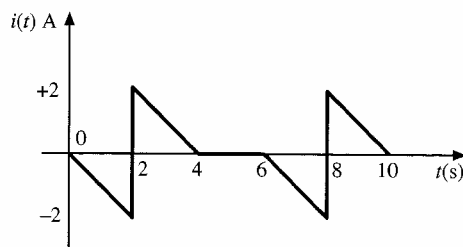
**Figura P11.33**

**11.34** Calcule o valor rms da forma de onda mostrada na Figura P11.34.



**Figura P11.34**

**11.35** Determine o valor rms da forma de onda mostrada na Figura P11.35.



**Figura P11.35**

- 11.36 Calcule o valor rms da forma de onda mostrada na Figura P11.36.

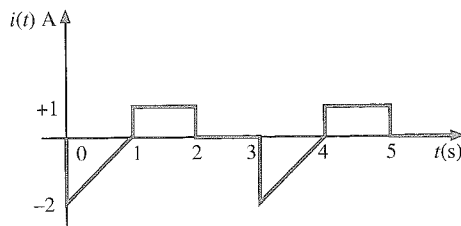


Figura P11.36

- 11.37 Calcule o valor rms da forma de onda mostrada na Figura P11.37.

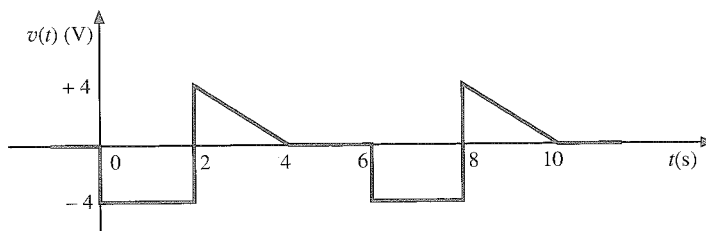


Figura P11.37

- 11.38 Determine o valor rms da forma de onda exponencial mostrada na Figura P11.38.

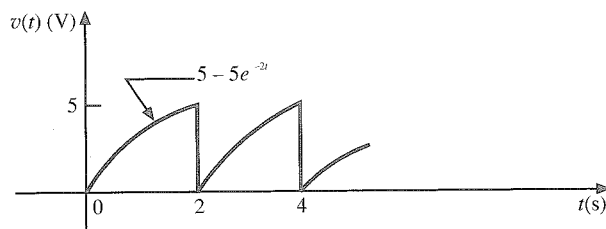


Figura P11.38

- 11.39 Calcule o valor rms da forma de onda seno retificada mostrada na Figura P11.39. Utilize o fato de que  $\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$ .

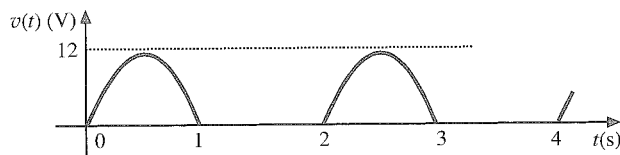


Figura P11.39

- 11.40 Calcule o valor eficaz da tensão dada pela expressão

$$v(t) = 4 \sin(\omega t + 30^\circ) + 6 \sin(2\omega t + 90^\circ) \text{ V}$$

- 11.41 Para as tensões senoidais a seguir, escreva a tensão fasor com magnitude rms de forma polar.

(a)  $v_1(t) = 50 \sqrt{2} \cos(377t + 20^\circ) \text{ V}.$

(b)  $v_2(t) = 32 \sqrt{2} \cos(377t - 30^\circ) \text{ V}.$

(c)  $v_3(t) = 20 \sin(2\pi t + 10^\circ) \text{ V}.$

- 11.42 Uma carga industrial consome 100 kW a um fp 0,8 em atraso. Se um amperímetro na linha de transmissão indica que a corrente da carga é 284 A rms, ache a tensão da carga.

- 11.43 Uma planta industrial com carga indutiva consome 10 kW de potência de uma linha de 220 V rms. Se o fator de potência é 0,8, qual é o ângulo em que a tensão da carga precede a corrente da carga?

- 11.44 Uma carga industrial que consome 80 kW é abastecida pela companhia de energia através de uma linha de transmissão com 0,1  $\Omega$  de resistência, com 84 kW. Se a tensão na carga é de 440 V rms, ache o fator de potência na carga.

- 11.45 A companhia de energia deve gerar 100 kW para alimentar uma carga industrial com 94 kW através de uma linha de transmissão com resistência de 0,09  $\Omega$ . Se o fator de potência é de 0,83 em atraso, determine a tensão da carga.



- 11.46** A companhia de energia fornece 80 kW para uma carga industrial. A carga retira 220 A rms da linha de transmissão. Se a tensão da carga é de 440 V rms e o fator de potência da carga é de 0,8 em atraso, determine as perdas na linha de transmissão.
- 11.47** Uma carga industrial opera a 40 kW, 0,84 fp em atraso, e tensão de 220  $\angle 0^\circ$  V rms. As perdas na potência real e reativa na linha de transmissão são de 2 kW e 8 kvar, respectivamente. Determine a impedância da linha de transmissão e potência complexa no gerador.
- 11.48** A tensão de entrada para uma carga industrial que consome 24 kW a um fp de 0,86 em atraso é de 220  $\angle 0^\circ$  V rms. Se as perdas de potência real e reativa nos alimentadores da linha de transmissão são 1,6 kW e 2,4 kvar, respectivamente, determine a tensão e o fator de potência na entrada da linha de transmissão.
- 11.49** Uma carga industrial opera a 30 kW, a 0,8 fp em atraso. A tensão da carga é 220  $\angle 0^\circ$  V rms. As perdas de potência real e reativa nos alimentadores da linha de transmissão são de 1,8 kW e 2,4 kvar, respectivamente. Determine a impedância da linha de transmissão e a tensão de entrada da linha.
- 11.50** Determine a potência real, a potência reativa, a potência complexa e o fator de potência para uma carga tendo as seguintes características:
- (a)  $I = 2 \angle 40^\circ$  A rms,  $V = 450 \angle 70^\circ$  V rms.
- (b)  $I = 1,5 \angle -20^\circ$  A rms,  $Z = 5.000 \angle 15^\circ \Omega$ .
- (c)  $V = 200 \angle +35^\circ$  V rms,  $Z = 1.500 \angle 15^\circ \Omega$ .
- 11.51** Uma linha de transmissão com impedância  $0,08 + j0,25 \Omega$  é usada para fornecer potência a uma carga. A carga é indutiva e a tensão da carga é 220  $\angle 0^\circ$  V rms a 60 Hz. Se a carga requer 12 kW e a perda de potência real na linha é de 560 W, determine o ângulo do fator de potência da carga.
- 11.52** Determine a entrada de potência complexa na linha de transmissão do Problema 11.51, e a partir desse valor calcule a tensão de entrada e o fator de potência.
- 11.53** Dada a rede da Figura P11.53, determine a tensão de entrada  $V_S$ .

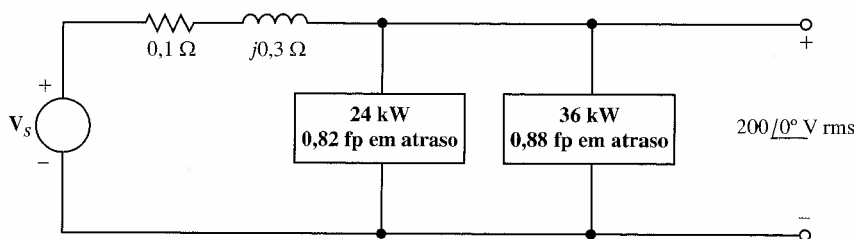


Figura P11.53

- 11.54** Determine a tensão na fonte da rede mostrada na Figura P11.54.

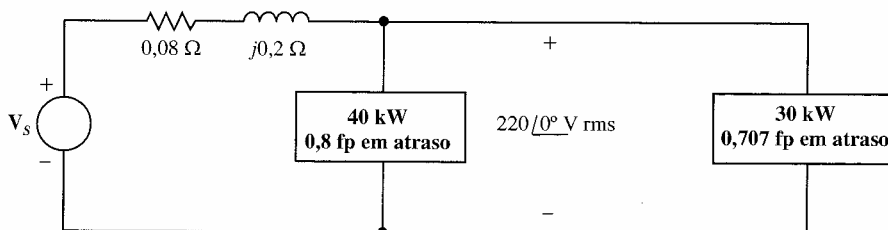


Figura P11.54

- 11.55** Utilize as leis de Kirchhoff para calcular a tensão da fonte da rede mostrada na Figura 11.55.

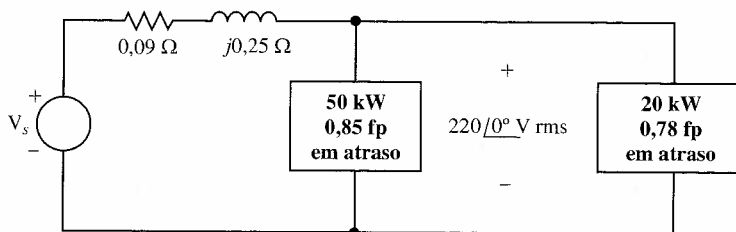


Figura P11.55

11.56 Determine a tensão de entrada da fonte e o fator de potência da fonte na rede da Figura P11.56.

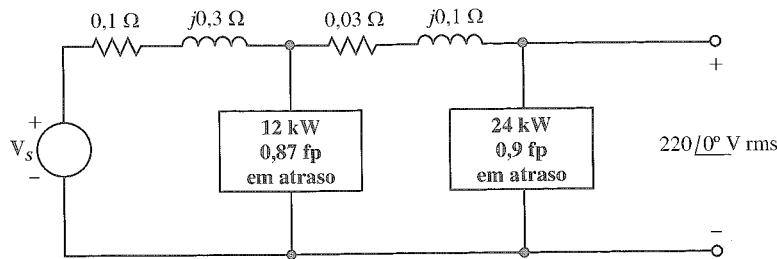


Figura P11.56

11.57 Dada a rede da Figura P11.57, calcule a tensão de entrada da fonte e o fator de potência na entrada.

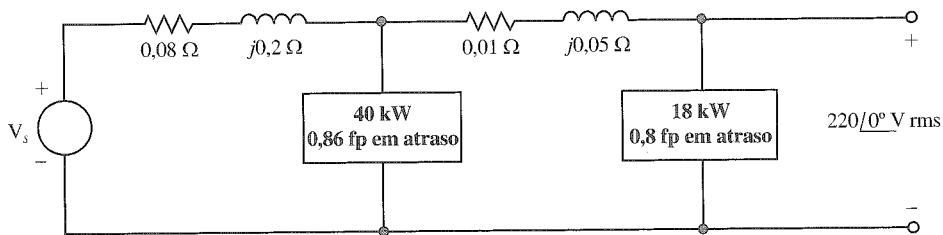


Figura P11.57

- 11.58 Que valor de capacitância deve ser colocado em paralelo com a carga de 18 kW no Problema 11.57 para se aumentar o fator de potência dessa carga para 0,9 em atraso?
- 11.59 Uma carga industrial é alimentada através de uma linha de transmissão que tem uma impedância de linha de  $0,1 + j0,2 \Omega$ . A tensão da linha de 60 Hz na carga é de  $480 \angle 0^\circ$  V rms. A carga consome 124 kW a 0,75 fp em atraso. Qual o valor de capacitância que, quando colocado em paralelo com a carga, mudará o fator de potência para 0,9 em atraso?
- 11.60 A tensão de uma linha de 60 Hz para uma carga industrial que opera a 60 kW, a 0,76 fp em atraso, é de  $440 \angle 0^\circ$  V rms. Determine o valor da capacitância que, quando colocada em paralelo com a carga, aumentará o fator de potência para 0,9 em atraso.
- 11.61 Uma carga industrial consome 44 kW a 0,82 fp em atraso de uma linha de  $220 \angle 0^\circ$  V rms, 60 Hz. Um banco de capacitores totalizando  $900 \mu\text{F}$  está disponível. Se tais capacitores são colocados em paralelo com a carga, qual é o novo fator de potência da carga total?
- 11.62 Um banco de indução de motores consome 36 kW a 0,78 fp em atraso de uma linha de  $220 \angle 0^\circ$  V rms, 60 Hz. Se  $500 \mu\text{F}$  de capacitores é colocado em paralelo com a carga, determine o novo fator de potência da carga combinada.
- 11.63 Dada a rede da Figura P11.63, determine a leitura do wattímetro.

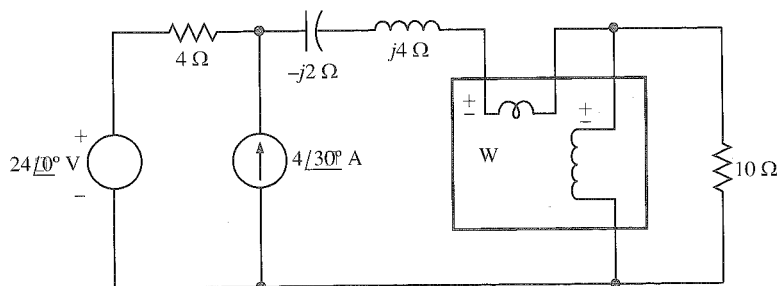
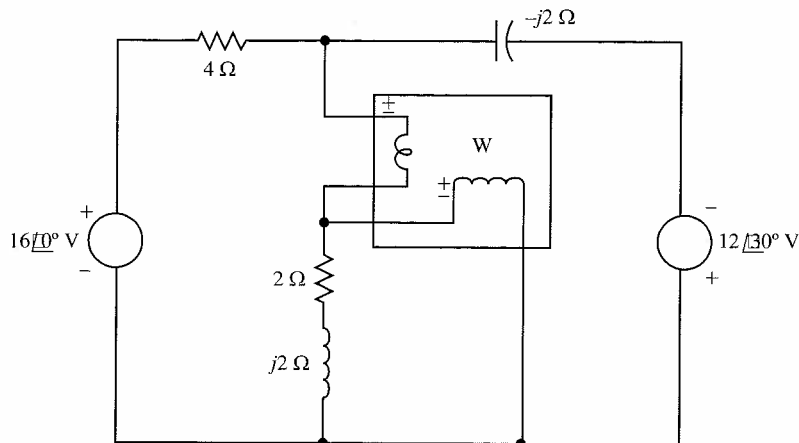


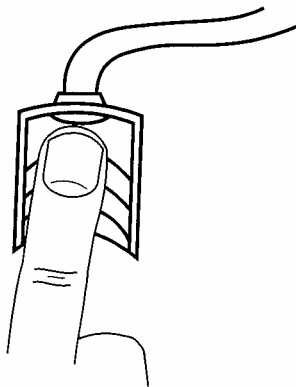
Figura P11.63

**11.64** Dada a rede da Figura P11.64, calcule a leitura do wattímetro.



**Figura P11.64**

**11.65** Para se testar um bucal de luz, uma mulher, em pé sobre almofadas que a isolam do chão, coloca o seu dedo dentro do bucal, como mostrado na Figura P11.65. A ponta de seu dedo faz contato com um lado do fio e a lateral de seu dedo com o outro fio. Assumindo-se que qualquer parte de uma extremidade do corpo tenha uma resistência de  $100\ \Omega$ , existe alguma corrente no corpo? Existe alguma corrente nas cercanias do coração?



**Figura P11.65**

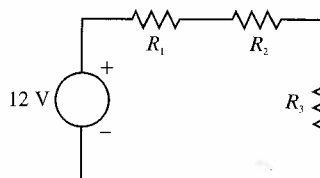
**11.66** Um mecânico novato está instalando uma bateria de 12 V em um carro. O terminal negativo já foi conectado. Ele está agora apertando as roscas no terminal positivo. Com um pulso firme na chave de boca, ele a enrosca de modo tal que o anel de ouro em seu dedo toca na lataria do carro. Tal situação está modelada na Figura P11.66, onde assumimos que a resistência da chave é irrelevante e a resistência do contato é como a seguir:

$$R_1 = R_{\text{roscas para a chave}} = 0,01\ \Omega$$

$$R_2 = R_{\text{chave para o anel}} = 0,01\ \Omega$$

$$R_3 = R_{\text{anel para lataria}} = 0,01\ \Omega$$

Que potência é rapidamente dissipada no anel, e qual é o impacto da tal dissipação de potência?



**Figura P11.66**

**11.67** Um homem e seu filho estão empinando uma pipa. A pipa fica embaraçada em uma linha de força de 7.200 V perto de um poste de luz. Ao tentar remover a pipa, o homem acidentalmente encosta no fio de 7.200 V. Assumindo-se que o poste de luz está devidamente aterrado, qual é a corrente potencial através do corpo do homem?

# Circuitos Polifásicos

## 12.1 Circuitos Trifásicos

Neste capítulo vamos adicionar uma nova dimensão ao nosso estudo de circuitos ac em regime permanente. Até agora temos manipulado circuitos monofásicos. Agora vamos estender tais técnicas de análise para circuitos polifásicos ou, mais especificamente, circuitos trifásicos, isto é, circuitos contendo três fontes de tensão separadas no tempo por um terço de ciclo. Existe um número importante de razões pelas quais estudamos circuitos trifásicos.

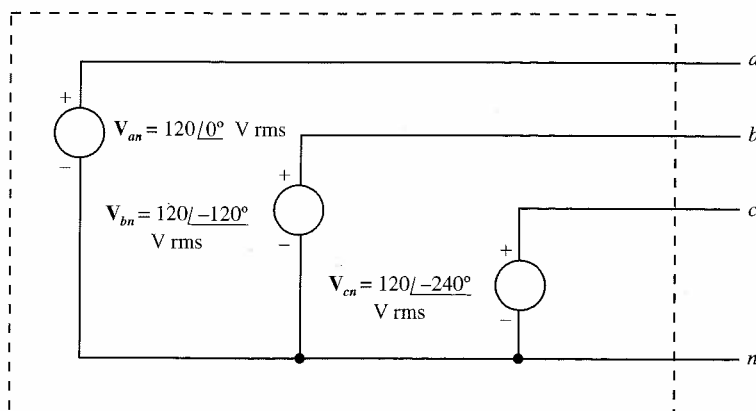
É mais econômico e vantajoso gerar e transmitir energia elétrica no modo polifásico do que em sistemas monofásicos. Conseqüentemente, a maioria da energia elétrica é transmitida usando circuitos polifásicos. Nos Estados Unidos, a frequência do sistema elétrico é de 60 Hz, enquanto que em outras partes do mundo 50 Hz é mais comum.

A transmissão de energia é mais eficiente em alta tensão. Uma vez que tal tensão pode ser extremamente alta se comparada ao nível em que é normalmente usada (por exemplo, em residências), existe a necessidade de aumentar e abaixar a tensão. Isto pode ser feito em sistemas ac usando-se transformadores, que serão estudados no Capítulo 13.

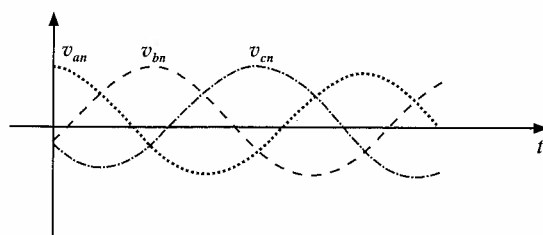
Como o nome diz, circuitos trifásicos são aqueles em que o conjunto de alimentação é um sistema de três fases. Se as três tensões senoidais tiverem a mesma magnitude e frequência e cada tensão estiver 120° fora de fase com as outras duas, diz-se que as tensões estão em *equilíbrio*. Se as correntes na carga também estiverem em equilíbrio, o circuito inteiro é chamado de *circuito trifásico em equilíbrio*.

Um conjunto de três fases de tensões equilibradas pode ser apresentado no domínio da frequência como mostrado na Figura 12.1a, onde assumimos que suas magnitudes são 120 V rms. A partir da figura, notamos que

$$\begin{aligned} V_{an} &= 120 / 0^\circ \text{ V rms} \\ V_{bn} &= 120 / -120^\circ \text{ V rms} \\ V_{cn} &= 120 / -240^\circ \text{ V rms} \\ &= 120 / -120^\circ \text{ V rms} \end{aligned} \tag{12.1}$$



(a)



(b)

**Figura 12.1** Tensões trifásicas em equilíbrio.

Note que a notação de subscrito duplo é exatamente a mesma empregada nos capítulos anteriores; isto é,  $V_{an}$  significa a tensão no ponto  $a$  em relação ao ponto  $n$ . Também iremos empregar a notação de subscrito duplo para correntes; isto é,  $I_{an}$  é usado para representar a corrente que flui de  $a$  para  $n$ . Entretanto, devemos ter o cuidado nesse caso de descrever o caminho de forma precisa, uma vez que em um circuito existe mais de um caminho entre dois pontos. Por exemplo, no caso de um laço único, as duas correntes possíveis nos dois caminhos estarão  $180^\circ$  fora de fase uma da outra.

As tensões fasoriais acima podem ser expressas no domínio do tempo como

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= 120\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V} \\ v_{bn}(t) &= 120\sqrt{2} \cos (\omega t - 120^\circ) \text{ V} \\ v_{cn}(t) &= 120\sqrt{2} \cos (\omega t + 120^\circ) \text{ V} \end{aligned} \quad (12.2)$$

Essas funções são mostradas na Figura 12.1b.

Finalmente, vamos examinar a potência instantânea gerada por um sistema trifásico. Assuma que as tensões na Figura 12.1 são

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= V_m \cos \omega t \text{ V} \\ v_{bn}(t) &= V_m \cos (\omega t - 120^\circ) \text{ V} \\ v_{cn}(t) &= V_m \cos (\omega t - 240^\circ) \text{ V} \end{aligned} \quad (12.3)$$

Se a carga está em equilíbrio, as correntes produzidas pelas fontes são

$$\begin{aligned} i_a(t) &= I_m \cos (\omega t - \theta) \text{ A} \\ i_b(t) &= I_m \cos (\omega t - \theta - 120^\circ) \text{ A} \\ i_c(t) &= I_m \cos (\omega t - \theta - 240^\circ) \text{ A} \end{aligned} \quad (12.4)$$

A potência instantânea produzida pelo sistema é

$$\begin{aligned} p(t) &= p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) \\ &= V_m I_m [\cos \omega t \cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) \\ &\quad + \cos(\omega t - 240^\circ) \cos(\omega t - \theta - 240^\circ)] \end{aligned} \quad (12.5)$$

Usando-se a identidade trigonométrica

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (12.6)$$

a Equação 12.5 se torna

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{V_m I_m}{2} [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) + \cos \theta \\ &\quad + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ) + \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta - 480^\circ)] \end{aligned} \quad (12.7)$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{V_m I_m}{2} [3 \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) \\ &\quad + \cos(2\omega t - \theta - 120^\circ) + \cos(2\omega t - \theta + 120^\circ)] \end{aligned} \quad (12.8)$$

Existe uma identidade trigonométrica que permite simplificar a expressão acima. Essa identidade, que será demonstrada mais adiante, é

$$\cos \phi + \cos(\phi - 120^\circ) + \cos(\phi + 120^\circ) = 0 \quad (12.9)$$

Se empregarmos tal identidade, a expressão para a potência se torna

$$p(t) = 3 \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta W \quad (12.10)$$

Note que essa equação indica que a potência instantânea é sempre constante no tempo, não pulsante como no caso monofásico. Portanto, a potência fornecida por uma fonte de tensão trifásica é praticamente constante, o que é outra importante razão pela qual a potência elétrica é gerada de forma trifásica.

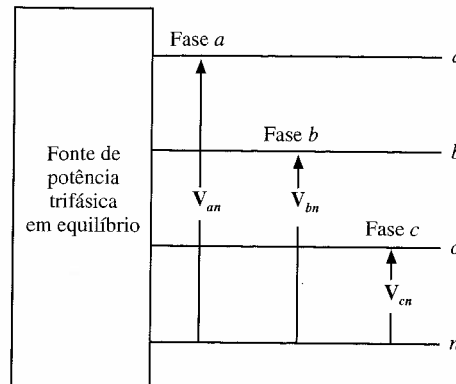
## 12.2 Conexões Trifásicas

A mais importante de todas as fontes de tensão polifásica é a fonte trifásica em equilíbrio. Tal fonte, como ilustrado na Figura 12.2, tem as seguintes propriedades. As tensões de fase, isto é, a tensão de cada linha  $a$ ,  $b$  e  $c$  para o neutro  $n$ , são dadas por

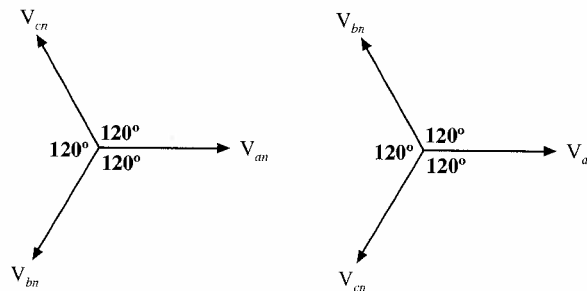
$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{an} &= V_p \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_{bn} &= V_p \angle -120^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= V_p \angle +120^\circ \end{aligned} \quad (12.11)$$

O diagrama de fasores para tais tensões é mostrado na Figura 12.3a. A sequência de fase desse conjunto é dita ser  $abc$ , significando que  $\mathbf{V}_{bn}$  tem um atraso de  $120^\circ$  em relação a  $\mathbf{V}_{an}$ . A outra possibilidade é para  $\mathbf{V}_{bn}$  preceder  $\mathbf{V}_{an}$  de  $120^\circ$  e  $\mathbf{V}_{cn}$  preceder  $\mathbf{V}_{bn}$  de  $120^\circ$ . Essa sequência, que é descrita como  $acb$ , é mostrada na Figura 12.3b e é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{an} &= V_p \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_{bn} &= V_p \angle +120^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= V_p \angle -120^\circ \end{aligned} \quad (12.12)$$



**Figura 12.2** Fonte de tensão trifásica em equilíbrio.



**Figura 12.3** Diagrama de fasores para uma fonte de tensão trifásica em equilíbrio: (a) sequência *abc*; (b) sequência *acb*.

Vamos padronizar nossa notação, de modo que sempre chamaremos as tensões  $V_{an}$ ,  $V_{bn}$  e  $V_{cn}$  e as observemos na ordem *abc*. Além disso, assumiremos normalmente sem nenhuma perda de generalidade que  $\angle V_{an} = 0^\circ$ .

Uma propriedade importante do conjunto de tensão em equilíbrio é que

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0 \quad (12.13)$$

Tal propriedade pode facilmente ser vista decompondo os fasores de tensão nos seus componentes ao longo dos eixos real e imaginário. Isto pode ser também demonstrado via Equação 12.9.

Do ponto de vista do usuário que conecta uma carga à fonte de tensão trifásica em equilíbrio, não importa saber como as tensões são geradas. É importante notar, no entanto, que se as correntes da carga geradas pela conexão de uma carga à fonte mostrada na Figura 12.2 estão também *em equilíbrio*, existem duas configurações possíveis equivalentes para a carga. A carga equivalente pode ser considerada como tendo sido conectada em uma configuração Y ou delta ( $\Delta$ ). A configuração Y em equilíbrio é mostrada na Figura 12.4a e, de igual modo, na Figura 12.4b. A configuração delta é mostrada na Figura 12.5a e, de igual modo, na Figura 12.5b. Note que, no caso da conexão delta, não existe o fio neutro. A função real do fio neutro na conexão Y será examinada, e será mostrado que, em um sistema em equilíbrio, o fio neutro não conduz corrente e, por motivo de análise, pode ser omitido.

### Conexão Y-Y em Equilíbrio

Suponhamos agora que a fonte e a carga estão ambas conectadas em um Y, como mostrado na Figura 12.6. As tensões de fase com sequência de fase positiva são

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_p \angle 0^\circ \\ V_{bn} &= V_p \angle -120^\circ \\ V_{cn} &= V_p \angle +120^\circ \end{aligned} \quad (12.14)$$

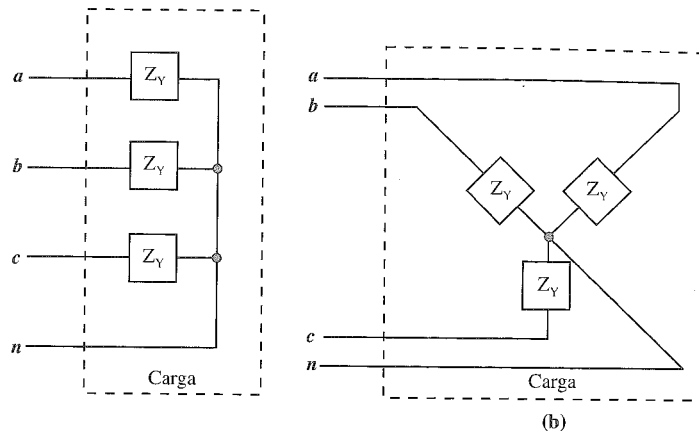


Figura 12.4 Cargas conectadas em Y.

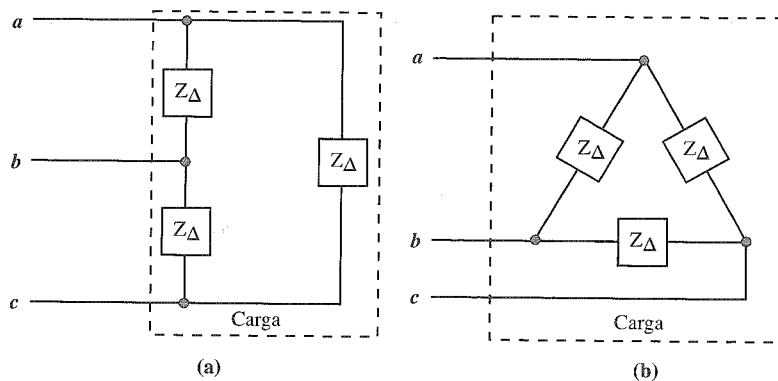


Figura 12.5 Cargas conectadas em Δ.

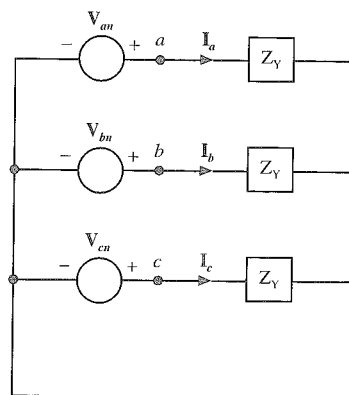


Figura 12.6 Conexão Y-Y trifásica em equilíbrio.

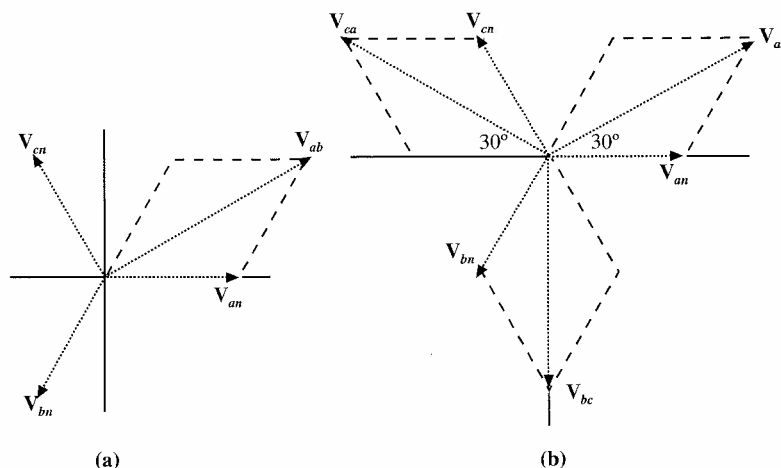
onde  $V_p$ , a tensão de fase, é a magnitude da tensão de fasor do neutro para qualquer outro fio. As *tensões fase a fase* ou, simplesmente, *tensões de linha* podem ser calculadas usando-se a LKT; por exemplo,

$$\begin{aligned}
 V_{ab} &= V_{an} - V_{bn} \\
 &= V_p \angle 0^\circ - V_p \angle -120^\circ \\
 &= V_p - V_p \left[ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
 &= V_p \left[ \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
 &= \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ
 \end{aligned}$$



A adição de fasores é mostrada na Figura 12.7a. De modo semelhante, obtemos o conjunto de tensões fase a fase como

$$\begin{aligned} V_{ab} &= \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ \\ V_{bc} &= \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ \\ V_{ca} &= \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ \end{aligned} \quad (12.15)$$



**Figura 12.7** Representação de fasores de tensões de linha e de fase em um sistema Y-Y em equilíbrio.

Todas as tensões de linha juntas com as tensões de fase são mostradas na Figura 12.7b. Vamos denotar a magnitude das tensões de linha como  $V_L$  e, portanto, para um sistema em equilíbrio,

$$V_L = \sqrt{3} V_p \quad (12.16)$$

Desse modo, em um sistema conectado em Y, a tensão de linha é igual a  $\sqrt{3}$  vezes a tensão de fase. Como mostrado na Figura 12.6, a corrente de linha para a fase  $a$  é

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z_Y} = \frac{V_p \angle 0^\circ}{Z_Y} \quad (12.17)$$

onde  $I_b$  e  $I_c$  têm a mesma magnitude, porém estão atrasadas em relação a  $I_a$  de  $120^\circ$  e  $240^\circ$ , respectivamente.

A corrente neutra  $I_n$  é então

$$I_n = (I_a + I_b + I_c) = 0 \quad (12.18)$$

Já que não existe corrente alguma no neutro, esse condutor poderia ter qualquer impedância ou poderia estar em aberto ou em curto, sem alterar os resultados obtidos acima.

Como ilustrado pela conexão Y-Y da Figura 12.6, a corrente na linha conectando a fonte à carga é a mesma que a corrente de fase fluindo através da impedância  $Z_Y$ . Portanto, em uma conexão Y-Y,

$$I_L = I_Y \quad (12.19)$$

onde  $I_L$  é a magnitude da linha e  $I_Y$  é a magnitude da corrente em uma carga conectada em Y.

É importante notar que embora tenhamos um sistema trifásico composto de três fontes e três cargas, podemos analisar somente uma fase e usar a sequência de fase para obter as tensões e correntes nas outras fases. Isto é, obviamente, um resultado direto da condição de equilíbrio. Podemos ter ainda impedâncias presentes na linha; no entanto, contanto que o sistema permaneça em equilíbrio, precisamos analisar somente uma fase. Se as impedâncias de linha nas linhas  $a$ ,  $b$  e  $c$  forem iguais, o sistema estará em equilíbrio. Lembre-se que o equilíbrio do sistema é inalterado pelo que quer que apareça no condutor neutro e, uma vez que a impedância de tal condutor é arbitrária, assumimos que é zero (ou seja, um curto-circuito).

**Exemplo 12.1**

Uma fonte de tensão trifásica de sequência *abc* conectada em Y e em equilíbrio tem uma tensão de linha de  $V_{ab} = 208 \angle -30^\circ$  V rms. Desejamos determinar as tensões de fase.

A magnitude da tensão de fase é dada pela expressão

$$V_p = \frac{208}{\sqrt{3}}$$

$$V_p = 120 \text{ V rms}$$

As relações entre as tensões de linha e de fase são mostradas na Figura 12.7. Dessa figura notamos que

$$V_{an} = 120 \angle -60^\circ \text{ V rms}$$

$$V_{bn} = 120 \angle -180^\circ \text{ V rms}$$

$$V_{cn} = 120 \angle +60^\circ \text{ V rms}$$

As magnitudes dessas tensões são consideravelmente comuns e freqüentemente se ouve que a alimentação elétrica em um edifício, por exemplo, é trifásica a 208/120 V.

**Exemplo 12.2**

Uma carga trifásica conectada em Y é alimentada por uma fonte de sequência *abc* trifásica conectada em Y e em equilíbrio com uma tensão de fase de 120 V rms. A impedância da linha e a impedância da carga por fase são de  $1 + j1 \Omega$  e  $20 + j10 \Omega$ , respectivamente. Desejamos determinar o valor das correntes de linha e as tensões da carga.

As tensões de fase são

$$V_{an} = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$$

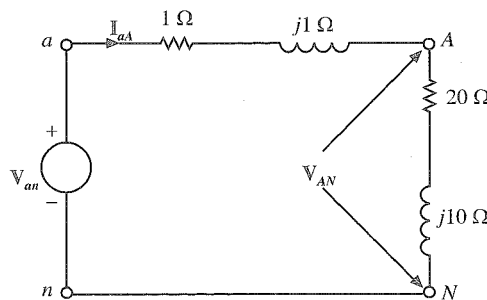
$$V_{bn} = 120 \angle -120^\circ \text{ V rms}$$

$$V_{cn} = 120 \angle +120^\circ \text{ V rms}$$

O diagrama de circuito por fase é mostrado na Figura 12.8. A corrente de linha para a fase *a* é

$$I_{aA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{21 + j11}$$

$$= 5,06 \angle -27,65^\circ \text{ A rms}$$



**Figura 12.8** Diagrama de circuito por fase para o problema do Exemplo 12.2.

A tensão da carga para a fase *a*, a qual chamamos de  $V_{AN}$ , é

$$V_{AN} = (5,06 \angle -27,65^\circ)(20 + j10)$$

$$= 113,15 \angle -1,08^\circ \text{ V rms}$$

As correntes de linha correspondentes e as tensões de carga para as fases  $b$  e  $c$  são

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{bB} &= 5,06 \angle -147,65^\circ \text{ A rms} & \mathbf{V}_{BN} &= 113,15 \angle -121,08^\circ \text{ V rms} \\ \mathbf{I}_{cC} &= 5,06 \angle -267,65^\circ \text{ A rms} & \mathbf{V}_{CN} &= 113,15 \angle -241,08^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

Para enfatizar e esclarecer a terminologia, tensão de fase,  $V_p$ , é a magnitude do fasor de tensão entre o neutro e qualquer outra fase e tensão de linha,  $V_L$ , é a magnitude do fasor de tensão entre quaisquer duas fases. Desse modo, os valores de  $V_p$  e  $V_L$  vão depender do ponto em que são calculados no sistema. ■

### Exercícios

**E12.1** A tensão para a fase  $a$  de uma fonte de sequência de fase  $abc$  conectada em Y e em equilíbrio é  $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 90^\circ \text{ V rms}$ . Determine as tensões de linha para essa fonte.

**Resp.:**  $\mathbf{V}_{ab} = 208 \angle 120^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_{bc} = 208 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_{ca} = 208 \angle -120^\circ \text{ V rms}$ .

**E12.2** Uma fonte de tensão trifásica com sequência de fase  $abc$  conectada em Y e em equilíbrio tem uma tensão de linha de  $\mathbf{V}_{ab} = 208 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ . Determine as tensões de fase para a fonte.

**Resp.:**  $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle -30^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_{bn} = 120 \angle -150^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_{cn} = 120 \angle -270^\circ \text{ V rms}$ .

**E12.3** Uma carga trifásica em Y é alimentada por uma fonte trifásica de sequência  $abc$  conectada em Y e em equilíbrio através de uma linha de transmissão com uma impedância de  $1 + j1 \text{ ohms}$  por fase. A impedância da carga é de  $8 + j3 \text{ ohms}$  por fase. Se a tensão da carga para a fase  $a$  é de  $104,02 \angle 26,6^\circ \text{ V rms}$  (ou seja,  $V_p = 104,02 \text{ V rms}$  no final da carga), determine as tensões de fase para a fonte.

**Resp.:**  $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 30^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_{bn} = 120 \angle -90^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_{cn} = 120 \angle -210^\circ \text{ V rms}$ .

### Conexão Estrela-Delta em Equilíbrio

Outro circuito trifásico importante é o sistema Y-delta em equilíbrio, que é uma fonte conectada em Y e uma carga conectada em delta, como mostrado na Figura 12.9. Da Figura 12.9 notamos que para tal conexão a tensão fase a fase é igual à tensão sobre cada impedância de carga na carga conectada em delta. Portanto, se as tensões de fase da fonte foram

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{an} &= V_p \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_{bn} &= V_p \angle -120^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= V_p \angle +120^\circ \end{aligned} \quad (12.20)$$

então as tensões de linha serão

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ = V_L \angle 30^\circ = \mathbf{V}_{AB} \\ \mathbf{V}_{bc} &= \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ = V_L \angle -90^\circ = \mathbf{V}_{BC} \\ \mathbf{V}_{ca} &= \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ = V_L \angle -210^\circ = \mathbf{V}_{CA} \end{aligned} \quad (12.21)$$

onde  $V_L$  é a magnitude da tensão de linha na carga conectada em delta e na fonte.

A partir da Figura 12.9 notamos que se  $\mathbf{Z}_\Delta = Z_\Delta \angle \theta^\circ$ , as correntes de fase na carga são

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta} = I_\Delta \angle 30^\circ - \theta \quad (12.22)$$

onde  $\mathbf{I}_{BC}$  e  $\mathbf{I}_{CA}$  têm a mesma magnitude, porém estão atrasadas de  $120^\circ$  e  $240^\circ$  em relação a  $\mathbf{I}_{AB}$ , respectivamente.

A magnitude das correntes de fase em  $\Delta$  é

$$I_\Delta = \frac{V_L}{Z_\Delta} \quad (12.23)$$

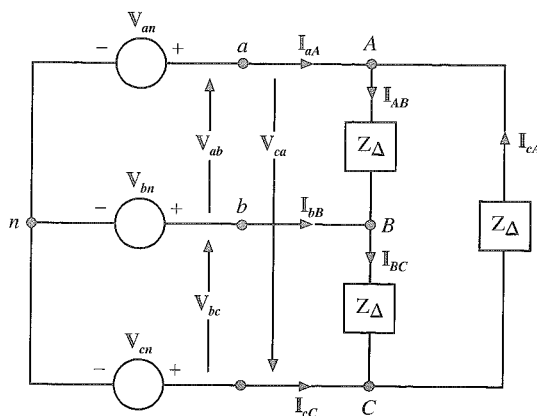


Figura 12.9 Sistema Y-delta trifásico em equilíbrio.

A LKC pode agora ser empregada em conjunto com as correntes de fase para determinar as correntes de linha. Por exemplo,

$$\begin{aligned} I_{aA} &= I_{AB} + I_{AC} \\ &= I_{AB} - I_{CA} \end{aligned}$$

Usando-se o mesmo método empregado anteriormente para determinar a relação entre as tensões de linha e as tensões de fase em uma conexão Y-Y, podemos mostrar que desde que  $\angle V_{an} = 0^\circ$ ,

$$I_{aA} = \sqrt{3} I_{\Delta} \angle -\theta \quad (12.24)$$

onde  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$  têm a mesma magnitude, porém estão atrasadas de  $120^\circ$  e  $240^\circ$  em relação a  $I_{aA}$ , respectivamente, e portanto a relação entre as magnitudes das correntes de linha e as correntes no delta é

$$I_L = \sqrt{3} I_{\Delta} \quad (12.25)$$

O diagrama de fasores na Figura 12.10 ilustra todas as relações importantes entre as correntes e tensões para uma carga conectada em delta.

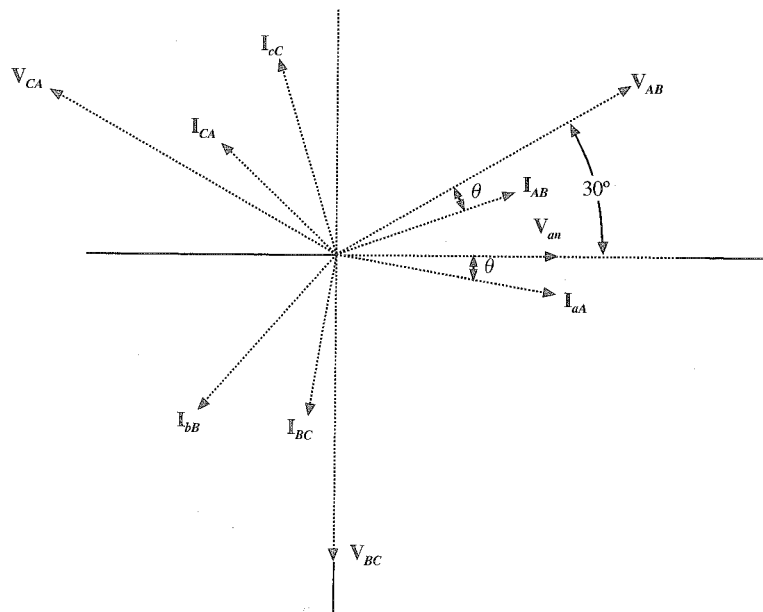


Figura 12.10 Relações entre tensão e corrente para uma carga conectada em delta.

**Exemplo 12.3**

Uma fonte de tensão trifásica em sequência de fase *abc* conectada em Y e em equilíbrio alimenta uma carga equilibrada conectada em delta. A corrente da carga  $I_{AB} = 4 \angle 20^\circ$  A rms. Desejamos determinar as correntes de linha.

Das relações entre  $\Delta$  e as correntes de linha, como especificado nas equações 12.22 e 12.24 e ilustrado na Figura 12.10, notamos que se

$$I_{AB} = 4 \angle 20^\circ \text{ A rms}$$

então

$$I_{aA} = 4\sqrt{3} \angle -10^\circ \text{ A rms}$$

$$I_{bB} = 4\sqrt{3} \angle -130^\circ \text{ A rms}$$

$$I_{cC} = 4\sqrt{3} \angle +110^\circ \text{ A rms}$$

**Exemplo 12.4**

Uma carga equilibrada conectada em delta contém um resistor de  $10 \Omega$  em série com um indutor de  $20 \text{ mH}$  em cada fase. A fonte de tensão equilibrada tem uma sequência *abc* trifásica de  $60 \text{ Hz}$  em Y com uma tensão  $V_{an} = 120 \angle 30^\circ$  V rms. Desejamos determinar todas as correntes  $\Delta$  e correntes de linha.

A impedância por fase na carga delta é  $Z_\Delta = 10 + j7,54 \Omega$ . A tensão de linha  $V_{ab} = 120 \sqrt{3} \angle 60^\circ$  V rms. Uma vez que não há impedância de linha,  $V_{AB} = V_{ab} = 120 \sqrt{3} \angle 60^\circ$  V rms. Desse modo,

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \frac{120 \sqrt{3} \angle 60^\circ}{10 + j7,54} \\ &= 16,60 \angle +22,98^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

Então, do relacionamento especificado nas equações 12.22 e 12.24, temos

$$\begin{aligned} I_{aA} &= 16,60 \sqrt{3} \angle -7,02^\circ \\ &= 28,75 \angle -7,02^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

Logo, as correntes de fase e de linha restantes são

$$\begin{aligned} I_{BC} &= 16,60 \angle -97,02^\circ \text{ A rms} & I_{bB} &= 28,75 \angle -127,02^\circ \text{ A rms} \\ I_{CA} &= 16,60 \angle +142,98^\circ \text{ A rms} & I_{cC} &= 28,75 \angle 112,98^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

**Exercícios**

- E12.4** Uma fonte de tensão de sequência *abc* trifásica conectada em Y e em equilíbrio alimenta uma carga conectada em delta em equilíbrio. A corrente de linha para a fase *a* é  $I_{aA} = 12 \angle 40^\circ$  A rms. Determine as correntes de fase na carga conectada em delta.

**Resp.:**  $I_{AB} = 6,93 \angle 70^\circ$  A rms,  $I_{BC} = 6,93 \angle 50^\circ$  A rms,  $I_{CA} = 6,96 \angle -170^\circ$  A rms.

- E12.5** Uma fonte equilibrada trifásica de sequência *abc* conectada em Y alimenta uma carga equilibrada conectada em delta. A impedância da carga por fase é de  $12 + j8 \Omega$ . Se a corrente  $I_{AB}$  em uma fase de delta é  $14,42 \angle 86,31^\circ$  A rms, determine as correntes de linha e as tensões de fase na carga.

**Resp.:**  $I_a = 24,98 \angle 56,31^\circ$  A rms,  $I_b = I_a \angle -120^\circ$ ,  $I_c = I_a \angle -240^\circ$ ,  $V_{an} = 120 \angle 90^\circ$  V rms,  $V_{bn} = V_{an} \angle -120^\circ$ ,  $V_{cn} = V_{an} \angle -240^\circ$ .

**Fonte Conectada em Delta**

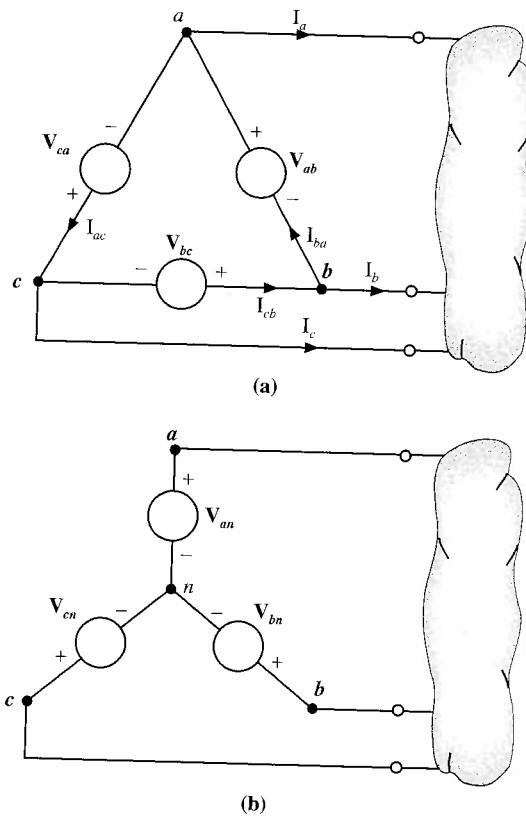
Até agora concentramos nossa discussão em circuitos com fontes conectadas em Y. Entretanto, nossa análise de conexões Y-Y e Y-delta fornece a informação necessária para manipular uma fonte conectada em delta.

Considere a fonte conectada em delta mostrada na Figura 12.11a. Note que as fontes estão conectadas entre fases. Descobrimos anteriormente que as relações entre tensões de linha e de fase foram dadas pela Equação 12.15 e ilustradas na Figura 12.7 para tensões com sequência de fase *abc*. Portanto, se as fontes delta forem

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= V_L \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_{bc} &= V_L \angle -120^\circ \\ \mathbf{V}_{ca} &= V_L \angle +120^\circ \end{aligned} \quad (12.26)$$

onde  $V_L$  é a magnitude da tensão de fase, as fontes equivalentes em Y mostradas na Figura 12.11b serão

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{an} &= \frac{V_L}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = V_p \angle -30^\circ \\ \mathbf{V}_{bn} &= \frac{V_L}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ = V_p \angle -150^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= \frac{V_L}{\sqrt{3}} \angle -270^\circ = V_p \angle +90^\circ \end{aligned} \quad (12.27)$$



**Figura 12.11** Fontes conectadas em delta e Y.

onde  $V_p$  é a magnitude da tensão de fase de uma fonte equivalente conectada em Y. Além disso, se as correntes de linha forem

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a &= I_L \angle \theta \\ \mathbf{I}_b &= I_L \angle \theta - 120^\circ \\ \mathbf{I}_c &= I_L \angle \theta + 120^\circ \end{aligned} \quad (12.28)$$

a corrente de fase  $\mathbf{I}_{ba}$  na fonte delta será

$$\mathbf{I}_{ba} = \frac{\mathbf{I}_L}{\sqrt{3}} \angle \theta + 30^\circ = \mathbf{I}_\Delta \angle \theta + 30^\circ \quad (12.29)$$

onde  $\mathbf{I}_{cb}$  e  $\mathbf{I}_{ac}$  têm a mesma magnitude,  $\mathbf{I}_\Delta$ , porém estão atrasadas em relação a  $\mathbf{I}_{ba}$  de  $120^\circ$  e  $240^\circ$ , respectivamente. Logo, se encontrarmos uma rede contendo uma fonte conectada em delta, podemos facilmente converter a fonte de delta para Y para que todas as técnicas discutidas anteriormente sejam válidas para uma análise.

### Exemplo 12.5

Considere a rede mostrada na Figura 12.12a. Desejamos determinar as correntes de linha, a magnitude da tensão de linha na carga e a magnitude das correntes de fase na fonte delta.

O diagrama monofásico para a rede é mostrado na Figura 12.12b. A corrente de linha  $\mathbf{I}_{aA}$  é

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{aA} &= \frac{(208/\sqrt{3}) \angle -30^\circ}{12,1 + j4,2} \\ &= 9,38 \angle -49,14^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

e dessa forma  $\mathbf{I}_{bB} = 9,38 \angle -169,14^\circ$  A rms e  $\mathbf{I}_{cC} = 9,38 \angle 70,86^\circ$  A rms. A tensão  $\mathbf{V}_{AN}$  é então

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{AN} &= (9,38 \angle -49,14^\circ)(12 + j4) \\ &= 118,66 \angle -30,71^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

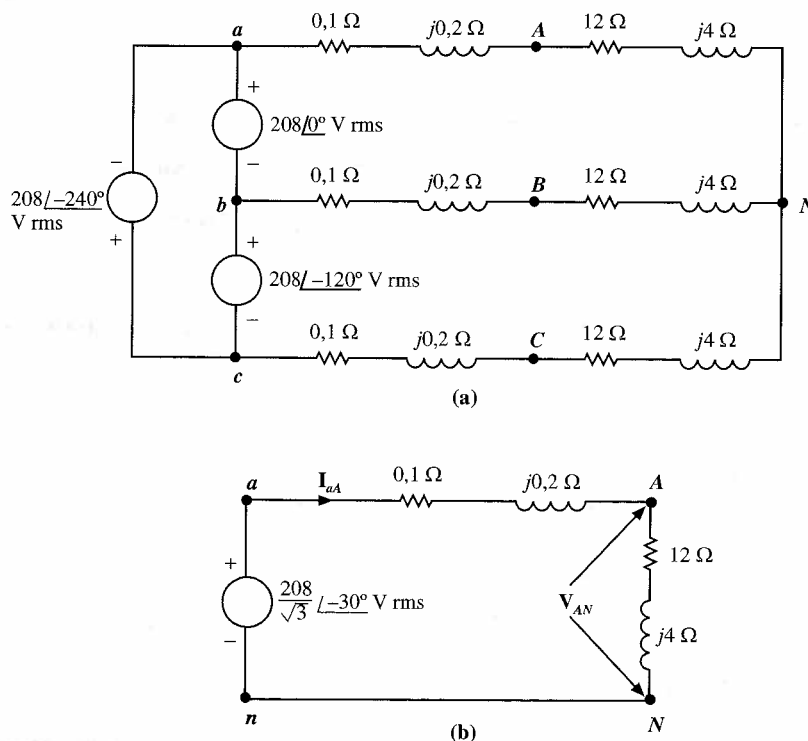


Figura 12.12 Rede delta e Y e um diagrama equivalente monofásico (fase a).

Logo, a magnitude da tensão de linha na carga é

$$\begin{aligned} V_L &= \sqrt{3} (118,66) \\ &= 205,53 \text{ V rms} \end{aligned}$$

A corrente  $I_{ba}$  é

$$\begin{aligned} I_{ba} &= \frac{9,38}{\sqrt{3}} \angle -49,14^\circ + 30^\circ \\ &= 5,42 \angle -19,14^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

Portanto, a magnitude da corrente de fase na fonte delta é  $|I_{ba}| = I_\Delta = 5,42 \text{ A rms}$ .

A tensão de fase na carga é  $V_p = 208 / \sqrt{3} = 120 \text{ V rms}$ , enquanto a tensão de fase na carga é  $V_p = 205,53 / \sqrt{3} = 118,67 \text{ V rms}$ . Claramente, devemos tomar cuidado com a notação e especificar onde a tensão de fase ou linha é tomada.

### Exercício

**E12.6** Considere a rede mostrada na Figura E12.6. Calcule a magnitude das tensões de linha na carga e a magnitude das correntes de fase na fonte conectada em delta.

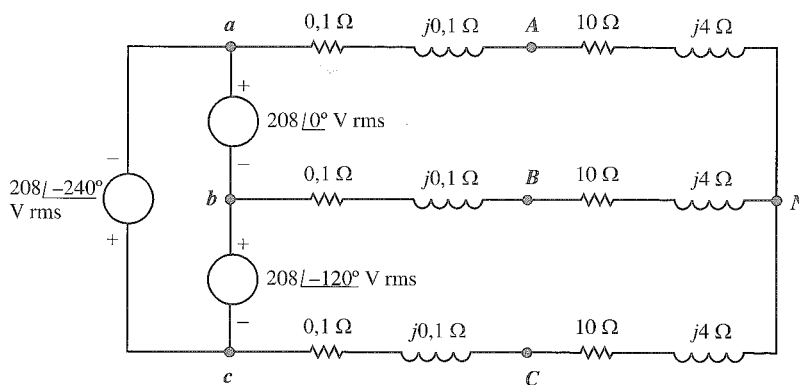


Figura E12.6

*Resp.:  $I_\Delta = 6,36 \text{ A rms}$ ,  $V_L = 241 \text{ V rms}$ .*

### Transformações Delta $\leftrightarrow$ Y

Afirmamos anteriormente que para um sistema em equilíbrio, a configuração equivalente da carga pode ser tanto Y como delta. As Equações 9.47 e 9.48 ilustram o relacionamento geral entre as impedâncias na configuração Y e delta mostradas na Figura 9.16. No entanto, para o caso em equilíbrio onde  $Z_a = Z_b = Z_c$  e  $Z_1 = Z_2 = Z_3$ , as Equações 9.47 e 9.48 se reduzem a

$$Z_Y = \frac{1}{3} Z_\Delta \quad (12.30)$$

e

$$Z_\Delta = 3Z_Y \quad (12.31)$$

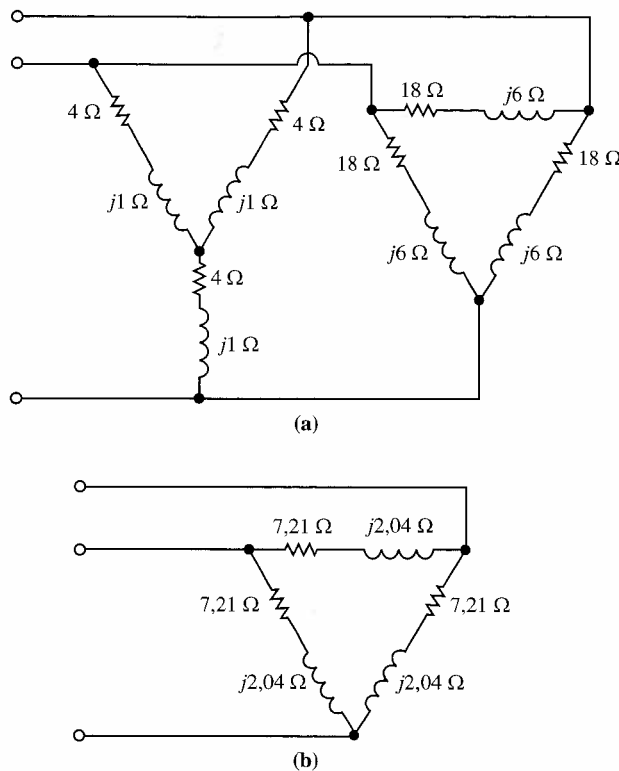
### Exemplo 12.6

A impedância de uma carga trifásica consiste de uma estrela (Y) em equilíbrio em paralelo com um delta ( $\Delta$ ) em equilíbrio, como mostrado na Figura 12.13a. Desejamos determinar a carga equivalente delta.

O equivalente delta para o Y dado é

$$\begin{aligned} Z_\Delta &= 3Z_Y \\ &= 12 + j3 \Omega \end{aligned}$$





**Figura 12.13** Carga trifásica consistindo de um Y em equilíbrio em paralelo com um delta em equilíbrio convertido em uma carga delta equivalente: (a) carga original; (b) carga equivalente.

Essa impedância conectada em delta está em paralelo com a original e, portanto, a impedância por fase do delta combinado é

$$\begin{aligned} Z'_{\Delta} &= \frac{(12 + j3)(18 + j6)}{12 + j3 + 18 + j6} \\ &= 7,21 + j2,04\ \Omega \end{aligned}$$

que mostrada como a carga equivalente na Figura 12.13b. ■

### Exemplo 12.7

Considere a rede mostrada na Figura 12.14a. Desejamos determinar todas as correntes da carga.

O diagrama do circuito para a fase  $a$  é mostrado na Figura 12.14b. Uma vez que a combinação paralela de  $30\ \Omega$  e  $20\ \Omega$  é  $12\ \Omega$ ,

$$\begin{aligned} I_{aA} &= \frac{120 \angle 0^\circ}{16} \\ &= 7,5 \angle 0^\circ\ \text{A rms} \end{aligned}$$

e dessa forma

$$\begin{aligned} V_{AN} &= (7,5 \angle 0^\circ)(12) \\ &= 90 \angle 0^\circ\ \text{V rms} \end{aligned}$$

Na carga original conectada em Y,

$$\begin{aligned} I_{AN} &= \frac{90 \angle 0^\circ}{30} \\ &= 3 \angle 0^\circ\ \text{A rms} \end{aligned}$$

e portanto  $\mathbf{I}_{BN} = 3 \angle -120^\circ$  A rms e  $\mathbf{I}_{CN} = 3 \angle +120^\circ$  A rms.

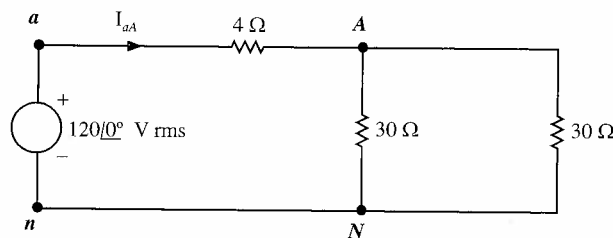
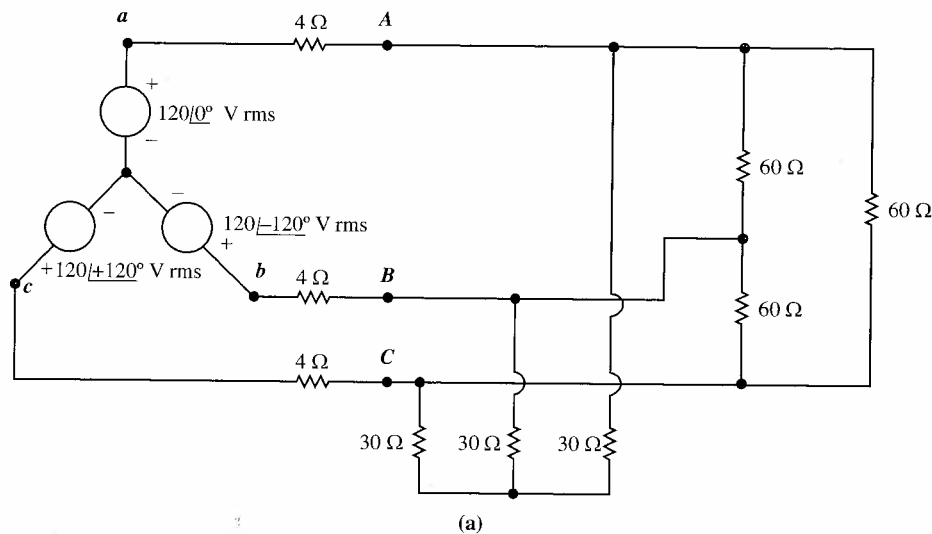
Para a carga original conectada em delta

$$\begin{aligned} V_{AB} &= 90 \sqrt{3} \angle 0^\circ + 30^\circ \\ &= 155,88 \angle 30^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

e dessa maneira

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{AB} &= \frac{155,88 \angle 30^\circ}{60} \\ &= 2,60 \angle 30^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

Logo,  $\mathbf{I}_{BC} = 2,60 \angle -90^\circ$  A rms e  $\mathbf{I}_{CA} = 2,60 \angle +150^\circ$  A rms.



**Figura 12.14** Redes utilizadas no Exemplo 12.7: (a) rede original; (b) rede equivalente da fase a.

Como mostrado na Figura 12.14a, a corrente de linha deve ser igual à soma das correntes da carga. Dessa forma

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{aA} &= \mathbf{I}_{AN} + \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} \\ &= \mathbf{I}_{AN} + \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} \\ &= 3 \angle 0^\circ + 2,6 \angle 30^\circ - 2,6 \angle 150^\circ \\ &= 7,5 \angle 0^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

o que confirma nossos cálculos. ■

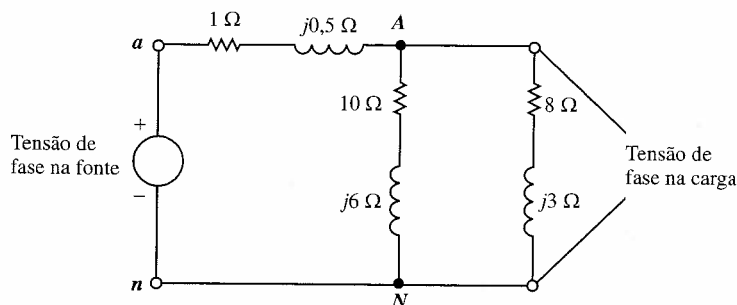
**Exemplo 12.8**

Um sistema trifásico em equilíbrio tem uma carga que consiste de um Y em equilíbrio em paralelo com um delta em equilíbrio. A impedância por fase para o Y é  $10 + j6 \Omega$  e para o delta é  $24 + j9 \Omega$ . A fonte é um Y em equilíbrio com uma sequência de fase  $abc$ , e a tensão de linha  $V_{ab} = 208 \angle 30^\circ$  V rms. Se a impedância de linha por fase é de  $1 + j0,5 \Omega$ , queremos determinar as correntes de linha e as tensões de fase da carga, quando a carga é convertida a um Y equivalente.

Convertendo-se a carga delta em uma carga equivalente Y, obtemos

$$Z_{Y1} = \frac{1}{3} Z_{\Delta1} = 8 + j3 \Omega$$

O circuito equivalente por fase é mostrado na Figura 12.15. Já que a tensão de linha na fonte é  $V_{ab} = 208 \angle 30^\circ$  V rms, a tensão de fase na fonte é  $V_{an} = 120 \angle 0^\circ$  V rms.



**Figura 12.15** Circuito equivalente por fase para o Exemplo 12.8.

Lembre-se que uma vez que as cargas estão em equilíbrio, os pontos neutros podem ser conectados. A impedância da carga equivalente Y é

$$\begin{aligned} Z_Y &= \frac{Z_{Y1} Z_{Y2}}{Z_{Y1} + Z_{Y2}} \\ &= \frac{(10 + j6)(8 + j3)}{10 + j6 + 8 + j3} = 4,95 \angle 24,95^\circ \\ &= 4,49 + j2,09 \Omega \end{aligned}$$

A corrente de linha  $I_a$  é então

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{V_{an}}{Z_{\text{linha}} + Z_Y} \\ &= \frac{120 \angle 0^\circ}{1 + j0,5 + 4,49 + j2,09} \\ &= 19,77 \angle -25,26^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

A tensão de fase na carga é então  $V_p = |V_{AN}|$ , onde

$$\begin{aligned} V_{AN} &= I_a Z_Y \\ &= (19,77 \angle -25,26^\circ)(4,95 \angle 24,95^\circ) \\ &= 97,86 \angle -0,31^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

Portanto, as correntes de linha e tensões de fase da carga são

$$\begin{aligned} I_{aA} &= 19,77 \angle -25,26^\circ \text{ A rms} & V_{AN} &= 97,86 \angle -0,31^\circ \text{ V rms} \\ I_{bB} &= 19,77 \angle -145,26^\circ \text{ A rms} & V_{BN} &= 97,86 \angle -120,31^\circ \text{ V rms} \\ I_{cC} &= 19,77 \angle +94,74^\circ \text{ A rms} & V_{CN} &= 97,86 \angle +119,69^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

Desse modo, a carga  $V_p = 97,86$  V rms e  $V_L = \sqrt{3} V_p = 169,50$  V rms. ■

**Exercício**

**E12.7** Em um sistema trifásico equilibrado, a carga equilibrada consiste de um Y em paralelo com um delta em equilíbrio. A impedância por fase para o Y é  $8 + j4 \, \Omega$  e para o delta é  $18 + j6 \, \Omega$ . A fonte é um Y seqüência de fase  $abc$  em equilíbrio e  $V_{an} = 120 \angle 60^\circ \text{ V rms}$ . Se a impedância de linha por fase for  $1 + j1 \, \Omega$ , determine a magnitude das correntes de fase em cada carga.

**Resp.:**  $I_\Delta = 1,68 \text{ A rms}$ .

**Relações de Potência**

Se a carga estiver conectada em Y ou em delta, a potência real e reativa por fase será

$$\begin{aligned} P_p &= V_p I_L \cos \theta \\ Q_p &= V_p I_L \sin \theta \end{aligned} \quad (12.32)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a tensão de fase e a corrente de linha, ou

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{V_L I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ Q_p &= \frac{V_L I_L}{\sqrt{3}} \sin \theta \end{aligned} \quad (12.33)$$

A potência real ou reativa para todas as três fases é então

$$\begin{aligned} P_T &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \\ Q_T &= \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta \end{aligned} \quad (12.34)$$

e, portanto, a magnitude da potência complexa (potência aparente) é

$$\begin{aligned} |S_T| &= \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} \\ &= \sqrt{3} V_L I_L \end{aligned} \quad (12.35)$$

e

$$\angle S_T = \theta$$

**Exemplo 12.9**

Um sistema trifásico Y-delta em equilíbrio tem uma tensão de linha de 208 V rms. A potência real absorvida pela carga é de 1.200 W. O ângulo do fator de potência da carga é  $20^\circ$  em atraso. Desejamos determinar a magnitude da corrente de linha e o valor da impedância da carga por fase no delta.

A corrente de linha pode ser obtida da Equação 12.33. Uma vez que a potência real por fase é 400 W,

$$\begin{aligned} 400 &= \frac{208 I_L}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ \\ I_L &= 3,5 \text{ A rms} \end{aligned}$$

A magnitude da corrente em cada perna da carga conectada em delta é

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \frac{I_L}{\sqrt{3}} \\ &= 2,04 \text{ A rms} \end{aligned}$$

Portanto, a magnitude da impedância delta em cada fase da carga é

$$\begin{aligned} |Z_{\Delta}| &= \frac{V_L}{I_{\Delta}} \\ &= \frac{208}{2,04} \\ &= 101,77 \Omega \end{aligned}$$

Uma vez que o ângulo do fator de potência é  $20^\circ$  em atraso, a impedância da carga é

$$\begin{aligned} Z_{\Delta} &= 101,77 \angle 20^\circ \\ &= 95,63 + j34,81 \Omega \end{aligned}$$

### Exemplo 12.10

Para o circuito do Exemplo 12.2, desejamos determinar a potência real e reativa por fase na carga e a potência real, potência reativa e potência complexa totais na fonte.

A partir dos dados no Exemplo 12.2, a potência complexa por fase na carga é

$$\begin{aligned} S_{\text{carga}} &= VI^* \\ &= (113,15 \angle -1,08^\circ)(5,06 \angle 27,65^\circ) \\ &= 572,54 \angle 26,57^\circ \\ &= 512,07 + j256,1 \text{ VA} \end{aligned}$$

Portanto, as potências real e reativa por fase na carga são 512,07 W e 256,1 var, respectivamente. A potência complexa por fase na fonte é

$$\begin{aligned} S_{\text{fonte}} &= VI^* \\ &= (120 \angle 0^\circ)(5,06 \angle 27,65^\circ) \\ &= 607,2 \angle 27,65^\circ \\ &= 537,90 + j281,8 \text{ VA} \end{aligned}$$

e portanto, potência real, potência reativa e potência aparente total na carga são 1613,7 W, 845,4 var e 1821,6 VA, respectivamente.

### Exemplo 12.11

Uma fonte trifásica em equilíbrio serve a três cargas como se segue:

Carga 1: 24 kW a um fator de potência 0,6 em atraso

Carga 2: 10 kW a um fator de potência unitário

Carga 3: 12 kVA a um fator de potência 0,8 em avanço

A tensão de linha nas cargas é 208 V rms a 60 Hz. Desejamos determinar a corrente de linha e o fator de potência combinado das cargas.

A partir dos dados, descobrimos que

$$\begin{aligned} S_1 &= 24.000 + j32.000 \\ S_2 &= 10.000 + j0 \\ S_3 &= 12.000 \angle -36,9^\circ = 9.600 + j7.200 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 S_{\text{carga}} &= 43.600 + j24.800 \\
 &= 50.160 \angle 29,63^\circ \text{ VA} \\
 I_L &= \frac{|S_{\text{carga}}|}{\sqrt{3} V_L} \\
 &= \frac{50.160}{208 \sqrt{3}} \\
 I_L &= 139,23 \text{ A rms}
 \end{aligned}$$

e o fator de potência combinado é

$$\begin{aligned}
 \text{fp}_{\text{carga}} &= \cos 29,63^\circ \\
 &= 0,869 \text{ em atraso}
 \end{aligned}$$

### Exemplo 12.12

Dado o sistema trifásico do Exemplo 12.11, vamos determinar a tensão de linha e o fator de potência na fonte se a impedância de linha for  $Z_{\text{linha}} = 0,05 + j0,02 \Omega$ .

A potência complexa que fica na impedância da linha é

$$\begin{aligned}
 S_{\text{linha}} &= 3(\mathbf{R}_{\text{linha}} I_L^2 + j\mathbf{X}_{\text{linha}} I_L^2) \\
 &= 3077 + j1231 \text{ VA}
 \end{aligned}$$

A potência complexa fornecida pela fonte é então

$$\begin{aligned}
 S_S &= S_{\text{carga}} + S_{\text{linha}} \\
 &= 43.600 + j24.800 + 3077 + j1231 \\
 &= 53.445 \angle 29,15^\circ \text{ VA}
 \end{aligned}$$

A tensão de linha na fonte é então

$$\begin{aligned}
 V_{L_S} &= \frac{|S_S|}{\sqrt{3} I_L} \\
 &= 215,43 \text{ V rms}
 \end{aligned}$$

e o fator de potência na fonte é

$$\begin{aligned}
 \text{fp}_S &= \cos 29,15^\circ \\
 &= 0,873 \text{ em atraso}
 \end{aligned}$$

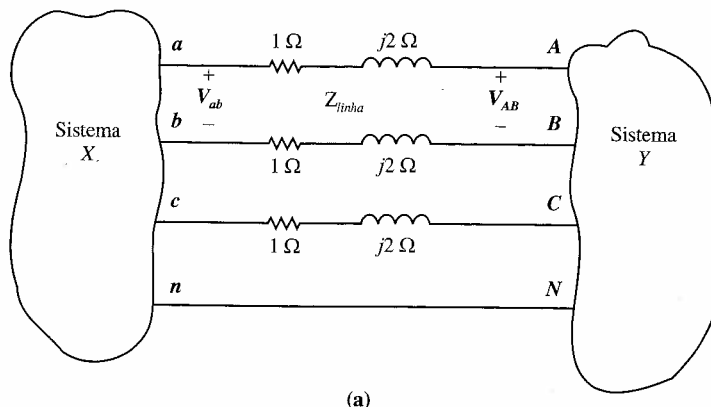
### Exemplo 12.13

Dois sistemas trifásicos em equilíbrio, X e Y, estão interconectados com impedâncias de linha  $Z_{\text{linha}} = 1 + j2 \Omega$ . As tensões de linha são  $V_{ab} = 12 \angle 0^\circ \text{ kV rms}$  e  $V_{AB} = 12 \angle 5^\circ \text{ kV rms}$ , como mostrado na Figura 12.16a. Desejamos determinar qual sistema é a fonte, qual é a carga e a potência média fornecida pela fonte e dissipada pela carga.

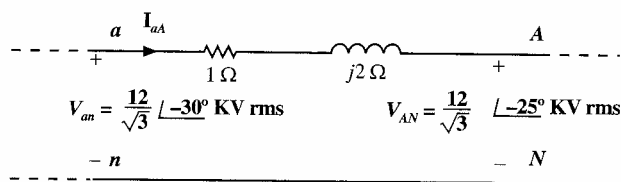
Quando desenhamos o circuito por fase para o sistema, como mostrado na Figura 12.16b, a análise será essencialmente a mesma que a do Exemplo 11.14.

A rede da Figura 12.16b indica que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{aA} &= \frac{\mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_{\text{linha}}} \\
 &= \frac{\frac{12.000}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ - \frac{12.000}{\sqrt{3}} \angle -25^\circ}{\sqrt{5} \angle 63,43^\circ} \\
 &= 270,30 \angle -180,93^\circ \text{ A rms}
 \end{aligned}$$



(a)



(b)

**Figura 12.16** Circuitos usados no Exemplo 12.13: (a) sistema trifásico original; (b) circuito por fase.

A potência média dissipada pelo sistema Y é

$$\begin{aligned} P_Y &= \sqrt{3} |V_{AB}| |I_{aA}| \cos(\theta_{V_{AN}} - \theta_{I_{aA}}) \\ &= \sqrt{3} (12.000) (270,30) \cos(-25^\circ + 180,93^\circ) \\ &= -5,130 \text{ MW} \end{aligned}$$

Note que o sistema Y não é carga, porém a fonte, e fornece 5,130 MW.

O sistema X dissipa a seguinte potência média:

$$P_X = \sqrt{3} |V_{ab}| |I_{aA}| \cos(\theta_{V_{an}} - \theta_{I_{aA}})$$

onde

$$I_{Aa} = -I_{aA} = 270,30 \angle -0,93^\circ \text{ A rms}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_X &= \sqrt{3} (12.000) (270,30) \cos(-30^\circ + 0,93^\circ) \\ &= 4,910 \text{ MW} \end{aligned}$$

e desse modo o sistema X é a carga.

A diferença entre a potência fornecida pelo sistema Y e a dissipada pelo sistema X é, obviamente, a potência dissipada pela resistência das três linhas. ■

O exemplo anterior ilustra um ponto interessante. Note que a diferença de fase entre duas pontas da linha de distribuição determina a direção do fluxo de potência. Uma vez que numerosas companhias de energia dos Estados Unidos estão ligadas para formar a rede elétrica, a fase entre linhas de transmissão interconectadas reflete a maneira pela qual a potência é transferida entre as companhias de força.

## Exercícios

**E12.8** Um sistema trifásico Y-Y em equilíbrio tem uma tensão de linha de 208 V rms. A potência real total dissipada pela carga é de 12 kW a 0,8 fp em atraso. Determine a impedância por fase da carga.

**Resp.:**  $Z = 2,88 \angle 36,87^\circ \Omega$ .

E12.9 Para o sistema Y-Y em equilíbrio descrito no Exercício E12.3, determine a potência real e reativa e a potência complexa na carga e na fonte.

Resp.:  $S_{\text{carga}} = 1186,27 + j444,94 \text{ VA}$ ,  $S_{\text{fonte}} = 1335,65 + j593,55 \text{ VA}$ .

E12.10 Uma linha de 480 V rms alimenta duas cargas trifásicas em equilíbrio. Se as duas cargas são classificadas como a seguir,

Carga 1: 5 kVA a 0,8 fp em atraso

Carga 2: 10 kVA a 0,9 fp em atraso

determine a magnitude da corrente de linha da fonte de 480 V rms.

Resp.:  $I_L = 17,97 \text{ A rms}$ .

## 12.3 Análise PSPICE para Circuitos Trifásicos

Todo o material necessário para se aplicar PSPICE em circuitos trifásicos já foi apresentado nos capítulos anteriores. Portanto, nosso enfoque nesta seção será demonstrar o uso do PSPICE mediante vários exemplos. Diferindo das seções anteriores deste capítulo, vamos analisar a rede trifásica por inteiro e não confiar na condição de equilíbrio para tratar uma única fase. Além disso, vamos ilustrar como resolver dois problemas com PSPICE que naturalmente ocorrem em um sistema conectado em delta. Como dissemos antes, quando somente a impedância estiver especificada, iremos, por conveniência, assumir em nossa análise que  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  e, dessa forma,  $f = 1/2\pi \text{ Hz}$ .

### Exemplo 12.14

Um sistema trifásico Y-Y em equilíbrio que está marcado para análise PSPICE é mostrado na Figura 12.17. O seguinte programa PSPICE vai calcular as correntes de linha, as tensões de carga de fase e as tensões linha de linha de carga.  $f = 1/2\pi \text{ Hz}$ . O programa é

```
EXAMPLE 12.14
VAN 1 0 AC 120 0
VBN 5 0 AC 120 -120
VCN 6 0 AC 120 -240
RAN 1 2 10
RBN 5 4 10
RCN 6 7 10
LAN 2 3 2
LBN 4 3 2
LCN 7 3 2
.PRINT AC IM(VAN) IP(VAN) VM(1,3) VP(1,3)
.PRINT AC IM(VBN) IP(VBN) VM(5,3) VP(5,3)
.PRINT AC IM(VCN) IP(VCN) VM(6,3) VP(6,3)
.PRINT AC VM(1,5) VP(1,5) VM(5,6) VP(5,6)
+ VM(6,1) VP(6,1)
.AC LIN 1 .159155 .159155
.END
```

A saída do computador é

```
I(VAN) = 11.77 /168.7° A rms
V(1,3) = 120 /0°
V(1,5) = 207.8 /30° V rms
```

Lembrando que  $I(VAN)$  é a corrente do nó 1 para o nó 0 através da fonte  $V_{an}$ , vemos que a corrente de linha fluindo dos nós 1 para 2 é  $-I(VAN) = 11,77 \text{ A rms}$   $\angle -11,3^\circ$ . ■



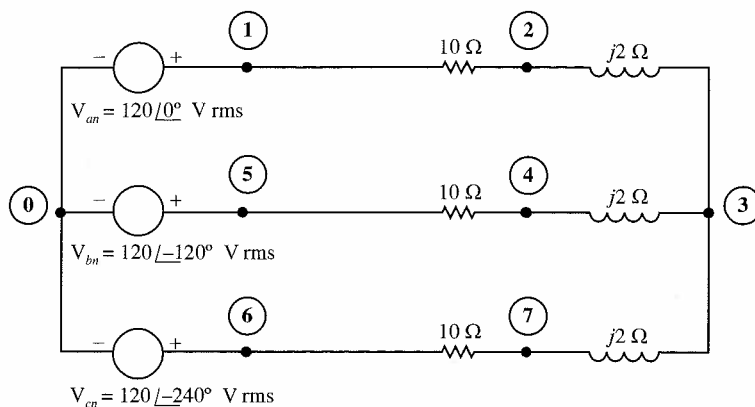


Figura 12.17 Sistema trifásico Y-Y em equilíbrio marcado para análise PSPICE.

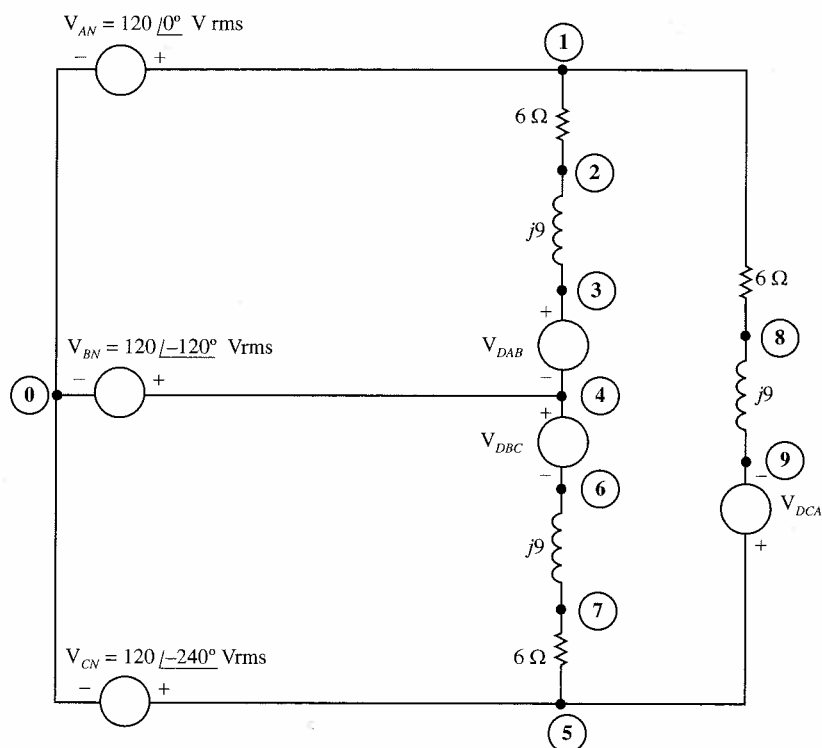


Figura 12.18 Sistema trifásico Y-delta em equilíbrio marcado para análise PSPICE.

### Exemplo 12.15

Um sistema trifásico Y-delta em equilíbrio pronto para análise PSPICE é mostrado na Figura 12.18. O seguinte programa PSPICE vai calcular as correntes de linha, correntes de carga e tensões de carga.  $f = 1/2\pi$  Hz.

O programa é

```
EXAMPLE 12.15
VAN 1 0 AC 120 0
VBN 4 0 AC 120 -120
VCN 5 0 AC 120 -240
RAB 1 2 6
LAB 2 3 9
VDAB 3 4 AC 0
RBC 7 5 6
LBC 6 7 9
VDBC 4 6 AC 0
```

```

RCA 1 8 6
LCA 8 9 9
VDCA 5 9 AC 0
.PRINT AC IM(VAN) IP(VAN) IM(VBN) IP(VBN)
+ IM(VCN) IP(VCN)
.PRINT AC IM(VDAB) IP(VDAB) VM(1,4) VP(1,4)
.PRINT AC IM(VDBC) IP(VDBC) VM(4,5) VP(4,5)
.PRINT AC IM(VDCA) IP(VDCA) VM(5,1) VP(5,1)
.AC LIN 1 .159155 .159155
.END

```

A saída do programa é

```

I(VAN) = 33.28 /123.7° A rms
V(VDAB) = 19.22 /-26.31° A rms
V(1,4) = 207.8 /30° V rms

```

### Exemplo 12.16

Um sistema trifásico conectado em delta em equilíbrio é mostrado na Figura 12.19a. Desejamos usar PSPICE para calcular as correntes e tensões nessa rede. Do ponto de vista PSPICE, tal circuito possui dois problemas: Existe um laço de fontes de tensão e não existe nenhum nó de aterramento conveniente. Portanto, o circuito foi modificado, como mostra a Figura 12.19b. Os resistores de  $1\text{ p}\Omega$  colocados em série ao redor das fontes de tensão eliminam o problema de um laço de fonte de tensão. Os resistores de  $1\text{ T}\Omega$  nos permitem introduzir o nó terra necessário ao PSPICE. A posição e o valor de tais resistores estão selecionados para manter um sistema em equilíbrio e ter um impacto mínimo na operação da rede original.

O programa PSPICE escrito para a rede da Figura 12.19b, que calcula as correntes de fonte, as correntes de carga e tensões de carga, é mostrado a seguir.  $f = 1/2\pi\text{ Hz}$ .

```

EXAMPLE 12.16
VAB 2 3 AC 207.8 0
RSAB1 1 2 1P
RSAB2 3 4 1P
VBC 5 6 AC 207.8 -120
RSBC1 4 5 1P
RSBC2 6 7 1P
VCA 8 9 AC 207.8 -240
RSCA1 7 8 1P
RSCA2 9 1 1P
RSHZA 1 0 1T
RSHZB 4 0 1T
RSHZC 7 0 1T
RAB 10 11 6
CAB 1 10 .33333
VDAB 11 4 AC 0
RBC 4 12 6
CCB 12 13 .33333
VDBC 13 7 AC 0
RCA 1 14 6
CCA 14 15 .33333
VDCA 7 15 AC 0
.PRINT AC IM(VAB) IP(VAB) VM(1,4) VP(1,4)
.PRINT AC IM(VBC) IP(VBC) VM(4,7) VP(4,7)

```

```

.PRINT AC IM(VCA) IP(VCA) VM(7,1) VP(7,1)
.PRINT AC IM(VDAB) IP(VDAB)
.PRINT AC IM(VDBC) IP(VDBC)
.PRINT AC IM(VDCA) IP(VDCA)
.AC LIN 1 .159155 .159155
.END

```

A saída do computador é

$I(VAB) = 30.98 \angle -153.4^\circ \text{ A rms}$   
 $V(1,4) = 207.8 \angle 0^\circ \text{ V rms}$   
 $V(VDAB) = 30.98 \angle 26.57^\circ \text{ A rms}$

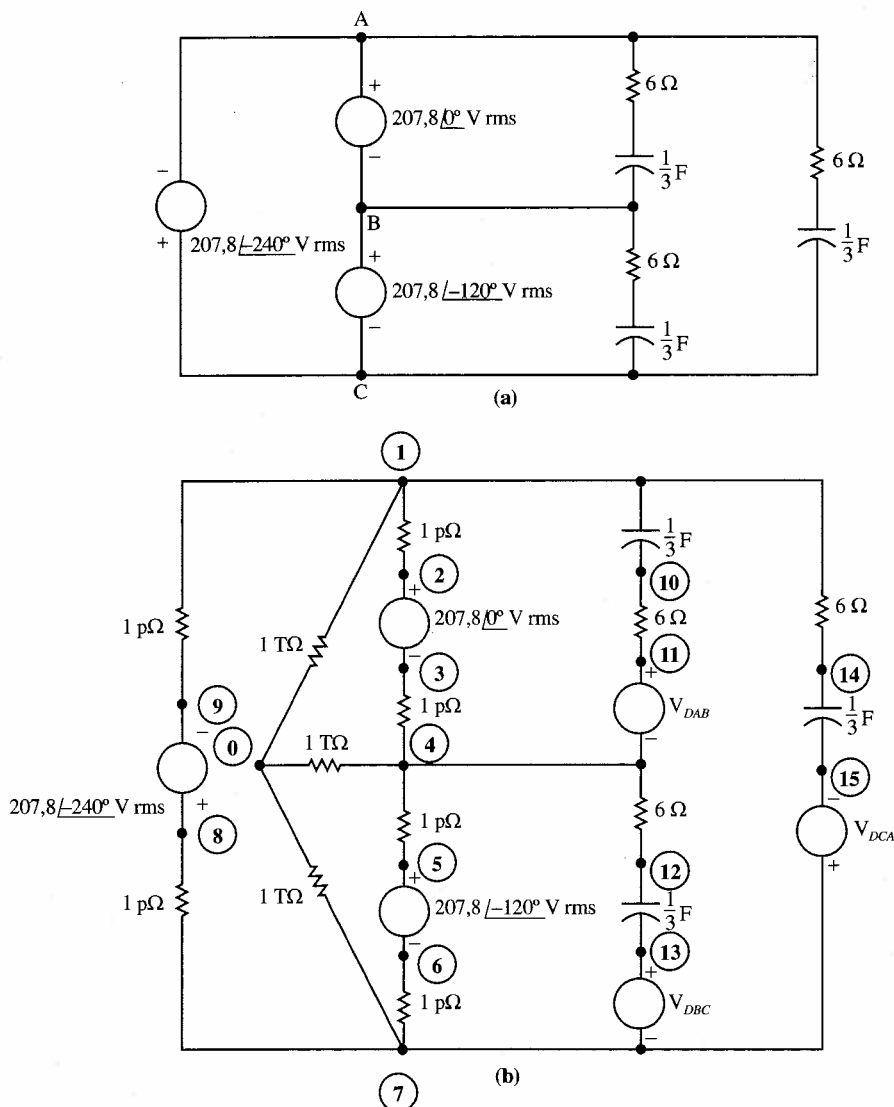


Figura 12.19 Sistema trifásico conectado em delta analisado usando-se PSPICE.

## Exercícios

**E12.11** Dada a rede da Figura E12.11, utilize PSPICE para determinar a corrente de linha, a tensão de linha e a tensão de carga.  $f = 1/2\pi \text{ Hz}$ .

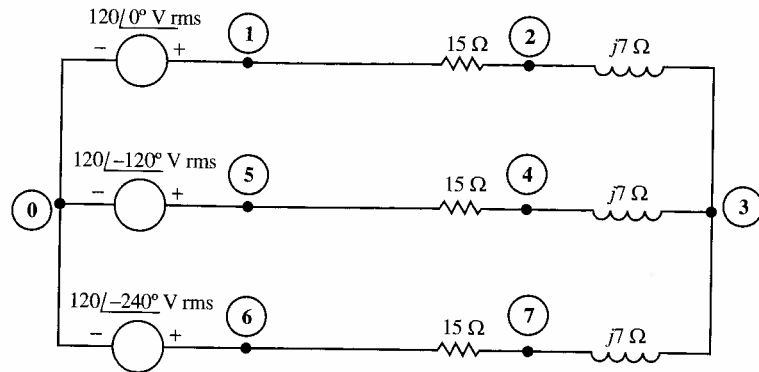


Figura E12.11

**Resp.:**  $I_a = 7,249 \angle -25^\circ$  A rms,  $V(1, 3) = 120 \angle 0^\circ$  V rms,  $V(1, 5) = 207,8 \angle 30^\circ$  V rms.

**E12.12** A rede da Figura E12.12 está marcada para uma análise PSPICE. Escreva o programa PSPICE para o cálculo das correntes de fonte, correntes de carga, tensão de carga e queda de tensão sobre a impedância da linha.  $f = 1/2\pi$  Hz.

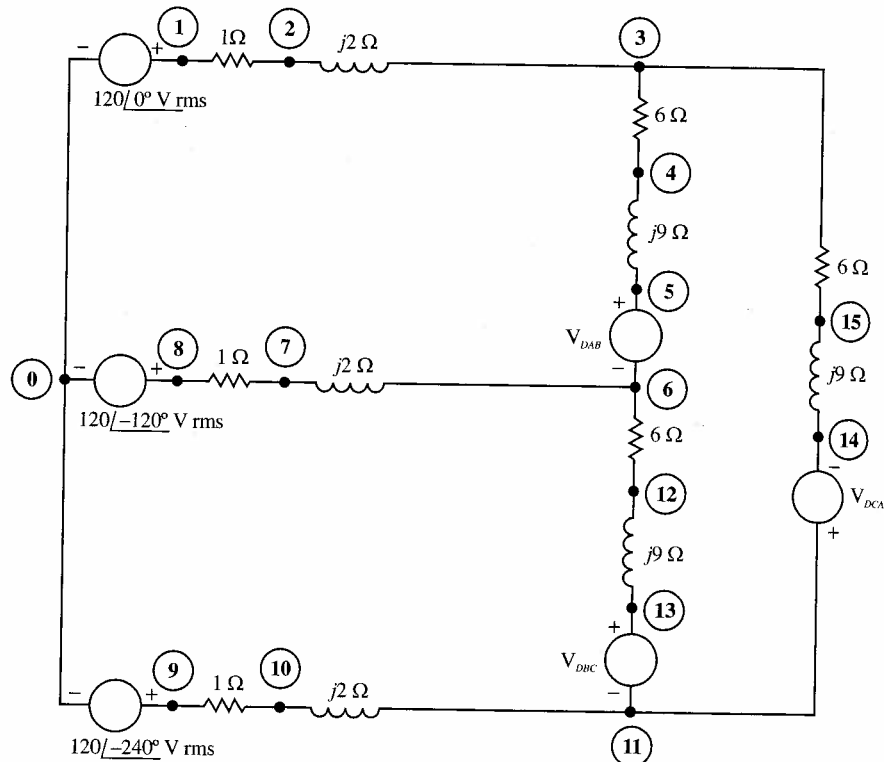


Figura E12.12

**Resp.:**  $I_S = 20,58 \angle 121^\circ$  A rms,  $I_L = 11,88 \angle -29,04^\circ$  A rms,  $V_L = 128,5 \angle 27,27^\circ$  V rms,  $V_{\text{linha}} = 46,02 \angle 4,4^\circ$  V rms.

**E12.13** A rede da Figura E12.13 está marcada para uma análise PSPICE. Escreva o programa PSPICE calculando as correntes de linha, correntes de carga, tensões de carga e correntes de fonte. Qual o propósito dos resistores de 1 TΩ na rede?  $f = 1/2\pi$  Hz.

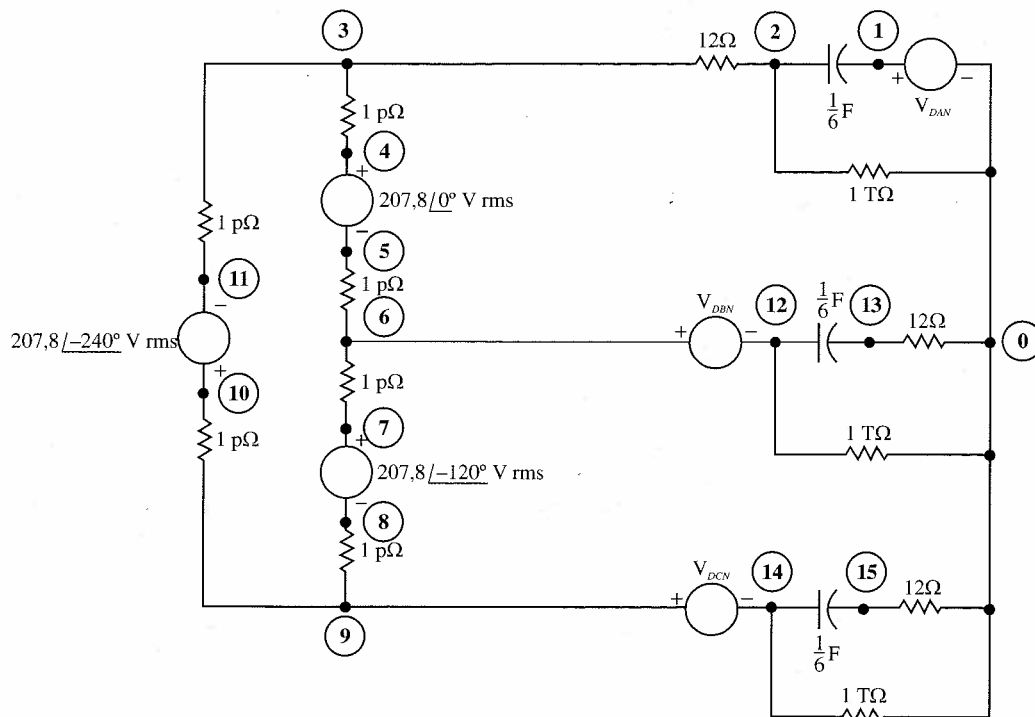


Figura E12.13

Resp.:  $I_S = 5,162 \angle -153,4^\circ$  A rms,  $I_{\text{linha}} = 8,942 \angle -3,4^\circ$  A rms,  $I_L = 8,942 \angle -3,4^\circ$  A rms,  $V_L = 120 \angle -30^\circ$  V rms.

## 12.4 Medições Trifásicas

### Medição de Potência

A medida de potência trifásica poderia aparentar ser algo simples, uma vez que pareceria que para se realizar tal medida nós simplesmente repetiríamos a medida de uma fase única para cada fase. Para um sistema em equilíbrio, tal tarefa se tornaria ainda mais simples, já que precisamos medir somente a potência em uma fase e multiplicar a leitura do wattímetro por 3. No entanto, como mencionamos anteriormente, o condutor de neutro na carga conectada em Y pode estar inacessível e, é claro, em uma carga conectada em delta não existe ponto neutro. Nossa técnica de medida deve, portanto, lidar somente com linhas externas à carga.

O método que descreveremos é aplicável tanto para a conexão Y quanto para delta; entretanto, apresentaremos o método de medida usando uma carga conectada em Y em equilíbrio. Considere o circuito mostrado na Figura 12.20. A bobina de corrente de cada wattímetro está conectada em série com a corrente de linha, e a bobina de tensão de cada wattímetro está conectada entre a fase e aquilo que chamaremos de neutro virtual  $N^*$ , que nada mais é do que um ponto arbitrário.

A potência média medida pelo wattímetro A é

$$P_A = \frac{1}{T} \int_0^T v_{AN} \cdot i_A \, dt \quad (12.36)$$

onde  $T$  é o período de todas as tensões e correntes no sistema. De modo semelhante,

$$P_B = \frac{1}{T} \int_0^T v_{BN} \cdot i_B \, dt \quad (12.37)$$

$$P_C = \frac{1}{T} \int_0^T v_{CN} \cdot i_C \, dt \quad (12.38)$$

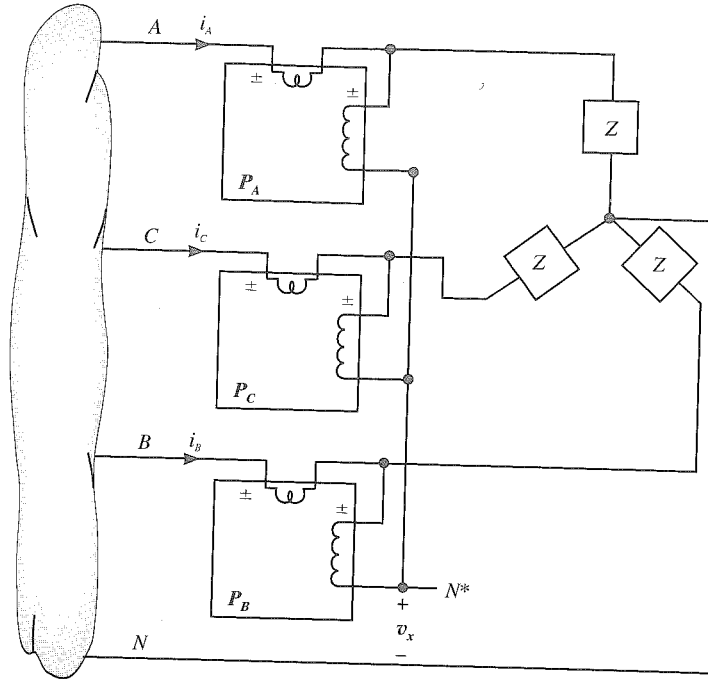


Figura 12.20 Conexões de wattímetro para medida de potência.

A soma de todas as medições do wattímetro é

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN^*} i_A + v_{BN^*} i_B + v_{CN^*} i_C) dt \quad (12.39)$$

Como mostrado na Figura 12.20, as tensões  $v_{AN^*}$ ,  $v_{BN^*}$  e  $v_{CN^*}$  podem ser expressas como

$$\begin{aligned} v_{AN^*} &= v_{AN} - v_X \\ v_{BN^*} &= v_{BN} - v_X \\ v_{CN^*} &= v_{CN} - v_X \end{aligned} \quad (12.40)$$

Substituindo-se a Equação 12.40 na Equação 12.39, tem-se

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN} i_A + v_{BN} i_B + v_{CN} i_C) dt - \frac{1}{T} \int_0^T v_X (i_A + i_B + i_C) dt \quad (12.41)$$

No entanto,

$$i_A + i_B + i_C = 0 \quad (12.42)$$

e, desse modo, a expressão para a potência se reduz a

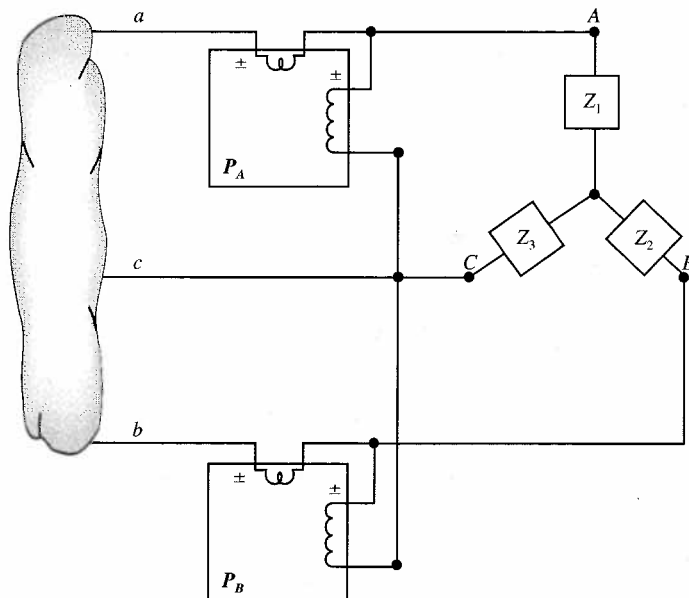
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v_{AN} i_A dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_{BN} i_B dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_{CN} i_C dt \quad (12.43)$$

que reconhecemos ser a potência total absorvida pela carga trifásica Y. Portanto, usando-se os três wattímetros mostrados na Figura 12.20, podemos medir a potência dissipada pela carga trifásica e, além disso, tal método se aplica ao sistema em equilíbrio ou não e se a carga está conectada em Y ou em delta.

Se conectarmos o neutro virtual à linha C, a bobina de tensão no wattímetro C terá zero volts sobre ela; a leitura do wattímetro será de zero watts e poderá, portanto, ser removido. Desse modo, os dois wattímetros A e B medirão então toda a potência na carga trifásica. Tal configuração é mostrada na Figura 12.21 e é conhecida como o *método dos dois wattímetros* para medida de potência. O método dos dois wattímetros pode sempre ser usado quando a carga está em equilíbrio, mas, no caso não-equilibrado, é válido somente para uma carga de três fios, isto é, uma carga sem condutor neutro. De um modo geral, se existem  $n$  fios da fonte para carga, são necessários  $n - 1$  wattímetros. Como mostrado na Figura 12.21, a potência total medida pelo método dos dois wattímetros é

$$P_T = P_A + P_B = |V_{AC}| |I_{aA}| \cos(\angle V_{AC} - \angle I_{aA}) + |V_{BC}| |I_{bB}| \cos(\angle V_{BC} - \angle I_{bB}) \quad (12.44)$$

onde, por exemplo,  $\angle V_{AC}$  representa o ângulo de fase da tensão  $V_{AC}$ .



**Figura 12.21** Método dos dois wattímetros para medição de potência.

### Exemplo 12.17

Um sistema Y-delta em equilíbrio tem uma fonte com seqüência de fase  $abc$  com  $V_{an} = 120 \angle 0^\circ$  V rms. A carga em equilíbrio tem uma impedância de  $10 + j5 \Omega$ . Desejamos determinar a potência dissipada pela carga usando o método dos dois wattímetros.

Se  $V_{an} = 120 \angle 0^\circ$  V rms, então

$$V_{AB} = 208 \angle 30^\circ \text{ V rms}$$

$$V_{BC} = 208 \angle -90^\circ \text{ V rms}$$

$$V_{CA} = 208 \angle -210^\circ \text{ V rms}$$

e, desse modo,  $V_{AC} = 208 \angle -30^\circ$  V rms. Uma vez que a impedância de fase é  $10 + j5 = 11,18 \angle 26,57^\circ \Omega$ , a magnitude da corrente delta é

$$I_{\Delta} = \frac{208}{11,18} = 18,60 \text{ A rms}$$

A potência média por fase é, portanto,

$$P_p = (18,60)^2 (10) = 3461 \text{ W}$$

e, dessa forma, a potência total é

$$P_T = 10.383 \text{ W}$$

Utilizando-se o método dos dois wattímetros, notamos da Equação (12.24) que

$$I_{aA} = 18,60 \sqrt{3} \angle -26,57^\circ \text{ A rms}$$

$$I_{bB} = 18,60 \sqrt{3} \angle -120 - 26,57^\circ \text{ A rms}$$

Portanto, usando-se a Equação 12.44, temos

$$\begin{aligned}
 P_T &= (208)(32,22) \cos(-30^\circ + 26,57^\circ) \\
 &\quad + (208)(32,22) \cos(-90^\circ + 120^\circ + 26,57^\circ) \\
 &= 10.383 \text{ W}
 \end{aligned}$$

### Exercício

**E12.14** Considerando-se os dados do Exercício E12.5, se o método dos dois wattímetros for usado para medir a potência, determine a leitura de cada wattímetro.

*Resp.:*  $P_A = 5185 \text{ W}$ ,  $P_B = 2303 \text{ W}$ .

### Medição do Fator de Potência

O método dos dois wattímetros pode ser também usado para calcular o ângulo do fator de potência se a carga estiver em equilíbrio. Para ilustrar como isto pode ser realizado, considere a carga conectada em Y mostrada na Figura 12.21, onde  $\mathbf{Z} = Z_Y \angle \theta^\circ$ . Se a fonte tiver sequência *abc* e estiver em equilíbrio em Y com  $\angle V_{an} = 0^\circ$ , então, como mostrado na Equação (12.44),

$$P_A = |\mathbf{V}_{AC}| |\mathbf{I}_{aA}| \cos(\angle \mathbf{V}_{AC} - \angle \mathbf{I}_{aA})$$

A partir da Equação (12.13),  $|\mathbf{V}_{AC}| = V_L$  e  $\angle \mathbf{V}_{AC} = \angle \mathbf{V}_{AC} + 180^\circ = -30^\circ$ . De forma semelhante, da Equação (12.18),  $|\mathbf{I}_{aA}| = I_L$  e  $\angle \mathbf{I}_{aA} = -\theta$ . Logo,

$$P_A = V_L I_L \cos(-30^\circ + \theta)$$

De modo similar, podemos mostrar que

$$P_B = V_L I_L \cos(30^\circ + \theta)$$

Então, a razão das leituras dos dois wattímetros é

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\cos(\theta - 30^\circ)}{\cos(\theta + 30^\circ)}$$

Se empregarmos agora as identidades trigonométricas na Equação 9.11 e lembrar-nos que  $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$  e  $\sin 30^\circ = 1/2$ , é simples mostrar que a equação acima pode ser reduzida a

$$\tan \theta = \frac{(P_A - P_B) \sqrt{3}}{P_A + P_B}$$

e uma vez que  $P_T = P_A + P_B$ ,

$$\theta = \tan^{-1} = \frac{(P_A - P_B) \sqrt{3}}{P_T} \quad (12.45)$$

As equações acima indicam que se  $P_A = P_B$ , a carga é resistiva; se  $P_A > P_B$ , a carga é indutiva; e se  $P_A < P_B$ , a carga é capacitiva. Finalmente, essa técnica é válida tanto para a carga conectada em Y como para a carga conectada em delta.

### Exemplo 12.18

Em um sistema Y-delta em equilíbrio, dois wattímetros estão conectados para medir a potência total. Desejamos determinar o fator de potência da carga, caso as leituras dos wattímetros sejam  $P_A = 1.200 \text{ W}$  e  $P_B = 480 \text{ W}$ .

Utilizando a Equação 12.45, temos

$$\begin{aligned}
 \theta &= \tan^{-1} = \frac{(1.200 - 480) \sqrt{3}}{1.680} \\
 &= 36,59^\circ
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos \theta = \text{fp} = 0,80 \text{ em atraso}$$



**Exemplo 12.19**

A fonte do Exemplo 12.18 tem uma tensão de linha de 208 V rms. Desejamos achar a impedância da carga delta.

A potência total  $P_T = P_A + P_B = 1.680$  W; portanto, a potência por fase é  $P_p = 1.680/3 = 560$  W. Dessa forma, usando-se a expressão

$$\begin{aligned} V_L I_\Delta \cos \theta &= P_p \\ I_\Delta &= \frac{560}{(208)(0,8)} \\ &= 3,37 \text{ A rms} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{208}{3,37} \angle 36,59^\circ = 61,81 \angle 36,59^\circ \\ &= 49,63 + j36,84 \, \Omega \end{aligned}$$

**Exemplo 12.20**

Em um sistema Y-delta em equilíbrio, dois wattímetros são usados para medir a potência total. O wattímetro A indica 800 W e o wattímetro B indica 400 W depois que os terminais da bobina da corrente são invertidos. A tensão da linha é 208 V rms. Desejamos determinar a potência média total, o fator de potência e a impedância da carga.

A partir dos dados,  $P_A = 800$  e  $P_B = -400$ ; portanto, a potência total  $P_T$  é

$$\begin{aligned} P_T &= P_A + P_B \\ &= 400 \text{ W} \end{aligned}$$

O fator de potência é calculado de

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} = \frac{[800 - (-400)] \sqrt{3}}{400} \\ \theta &= 79,11^\circ \end{aligned}$$

e portanto

$$\cos \theta = \text{fp} = 0,19 \text{ em atraso}$$

A impedância delta é determinada de

$$\begin{aligned} V_L I_\Delta \cos \theta &= P_p \\ (208) I_\Delta (0,19) &= \frac{400}{3} \\ I_\Delta &= 3,37 \text{ A rms} \end{aligned}$$

Logo,

$$Z_\Delta = \frac{208}{3,37} \angle 79,11^\circ = 61,65 \angle 79,11^\circ \, \Omega$$

**Exercícios**

**E12.15** Dois wattímetros são usados para medir a potência total na carga de um sistema Y-Y em equilíbrio. A tensão de linha é 208 V rms e as leituras dos wattímetros são  $P_A = 1.600$  W e  $P_B = 840$  W. Calcule a impedância por fase da carga.

**Resp.:**  $Z = 15,58 \angle 28,35^\circ \, \Omega$ .

**E12.16** Dois wattímetros são usados para medir a potência total na carga de um sistema Y-Y em equilíbrio. A tensão de linha é 208 V rms. A leitura do wattímetro A indica 1.280 W e a do wattímetro B indica 540 W quando os terminais da bobina da corrente são invertidos. Determine o fator de potência da carga e sua impedância por fase.

**Resp.:** pf = 0,23 em atraso,  $Z = 13,43 \angle 76,79^\circ \, \Omega$ .

## 12.5 Correção do Fator de Potência

Na Seção 11.6, ilustramos uma técnica simples para aumentar o fator de potência de uma carga. O método envolvia a seleção cuidadosa de um capacitor e sua colocação em paralelo com a carga. Em um sistema trifásico equilibrado, a correção do fator de potência é executada exatamente do mesmo modo. É importante notar, porém, que o  $S_{\text{cap}}$  especificado na Equação 11.42 é dado por três capacitores e, além disso,  $V_{\text{rms}}$  na equação é a tensão sobre cada capacitor. O exemplo a seguir ilustra a técnica.

### Exemplo 12.21

No sistema trifásico em equilíbrio mostrado na Figura 12.22, a tensão de linha é 34,5 kV rms a 60 Hz. Desejamos achar os valores dos capacitores  $C$  de forma que a carga total tenha um fator de potência de 0,94 em avanço.

Seguindo-se o desenvolvimento descrito na Seção 11.6 para o fator de potência monofásico, obtemos

$$\begin{aligned} S_{\text{old}} &= 24 / \cos^{-1} 0,78 \text{ MVA} \\ &= 18,72 + j15,02 \text{ MVA} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta_{\text{new}} &= -\cos^{-1} 0,94 \\ &= -19,95^\circ \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S_{\text{new}} &= 18,72 + j18,72 \tan(-19,95^\circ) \\ &= 18,72 - j6,80 \text{ MVA} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_{\text{cap}} &= S_{\text{new}} - S_{\text{old}} \\ &= -j21,82 \text{ MVA} \end{aligned}$$

Entretanto,

$$-j\omega C V_{\text{rms}}^2 = -j21,82 \text{ MVA}$$

e uma vez que a tensão de linha é 34,5 kV rms, então

$$(377) \left( \frac{34,5}{\sqrt{3}} \right)^2 C = \frac{21,82}{3}$$

e desse modo

$$C = 48,6 \mu\text{F}$$

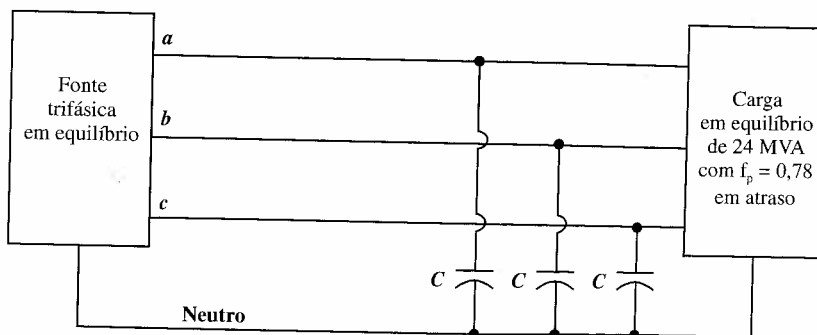


Figura 12.22 Rede utilizada no Exemplo 12.21.

## Exercício

**E12.17** Determine  $C$  no Exemplo 12.21 de forma que a carga total tenha um fator de potência de 0,90 em atraso.

**Resp.:**  $C = 13,26 \mu\text{F}$ .

Finalmente, o leitor pode se lembrar que a discussão completa neste capítulo foi centrada em torno de sistemas equilibrados. É de suma importância, no entanto, lembrar que em um sistema trifásico não-equilibrado, o problema é muito mais complicado por causa do acoplamento indutivo mútuo entre as fases em equipamentos de potência.

## 12.6 Resumo

Mostramos que uma vantagem importante de sistemas trifásicos equilibrados é que eles fornecem potência suave. Por causa da condição de equilíbrio, é possível analisar um circuito baseado 'por fase', daí provendo um atalho computacional significativo para uma solução. As relações entre as várias tensões e correntes para o sistema em equilíbrio, tanto na configuração Y como na delta, foram identificadas como muito simples. A habilidade de se executar transformações Y-para-delta e delta-para-Y foi mostrada como um elemento importante no nosso enfoque computacional.

Técnicas para medição de potência em um ambiente trifásico foram apresentadas. O método dos dois wattímetros para medição de potência trifásica foi derivado, e o uso desse método para medição do fator de potência foi apresentado. Finalmente, discutiu-se a correção do fator de potência para sistemas trifásicos equilibrados.

## Pontos-Chave

- Uma fonte de tensão trifásica em equilíbrio possui três tensões senoidais de mesma magnitude e frequência, e cada tensão está  $120^\circ$  fora de fase com as outras.
- Se as correntes de carga geradas pela conexão de uma carga a uma fonte de tensão trifásica em equilíbrio estão também em equilíbrio, a carga é conectada em uma configuração Y em equilíbrio ou uma configuração delta em equilíbrio.
- Uma fonte de tensão com sequência positiva de fases em equilíbrio é aquela que possui um atraso de  $120^\circ$  de  $V_{bn}$  em relação a  $V_{an}$  e um atraso de  $120^\circ$  de  $V_{cn}$  em relação a  $V_{bn}$ .
- Não existe corrente no condutor de neutro de um sistema Y-Y em equilíbrio.
- Circuitos ac trifásicos em equilíbrio podem ser analisados por fase.
- O método dos dois wattímetros é uma técnica para medição de potência real em um sistema trifásico usando-se somente dois wattímetros.
- O ângulo do fator de potência de uma carga em um sistema trifásico em equilíbrio pode ser calculado usando-se dois wattímetros.
- Correção do fator de potência em um ambiente trifásico em equilíbrio é realizada do mesmo modo que no caso monofásico.

## Problemas

- 12.1** Em um sistema trifásico Y-Y em equilíbrio, a fonte é um conjunto de tensões sequência  $abc$  com  $V_{an} = 120 \angle 60^\circ$  V rms. A impedância por fase da carga é  $12 + j16 \Omega$ . A impedância de linha por fase é  $0,8 + j1,4 \Omega$ . Determine as correntes de linha e as tensões de carga.
- 12.2** Um conjunto de sequência  $abc$  de tensões alimenta um sistema trifásico Y-Y equilibrado. As impedâncias de linha e de carga são  $0,6 + j1 \Omega$  e  $18 + j14 \Omega$ , respectivamente. A tensão de carga na fase  $a$  é  $V_{AN} = 114,47 \angle 18,99^\circ$  V rms. Determine as tensões na linha de entrada.
- 12.3** Em um sistema trifásico Y-Y equilibrado, a fonte é um conjunto de tensões sequência  $abc$ . A tensão de carga na fase  $a$  é  $V_{AN} = 108,58 \angle 79,81^\circ$  V rms,  $Z_{\text{linha}} = 1 + j1,4 \Omega$ ,  $Z_{\text{carga}} = 10 + j13 \Omega$ . Determine a sequência de entrada das tensões.
- 12.4** Uma sequência de tensões  $abc$  em equilíbrio alimenta um sistema trifásico Y-Y equilibrado. As impedâncias de linha e de carga são  $0,6 + j0,9 \Omega$  e  $8 + j12 \Omega$ , respectivamente. A tensão de carga na fase  $a$  é  $V_{AN} = 116,63 \angle 10^\circ$  V rms. Determine a tensão de linha  $V_{ab}$ .

- 12.5 Em um sistema trifásico Y-Y equilibrado, a fonte é um conjunto de tensões sequência  $abc$ .  $Z_{\text{linha}} = 1 + j1,8 \, \Omega$ ,  $Z_{\text{carga}} = 14 + j12 \, \Omega$  e a tensão de carga na fase  $a$  é  $V_{AN} = 398,1 \angle 17,99^\circ$  V rms. Determine a tensão de linha  $V_{ab}$ .
- 12.6 Uma fonte trifásica sequência  $abc$  em equilíbrio alimenta um sistema Y-Y equilibrado.  $Z_{\text{linha}} = 0,8 + j0,2 \, \Omega$ ,  $Z_{\text{carga}} = 12 + j6 \, \Omega$  e  $\angle V_{AN} = 30^\circ$ . A potência total dissipada pela carga é 2 kW. Determine a perda total de potência nas linhas.
- 12.7 Uma fonte trifásica sequência de fase  $abc$  em equilíbrio alimenta uma carga em equilíbrio. O sistema tem uma conexão Y-Y. A impedância da carga é  $10 + j6 \, \Omega$ , a impedância de linha é  $1 + j0,5 \, \Omega$  e  $\angle V_{AN} = 60^\circ$ . A perda total de potência nas linhas é 470,44 kW. Determine  $V_{AN}$  e a magnitude da tensão da fonte.
- 12.8 Uma fonte sequência de fase  $abc$  fornece potência a um sistema Y-Y trifásico equilibrado. A impedância da carga é  $20 + j16 \, \Omega$ , a impedância de linha é  $2 + j1 \, \Omega$  e a perda total de potência nas linhas é 600 W. Determine a corrente de linha, caso a carga seja subitamente curto-circuitada.
- 12.9 Em um sistema Y-Y trifásico equilibrado, a magnitude da corrente de linha é conhecida como 6,18 A rms. O fator de potência da carga é 0,83 em atraso, e a potência total consumida pela carga é 1718,66 W. Se a impedância de linha é  $1 + j1 \, \Omega$ , calcule a impedância de carga e a magnitude da tensão de fase na fonte.
- 12.10 Em um sistema trifásico Y-Y equilibrado, a fonte é um conjunto de tensões sequência  $abc$  e  $V_{an} = 120 \angle 50^\circ$  V rms. A tensão de carga na fase  $a$  é  $110,65 \angle 29,03^\circ$  V rms e a impedância da carga é  $16 + j20 \, \Omega$ . Determine a impedância de linha.
- 12.11 Um conjunto de tensões sequência  $abc$  alimenta um sistema trifásico Y-Y equilibrado. Se a tensão de entrada  $V_{an} = 440 \angle 10^\circ$  V rms, a tensão de carga na fase  $a$  é  $V_{AN} = 398,32 \angle 8,72^\circ$  V rms e  $Z_{\text{carga}} = 20 + j24 \, \Omega$ , determine a impedância de linha.
- 12.12 Em um sistema trifásico Y-Y equilibrado, a fonte é um conjunto de tensões sequência  $abc$  e  $V_{an} = 120 \angle 40^\circ$  V rms. A corrente de linha da fase  $a$  e a impedância de linha são  $7,10 \angle -10,28^\circ$  A rms e  $0,8 + j1 \, \Omega$ , respectivamente. Determine a impedância de carga.
- 12.13 Um conjunto de tensões sequência  $abc$  alimenta um sistema trifásico Y-Y equilibrado. A corrente de linha na fase  $a$  é  $16,78 \angle 20,98^\circ$  A rms, a impedância de linha é  $1,2 + j1,8 \, \Omega$  e a tensão de entrada é  $V_{an} = 440 \angle 70^\circ$  V rms. Determine a impedância de carga.
- 12.14 Em um sistema trifásico Y-Y equilibrado, a fonte é um conjunto de tensões sequência  $abc$  e  $V_{an} = 120 \angle 20^\circ$  V rms. A impedância de linha e a tensão de carga são  $0,5 + j0,8 \, \Omega$  e  $V_{AN} = 112,95 \angle 19,71^\circ$  V rms. Determine a impedância de carga.
- 12.15 Um conjunto de tensões sequência  $abc$  alimenta um sistema trifásico Y-Y equilibrado. Se  $V_{an} = 440 \angle 30^\circ$  V rms,  $V_{AN} = 413,28 \angle 29,78^\circ$  V rms e  $Z_{\text{linha}} = 1,2 + j1,5 \, \Omega$ , determine a impedância de carga.
- 12.16 Uma fonte trifásica de sequência  $abc$  em equilíbrio conectada em Y alimenta uma carga equilibrada conectada em delta. A impedância por fase na carga delta é  $12 + j9 \, \Omega$ . A tensão de linha na fonte é  $V_{ab} = 120 \sqrt{3} \angle 40^\circ$  V rms. Se a impedância de linha for zero, determine as correntes de linha no sistema Y-delta equilibrado.
- 12.17 Uma fonte de 60 Hz sequência  $abc$  trifásica em equilíbrio conectada em Y alimenta uma carga em equilíbrio conectada em delta. A impedância de fase na carga consiste de um resistor de  $20 \, \Omega$  em série com um indutor 50 mH, e a tensão de fase na fonte é  $V_{an} = 120 \angle 20^\circ$  V rms. Se a impedância de linha for zero, determine as correntes de linha no sistema.
- 12.18 Uma fonte sequência  $abc$  trifásica em equilíbrio conectada em Y alimenta uma carga em equilíbrio conectada em delta. A impedância por fase na carga é  $14 + j12 \, \Omega$ . A tensão de fonte para a fase  $a$  é  $V_{an} = 120 \angle 80^\circ$  V rms, e a impedância de linha é zero. Determine as correntes de fase na fonte conectada em Y.
- 12.19 Uma fonte sequência  $abc$  trifásica em equilíbrio conectada em Y alimenta uma carga em equilíbrio conectada em delta. A impedância por fase na carga delta é  $10 + j8 \, \Omega$ . Se a impedância de linha é zero e a corrente de linha da fase  $a$  é conhecida como  $I_{aA} = 28,10 \angle -28,66^\circ$  A rms, determine a tensão de carga  $V_{AB}$ .
- 12.20 Uma fonte sequência  $abc$  trifásica em equilíbrio conectada em Y alimenta uma carga em equilíbrio conectada em delta. A impedância por fase da carga delta é  $14 + j11 \, \Omega$ . A impedância de linha é zero e a corrente de linha da fase  $a$  é conhecida como  $I_{aA} = 20,22 \angle 31,84^\circ$  A rms. Determine as tensões da carga em equilíbrio.
- 12.21 Em um sistema equilibrado trifásico Y-delta, a fonte tem uma sequência de fase  $abc$  e  $V_{an} = 120 \angle 0^\circ$  V rms. A corrente de linha é  $I_{aA} = 4,8 \angle 20^\circ$  A rms. Determine a impedância de carga por fase no delta.
- 12.22 Em um sistema equilibrado trifásico Y-delta, a fonte tem uma sequência de fase  $abc$  e  $V_{an} = 120 \angle 40^\circ$  V rms. As impedâncias de linha e carga são  $0,5 + j0,4 \, \Omega$  e  $24 + j18 \, \Omega$ , respectivamente. Determine as correntes delta na carga.

12.23 Dada a rede da Figura P.23, calcule as correntes de linha e a magnitude da tensão de fase na carga.

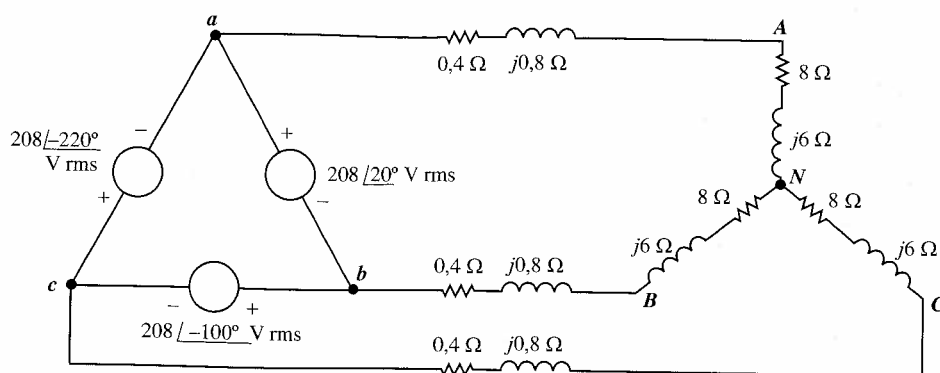


Figura P12.23

- 12.24 Em um sistema trifásico equilibrado, uma fonte conectada em delta alimenta uma carga conectada em Y. Se a impedância de linha é  $0,2 + j0,4 \Omega$ , a impedância de carga é  $6 + j4 \Omega$  e a tensão de fase da fonte  $V_{ab} = 208 \angle 40^\circ$  V rms, determine a magnitude da tensão de linha na carga.
- 12.25 Em um sistema trifásico equilibrado, uma fonte conectada em delta alimenta uma carga conectada em Y. Os valores por fase da impedância de linha e impedância de carga são  $0,5 + j0,5 \Omega$  e  $9 + j6 \Omega$ , respectivamente. Caso a tensão de fase da fonte seja  $V_{ab} = 208 \angle 60^\circ$  V rms, determine a magnitude das correntes nas fontes delta.
- 12.26 Em um sistema equilibrado trifásico conectado em delta-delta, a fonte possui uma sequência de fase abc. As impedâncias de linha e carga são  $0,3 + j0,2 \Omega$  e  $9 + j6 \Omega$ , respectivamente. Caso a corrente de fase em delta seja  $I_{AB} = 15 \angle 40^\circ$  A rms, determine as tensões de fase da fonte.
- 12.27 Em um sistema trifásico equilibrado delta-delta, a fonte tem uma sequência de fase abc. O ângulo de fase da tensão da fonte é  $\angle V_{ab} = 40^\circ$  e  $I_{ba} = 4 \angle 15^\circ$  A rms. Caso a potência total dissipada seja 1.400 W, determine a impedância de carga.
- 12.28 A impedância de uma carga trifásica consiste de um Y em equilíbrio em paralelo com um delta em equilíbrio. Qual são a carga Y equivalente e a carga delta equivalente se as impedâncias de fase de Y e delta forem  $6 + j3 \Omega$  e  $15 + j12 \Omega$ , respectivamente?
- 12.29 Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte de sequência de fase abc está conectada em Y e  $V_{an} = 120 \angle 20^\circ$  V rms. A carga consiste de dois Y em equilíbrio com impedâncias de fase de  $8 + j6 \Omega$  e  $12 + j8 \Omega$ . Se a impedância de linha for zero, determine as correntes de linha e corrente de fase em cada carga.
- 12.30 Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte é um Y equilibrado com uma sequência de fase abc e  $V_{ab} = 208 \angle 60^\circ$  V rms. A carga consiste de um Y em equilíbrio com impedâncias de fase de  $8 + j5 \Omega$  em paralelo com uma carga equilibrada em delta com uma impedância de fase de  $21 + j12 \Omega$ . Se a impedância de linha for de  $1,2 + j1 \Omega$ , determine a corrente de fase na carga equilibrada em Y.
- 12.31 Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte é um Y equilibrado com uma sequência de fase abc e  $V_{an} = 120 \angle 0^\circ$  V rms. A carga consiste de um Y em equilíbrio com impedâncias de fase de  $6 + j4 \Omega$  em paralelo com uma carga equilibrada em delta com uma impedância de fase de  $12 + j6 \Omega$ . Se a impedância de linha for de  $1 + j1 \Omega$ , determine a magnitude da tensão de fase da carga em delta.
- 12.32 Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte é um Y equilibrado com uma sequência de fase abc e  $V_{ab} = 208 \angle 50^\circ$  V rms. A carga consiste de um Y em equilíbrio em paralelo com uma carga equilibrada em delta. A impedância de fase da carga em Y é  $5 + j3 \Omega$  e a impedância de fase da carga em delta é  $18 + j12 \Omega$ . Se a impedância de linha for de  $1 + j0,8 \Omega$ , determine as correntes de linha e as correntes de fase nas cargas.
- 12.33 Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte está conectada em delta com sequência de fase abc e  $V_{ab} = 208 \angle 55^\circ$  V rms. Há duas cargas conectadas em paralelo. Uma delas está conectada em Y e tem impedância de fase  $4 + j3 \Omega$ , e a outra carga também está conectada em Y com impedância de fase de  $8 + j6 \Omega$ . Determine as correntes de delta na carga, caso a impedância de linha que conecta a fonte às cargas seja  $0,2 + j0,1 \Omega$ .
- 12.34 Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte está conectada em delta com sequência de fase abc. Há duas cargas em paralelo conectadas em Y. As impedâncias de fase nas cargas 1 e 2 são  $4 + j4 \Omega$  e  $10 + j4 \Omega$ , respectivamente. A impedância de linha que conecta a fonte às cargas é  $0,3 + j0,2 \Omega$ . Se a corrente da fase a da carga 1 é  $I_{AN_1} = 10 \angle 20^\circ$  A rms, determine as correntes delta na fonte.

- 12.35 Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte tem sequência de fase  $abc$  e está conectada em delta. Há duas cargas conectadas em paralelo. A linha conectando a fonte às cargas tem impedância  $0,2 + j0,1 \Omega$ . A carga 1 está conectada em Y e tem impedância de fase  $4 + j2 \Omega$ . A carga 2 está conectada em delta e tem impedância de fase  $12 + j9 \Omega$ . A corrente  $I_{AB}$  na carga delta é  $16 \angle 45^\circ$  A rms. Determine as tensões de fase na fonte.
- 12.36 Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte tem uma sequência de fase  $abc$  e está conectada em delta. Há duas cargas conectadas em paralelo. A carga 1 está conectada em Y e tem uma impedância de fase  $6 + j2 \Omega$ . A carga 2 está conectada em delta e tem uma impedância de fase  $9 + j3 \Omega$ . A impedância de linha é  $0,4 + j0,3 \Omega$ . Determine as tensões de fase da fonte se a corrente da fase  $a$  da carga 1 é  $I_{AN_1} = 12 \angle 30^\circ$  A rms.
- 12.37 Uma fonte trifásica conectada em Y com sequência de fase  $abc$  fornece 14 kVA com um fator de potência 0,75 em atraso a uma combinação em paralelo de uma carga Y com uma carga delta. Se a carga Y consome 9 kVA a um fator de potência 0,6 em atraso e tem uma corrente de fase  $a$  de  $10 \angle -30^\circ$  A rms, determine a impedância de fase da carga delta.
- 12.38 Uma fonte conectada em Y com sequência de fase  $abc$ , que tem uma tensão na fase  $a$  de  $120 \angle 0^\circ$  V rms, é ligada a uma carga conectada em Y que tem uma impedância de  $80 \angle 70^\circ \Omega$ . A impedância de linha é  $4 \angle 20^\circ \Omega$ . Determine a potência complexa total produzida pelas fontes de tensão e as potências real e reativa dissipadas pela carga.
- 12.39 Uma fonte trifásica conectada em Y com sequência de fase  $abc$   $V_{an} = 220 \angle 0^\circ$  V rms alimenta uma carga conectada em Y que consome 50 kW de potência em cada fase a um fp de 0,8 em atraso. Três capacitores têm uma impedância de  $-j2,0 \Omega$ , e estão conectados em paralelo com a carga anterior em uma configuração. Determine o fator de potência da carga combinada como vista pela fonte.
- 12.40 Caso os três capacitores da rede do Problema 12.39 sejam conectados em uma configuração delta, determine o fator de potência da carga combinada como vista pela fonte.
- 12.41 Duas plantas industriais representam cargas trifásicas em equilíbrio. As plantas recebem potência de uma fonte trifásica em equilíbrio com uma tensão de linha de 4,6 kV rms. A planta 1 está cotada a 300 kVA, 0,8 fp em atraso, e a especificação da planta 2 é 350 kVA, 0,84 fp em atraso. Determine a corrente de linha.
- 12.42 Um sistema trifásico em equilíbrio Y-Y tem uma tensão de linha de 208 V rms. A corrente de linha é 6 A rms e a potência real total dissipada pela carga é 1.800 W. Determine a impedância da carga por fase.
- 12.43 A magnitude da potência complexa (potência aparente) fornecida por um sistema Y-Y trifásico em equilíbrio é 3.600 VA. A tensão de linha é 208 V rms. Se a impedância de linha for desprezível e o ângulo do fator de potência da carga for  $25^\circ$ , determine a impedância da carga.
- 12.44 Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte tem uma sequência de fase  $abc$  e está conectada em Y, e  $V_{an} = 120 \angle 20^\circ$  V rms. A fonte alimenta duas cargas, ambas conectadas em Y. A impedância da carga 1 é  $8 + j6 \Omega$ . A potência complexa para a fase  $a$  da carga 2 é 600  $\angle 36^\circ$  VA. Determine a corrente de linha para a fase  $a$  e a potência complexa total da fonte.
- 12.45 Um grupo de cargas é alimentado por uma fonte trifásica em equilíbrio com uma tensão de linha de 4.160 V rms. A carga 1 é 240 kVA a 0,8 fp em atraso e a carga 2 é 160 kVA a 0,92 fp em atraso. Uma terceira carga é desconhecida, mas sabe-se que ela possui um fator de potência unitário. Se a corrente de linha for 62 A rms, determine a potência complexa da carga desconhecida.
- 12.46 As seguintes cargas são alimentadas por uma fonte trifásica em equilíbrio:  
 Carga 1: 18 kVA a 0,8 fp em atraso  
 Carga 2: 8 kVA a 0,8 fp em avanço  
 Carga 3: 12 kVA a 0,75 fp em atraso  
 A tensão da carga é 208 V rms a 60 Hz. Se a impedância de linha for desprezível, determine o fator de potência da fonte.
- 12.47 Um pequeno shopping center contém três lojas que representam três cargas trifásicas em equilíbrio. As linhas de distribuição do shopping center representam uma fonte trifásica com uma tensão de linha de 13,8 kV rms. As três cargas são  
 Carga 1: 500 kVA a 0,8 fp em atraso  
 Carga 2: 400 kVA a 0,85 fp em atraso  
 Carga 3: 300 kVA a 0,90 fp em atraso  
 Determine a corrente da linha de distribuição.

**12.48** Uma fonte trifásica em equilíbrio serve as seguintes cargas:

Carga 1: 18 kVA a 0,8 fp em atraso

Carga 2: 10 kVA a 0,7 fp em avanço

Carga 3: 12 kW a fp unitário

Carga 4: 16 kVA a 0,6 fp em atraso

A tensão da carga é 208 V rms a 60 Hz e a impedância de linha é  $0,02 + j0,04 \Omega$ . Determine a tensão de linha e o fator de potência na fonte.

**12.49** Uma fonte trifásica em equilíbrio alimenta três cargas. As cargas são

Carga 1: 18 kW a 0,8 fp em atraso

Carga 2: 10 kVA a 0,6 fp em avanço

Carga 3: desconhecida

A tensão de linha nas cargas é 208 V rms, a corrente de linha na fonte é 116,39 A rms e o fator de potência combinado na carga é 0,86 em atraso. Determine a carga desconhecida.

**12.50** Uma fonte trifásica em equilíbrio alimenta três cargas. As cargas são

Carga 1: 30 kVA a 0,8 fp em atraso

Carga 2: 24 kW a 0,6 fp em avanço

Carga 3: desconhecida

A tensão de linha na carga e corrente de linha na fonte são 208 V rms e 166,8 A rms, respectivamente. Se o fator de potência combinado na carga é unitário, determine a carga desconhecida.

**12.51** Uma fonte trifásica em equilíbrio alimenta três cargas. As cargas são

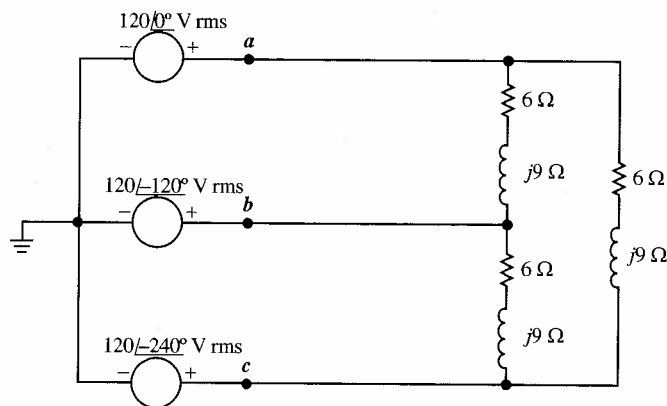
Carga 1: 20 kVA a 0,6 fp em atraso

Carga 2: 12 kW a 0,75 fp em atraso

Carga 3: desconhecida

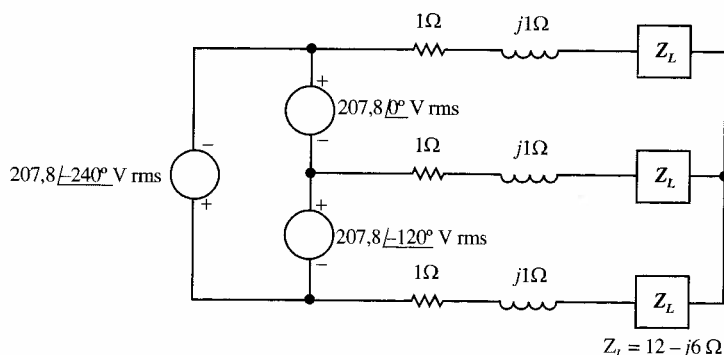
A tensão de linha na carga é 208 V rms, a corrente de linha na fonte é 98,60 A rms e o fator de potência combinado na carga é 0,88 fp em atraso. Determine a carga desconhecida.

**12.52** Calcule a corrente de linha, corrente de carga e tensões de carga na rede da Figura P12.52 usando PSPICE.  $f = 1/2\pi$  Hz.



**Figura P12.52**

**12.53** Determine a corrente de fonte, corrente de carga e tensões sobre as impedâncias de linha na rede da Figura P12.53 usando PSPICE.  $f = 1/2\pi$  Hz.



**Figura P12.53**

- 12.54 Use PSPICE para calcular a corrente de fonte, ambas as correntes de carga e ambas as tensões de carga no circuito da Figura P12.54.  $f = 1/2\pi$  Hz.

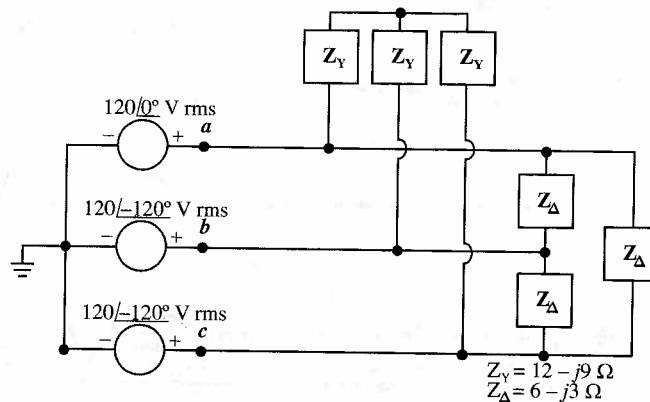


Figura P12.54

- 12.55 Dado o circuito da Figura P12.55, use PSPICE para calcular a corrente de fonte, tensão de linha, perda de potência na impedância de linha e ambas as tensões de carga.  $f = 1/2\pi$  Hz.

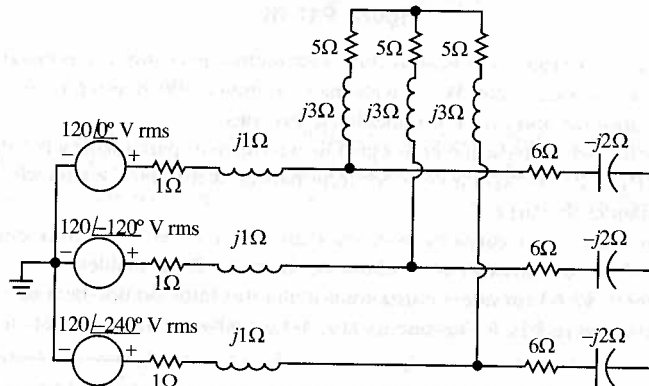


Figura P12.55

- 12.56 Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte tem uma sequência de fase  $abc$ , está conectada em Y e  $V_{an} = 120 \angle 45^\circ$  V rms. Há duas cargas paralelas conectadas em Y. A carga 1 tem uma impedância de fase de  $4 + j3 \Omega$  e a carga 2 tem uma impedância de fase de  $12 + j8 \Omega$ . Determine a potência total dissipada pelas cargas usando o método dos dois wattímetros.
- 12.57 Dois wattímetros foram usados para medir a potência total em um sistema trifásico em equilíbrio Y-delta. A tensão de fase da fonte é 120 V rms. Sem inverter os terminais dos medidores, as leituras deles são  $P_A = 1.600$  W e  $P_B = 800$  W. Determine a impedância por fase de delta.
- 12.58 Um sistema trifásico em equilíbrio possui uma fonte com sequência de fase  $abc$  conectada em Y e  $V_{an} = 120 \angle 60^\circ$  V rms. Duas cargas estão conectadas em paralelo. A carga 1 está conectada em Y, e a impedância de fase é  $6 + j2 \Omega$ . A carga 2 está conectada em delta, e a impedância de fase é  $8 + j3 \Omega$ . Determine a potência total dissipada pelas cargas usando o método dos dois wattímetros.
- 12.59 Um sistema Y-Y trifásico em equilíbrio tem uma sequência de fonte  $abc$  com  $V_{an} = 90 \angle 30^\circ$  V rms. A carga em equilíbrio tem uma impedância por fase de  $24 + j16 \Omega$ . Calcule as leituras dos wattímetros, caso o método dos dois wattímetros seja usado para medir a potência total trifásica.
- 12.60 A fonte trifásica em equilíbrio da Figura P12.60 tem uma sequência de fase  $abc$ . Determine a leitura de cada wattímetro da rede.



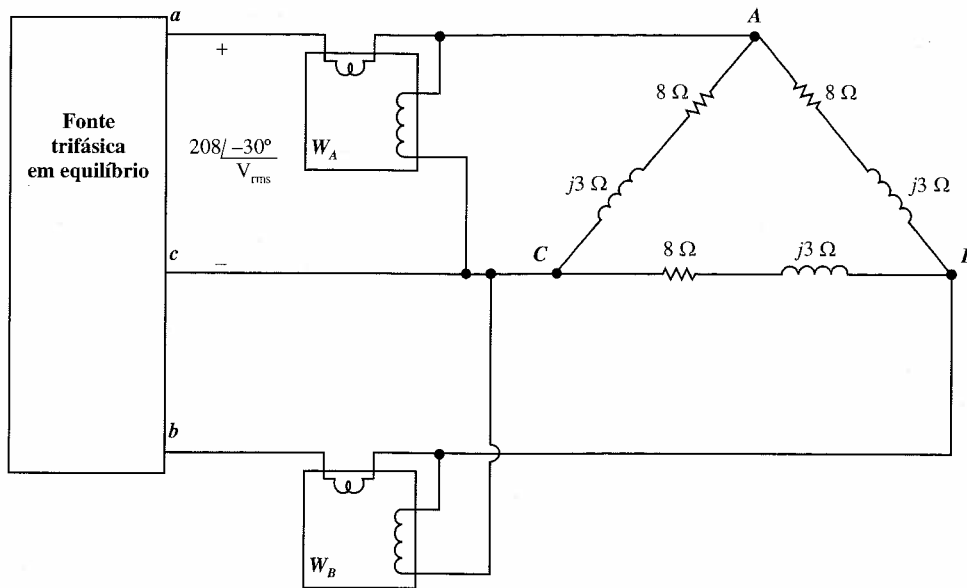


Figura P12.60

- 12.61** Em um sistema Y-delta equilibrado, são usados dois wattímetros para medir a potência total. A tensão de linha é 208 V rms. O wattímetro A indica 1.200 W e o wattímetro B indica 400 W quando os terminais de corrente são invertidos. Determine o fator de potência e a impedância por fase.
- 12.62** Um sistema em equilíbrio Y-delta trifásico emprega dois wattímetros para medir a potência total. Se os wattímetros indicam  $P_A = 800$  W e  $P_B = 400$  W, sem inverter os terminais do wattímetro, e a tensão de linha é 208 V rms, determine o valor da impedância da carga.
- 12.63** Dada a rede do Exemplo 12.21, se a carga trifásica em equilíbrio é 10 MVA a 0,8 fp em atraso e a tensão da linha é 4,6 kV rms, determine  $C$  tal que a carga total tenha um fp de 0,90 em avanço.
- 12.64** Determine  $C$  no Problema 12.63 tal que a carga total tenha um fator de potência de 0,95 em atraso.
- 12.65** Determine  $C$  na rede da Figura P12.65 tal que a carga total tenha um fator de potência de 0,92 em avanço.

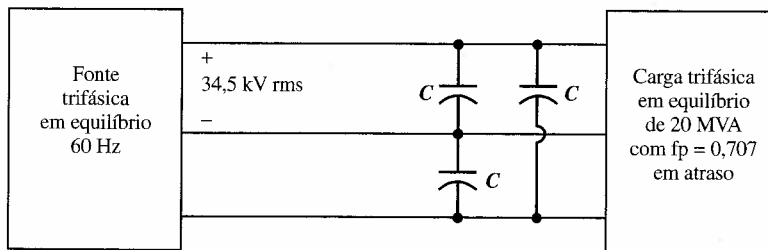


Figura P12.65

- 12.66** Determine o valor de  $C$  no Problema 12.65 tal que a carga total tenha um fator de potência de 0,92 em atraso.
- 12.67** Determine  $C$  na rede da Figura P12.67 tal que a carga total tenha um fator de potência de 0,9 em atraso.

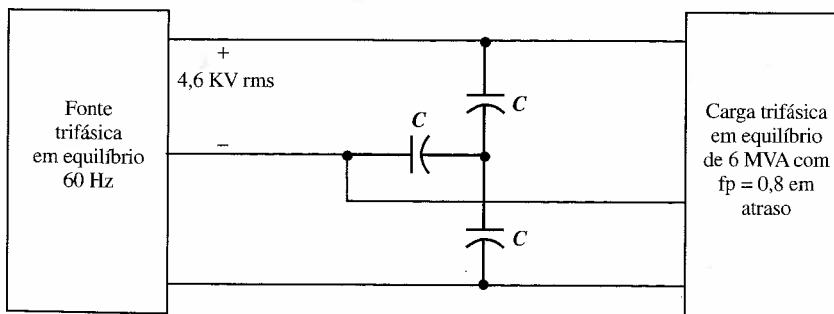


Figura P12.67

- 12.68** Determine  $C$  na rede da Figura P12.67 tal que a carga total tenha um fator de potência de 0,9 em avanço.

# Redes Magneticamente Acopladas

Introduzimos agora um novo elemento de quatro terminais chamado *transformador*. Esse elemento de circuito consiste de dois indutores que são colocados com certa proximidade um do outro. Por causa de sua proximidade, eles compartilham do mesmo fluxo magnético e, portanto, as bobinas indutoras estão acopladas mutuamente.

Começaremos com a descrição geral de duas bobinas acopladas e então mostraremos como as equações do circuito podem ser escritas para redes que contêm indutores acoplados. Vamos considerar bobinas que estão acopladas com material magnético de boa qualidade e então derivar uma aproximação para o acoplamento ideal, chamado de *transformador ideal*. O programa para análise de circuitos PSPICE será aplicado a redes acopladas magneticamente e circuitos contendo transformadores ideais. Finalmente, autotransformadores e transformadores trifásicos serão apresentados.

Os transformadores são muito importantes porque são usados em uma variedade de aplicações. Por exemplo, em sistemas de comunicação eles são usados para casamento de impedâncias entre fontes e cargas ou linhas de transmissão. Transformadores fornecem isolamento dc e isolamento para segurança. Eles também são usados para fornecer casamento entre uma fonte aterrada e uma linha de transmissão.

Em sistemas de potência, transformadores são usados para elevar e abaixar a tensão. De fato, transformadores são utilizados em eliminadores de pilha e recarregadores de bateria, que podem ser ligados diretamente em tomadas residenciais.

## 13.1 Indutância Mútua

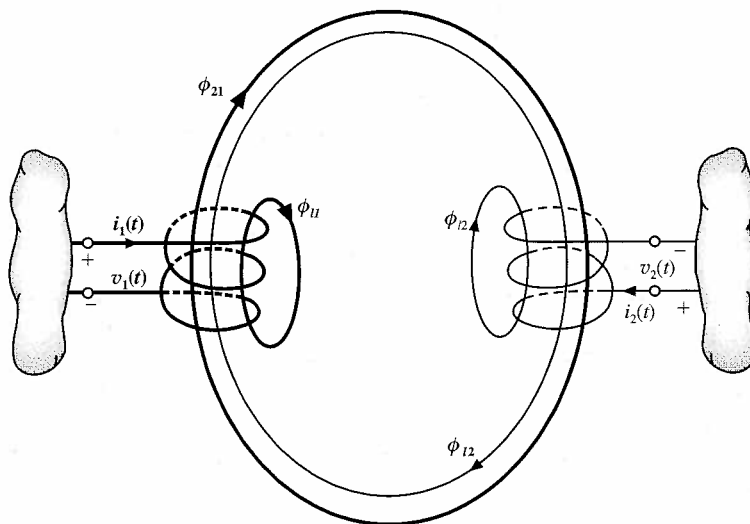
Para iniciar nossa descrição de duas bobinas acopladas, empregamos a lei de Faraday, que pode ser escrita como: A tensão induzida em uma bobina é proporcional à taxa de variação de fluxo e do número espiras,  $N$ , da bobina. As duas bobinas acopladas são mostradas na Figura 13.1 juntamente com os seguintes componentes de fluxo:

|                                    |                                                                                                    |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\phi_{l_1}$                       | O fluxo na bobina 1, que não está acoplado com a bobina 2, e é produzido pela corrente na bobina 1 |
| $\phi_{l_2}$                       | O fluxo na bobina 2, que não está acoplado com a bobina 1, e é produzido pela corrente na bobina 2 |
| $\phi_{12}$                        | O fluxo na bobina 1 produzido pela corrente na bobina 2                                            |
| $\phi_{21}$                        | O fluxo na bobina 2 produzido pela corrente na bobina 1                                            |
| $\phi_{11} = \phi_{l_1} \phi_{21}$ | O fluxo na bobina 1 produzido pela corrente na bobina 1                                            |
| $\phi_{22} = \phi_{l_2} \phi_{12}$ | O fluxo na bobina 2 produzido pela corrente na bobina 2                                            |
| $\phi_1$                           | O fluxo total na bobina 1                                                                          |
| $\phi_2$                           | O fluxo total na bobina 2                                                                          |

A fim de se escrever as equações que descrevem as bobinas acopladas, definimos as tensões e correntes, usando a convenção passiva de sinal, em cada par de terminais, como mostrado na Figura 13.1.

Matematicamente, a lei de Faraday pode ser escrita como

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \quad (13.1)$$



**Figura 13.1** Relações de fluxos para bobinas mutuamente acopladas.

O fluxo  $\phi_1$  será igual a  $\phi_{11}$ , o fluxo na bobina 1 causado pela corrente na bobina 1, mais ou menos o fluxo na bobina 1 causado pela corrente na bobina 2; isto é,

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} \quad (13.2)$$

Se a corrente na bobina 2 é tal que os fluxos somam, então o sinal positivo é usado; se a corrente na bobina é tal que os fluxos se opõem um ao outro, é usado o sinal negativo. A equação para a tensão pode ser escrita

$$\begin{aligned} v_1(t) &= N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \\ &= N_1 \frac{d\phi_{11}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt} \end{aligned} \quad (13.3)$$

Da física sabemos que

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= N_1 i_1 \mathcal{P}_{11} \\ \phi_{12} &= N_2 i_2 \mathcal{P}_{12}\end{aligned}\quad (13.4)$$

onde os  $\mathcal{P}$ s são constantes (permeâncias) que dependem de caminhos magnéticos percorridos pelos componentes de fluxo. A equação de tensão pode ser escrita como

$$v_1(t) = N_1^2 \mathcal{P}_{11} \frac{di_1}{dt} + N_1 N_2 \mathcal{P}_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (13.5)$$

A constante  $N_1^2 \mathcal{P}_{11} = L_{11}$  (o mesmo  $L$  que usamos antes) é agora chamada de *auto-indutância*, e a constante  $N_1 N_2 \mathcal{P}_{12} = L_{12}$  é chamada de *indutância mútua*. Portanto,

$$v_1(t) = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (13.6)$$

Usando a mesma técnica, podemos escrever

$$v_2(t) = N_2^2 \mathcal{P}_{22} \frac{di_2}{dt} + N_1 N_2 \mathcal{P}_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (13.7)$$

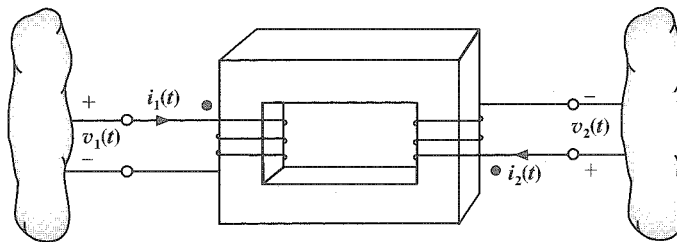
que pode ser escrita

$$v_2(t) = L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (13.8)$$

Se o meio através do qual o fluxo magnético passa for linear, então  $\mathcal{P}_{12} = \mathcal{P}_{21}$ . Desse modo,  $L_{12} = L_{21} = M$ . Para conveniência, vamos definir  $L_1 = L_{11}$  e  $L_2 = L_{22}$ .

Precisamos agora examinar os detalhes físicos das bobinas acopladas. Aprendemos em cursos de física a *regra da mão direita*, que diz que se enrolarmos os dedos da mão direita ao redor da bobina na direção da corrente, o fluxo produzido pela corrente estará na mesma direção do polegar.

Para indicar a relação física das bobinas e, portanto, simplificar a convenção de sinal para termos mútuos, empregaremos o que é normalmente chamado de *convenção do ponto*. Pontos são colocados ao lado de um dos terminais de cada bobina de tal forma que se correntes entram em terminais marcados com pontos ou deixam tais terminais, os fluxos produzidos pelas correntes se somarão. Para se colocar os pontos em um par de bobinas acopladas, selecionamos aleatoriamente um terminal de cada bobina e colocamos um ponto ali. Usando a regra da mão direita, determinamos a direção de fluxo produzido por essa bobina quando a corrente está entrando no terminal com ponto. Examinamos então a outra bobina para determinar em qual terminal a corrente teria de entrar para produzir um fluxo que se somaria ao fluxo produzido pela primeira bobina. Coloque um ponto nesse terminal. Os pontos foram colocados nos dois circuitos acoplados da Figura 13.2; verifique se eles estão corretos.



**Figura 13.2** Ilustração da convenção de ponto para bobinas acopladas.

Quando as equações para as tensões do terminal são escritas, os pontos podem ser usados para definir o sinal de tensões mutuamente induzidas. Se as correntes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  estão ambas entrando ou deixando os pontos, o sinal de tensão mútua  $M(di_2/dt)$  será o mesmo de uma equação com tensão auto-induzida  $L_1(di_1/dt)$ . Se uma corrente entra em um ponto e a outra corrente deixa um ponto, os termos da tensão induzida mutuamente e da tensão auto-induzida terão sinais opostos.

### Exemplo 13.1

Determine as expressões para  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  nos circuitos mostrados na Figura 13.3.

Para o circuito da Figura 13.3, as equações de tensão para as variáveis, como indicadas na figura, são

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

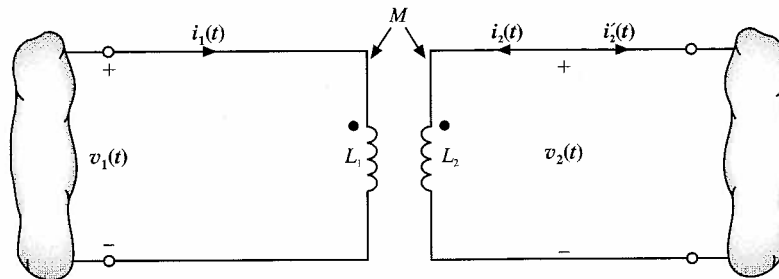


Figura 13.3 Dois circuitos indutores mutuamente induzidos.

### Exemplo 13.2

Determine as equações para  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  nos circuitos mostrados na Figura 13.3 para o caso em que  $i_2(t)$  é substituído por  $i'_2(t)$  (ou seja, corrente secundária deixando o ponto).

As equações são

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di'_2}{dt}$$

$$v_2(t) = -L_2 \frac{di'_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

### Exercício

E13.1 Escreva as equações para  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  no circuito da Figura E13.1.

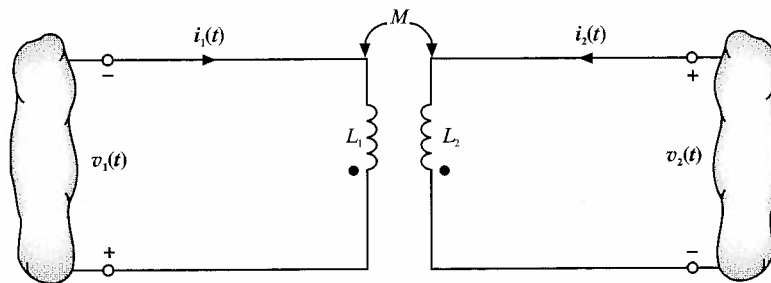


Figura E13.1

Resp.:  $v_1(t) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$ ,  $v_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$ .

Assuma que o circuito acoplado da Figura 13.3 é excitado por uma fonte senoidal. As tensões serão da forma  $V_1 e^{j\omega t}$  e  $V_2 e^{j\omega t}$ , e as correntes serão da forma  $I_1 e^{j\omega t}$  e  $I_2 e^{j\omega t}$ , onde  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$  são fasores. Substituindo-se tais tensões e correntes nas equações 13.6 e 13.8, obtemos

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$$

$$V_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \quad (13.9)$$

O modelo de circuito acoplado no domínio da frequência é idêntico àquele no domínio do tempo, com a exceção da maneira como os elementos são rotulados. O sinal nos termos mútuos é manipulado do mesmo modo que é feito no domínio do tempo.

### Exemplo 13.3

As duas bobinas mutuamente acopladas da Figura 13.4a podem ser interconectadas de quatro maneiras possíveis. Desejamos determinar a indutância equivalente de cada uma das quatro possíveis interconexões.

O Caso 1 é mostrado na Figura 13.4b. Nesse caso,

$$\begin{aligned} V &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_1 + j\omega M I_1 \\ &= j\omega L_{eq} I_1 \end{aligned}$$

onde  $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$ .

O Caso 2 é mostrado na Figura 13.4c. Usando-se a LKT, obtemos

$$\begin{aligned} V &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_1 - j\omega M I_1 \\ &= j\omega L_{eq} I_1 \end{aligned}$$

onde  $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$ .

O Caso 3 é mostrado na Figura 13.4d e redesenhado na Figura 13.4e. As duas equações LKT são

$$\begin{aligned} V &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{aligned}$$

Resolvendo-se tais equações para  $I_1$  e  $I_2$ , tem-se

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V(L_2 - M)}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} \\ I_2 &= \frac{V(L_1 - M)}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} \end{aligned}$$

Usando-se a LKC, temos

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V(L_1 + L_2 - 2M)}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} = \frac{V}{j\omega L_{eq}}$$

onde

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

O Caso 4 é mostrado na Figura 13.4f. As equações da tensão nesse caso serão as mesmas que as do Caso 3, com a exceção dos sinais dos termos mútuos que serão negativos. Portanto

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

### Exemplo 13.4

Desejamos determinar a tensão de saída  $V_o$  no circuito da Figura 13.5.

As duas equações LKT para a rede são

$$\begin{aligned} (2 + j4)I_1 - j2I_2 &= 24\angle 30^\circ \\ -j2I_1 + (2 + j6 - j2)I_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo-se as equações, tem-se

$$I_2 = 2,68 \angle 3,43^\circ \text{ A}$$

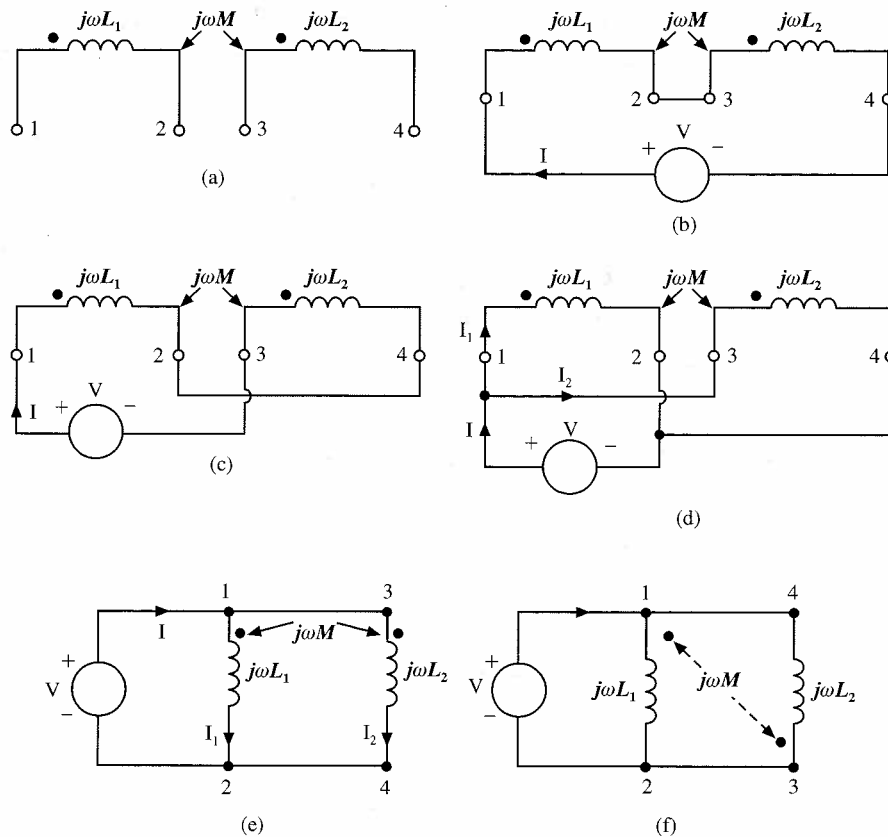


Figura 13.4 Circuitos usados no Exemplo 13.3.

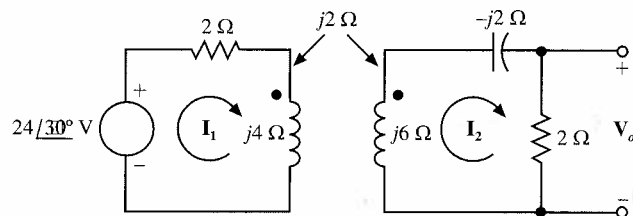


Figura 13.5 Exemplo de um circuito acoplado magneticamente.

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_o &= 2\mathbf{I}_2 \\ &= 5,37 \angle 3,43^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Vamos agora considerar um exemplo mais complicado que envolve indutância mútua.

### Exemplo 13.5

Considere o circuito da Figura 13.6. Desejamos escrever as equações de malha para essa rede. Por causa das múltiplas correntes que estão presentes nos indutores acoplados, devemos ser cuidadosos ao escrever as equações do circuito.

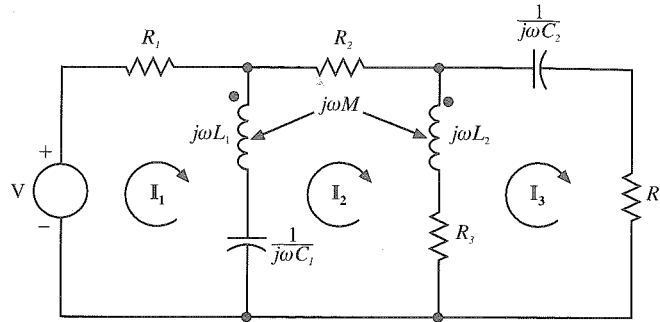


Figura 13.6 Exemplo de um circuito acoplado magneticamente.

As equações de malha para a rede são

$$\begin{aligned} I_1 R_1 + j\omega L_1 (I_1 - I_2) + j\omega M (I_2 - I_3) + \frac{1}{j\omega C_1} (I_1 - I_2) &= V \\ \frac{1}{j\omega C_1} (I_2 - I_1) + j\omega L_1 (I_2 - I_1) + j\omega M (I_3 - I_2) + R_2 I_2 + j\omega L_2 (I_2 - I_3) \\ &\quad - j\omega M (I_2 - I_1) + R_3 (I_2 - I_3) = 0 \\ R_3 (I_3 - I_2) + j\omega L_2 (I_3 - I_2) + j\omega M (I_2 - I_1) + \frac{1}{j\omega C_2} I_3 + R_4 I_3 &= 0 \end{aligned}$$

que podem ser escritas da forma

$$\begin{aligned} \left( R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) I_1 - \left( j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} - j\omega M \right) I_2 - j\omega M I_3 &= V \\ - \left( j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} - j\omega M \right) I_1 \\ + \left( \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 + R_3 - j2\omega M \right) I_2 \\ - (j\omega L_2 + R_3 - j\omega M) I_3 &= 0 \\ -j\omega M I_1 - (R_3 + j\omega L_2 - j\omega M) I_2 + \left( R_3 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_4 \right) I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Note a simetria dessas equações.

### Exercícios

E13.2 Determine as correntes  $I_1$  e  $I_2$  e a tensão de saída  $V_o$  na rede da Figura E13.2.

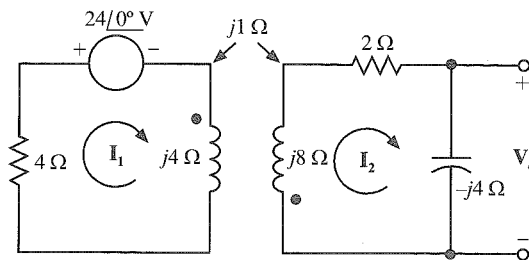


Figura E13.2

Resp.:  $I_1 = -4,29 \angle -42,8^\circ$  A,  $I_2 = 0,96 \angle -16,26^\circ$  A,  $V_o = 3,84 \angle -106,26^\circ$  V.

E13.3 Escreva as equações de forma padrão para a rede da Figura E13.3.



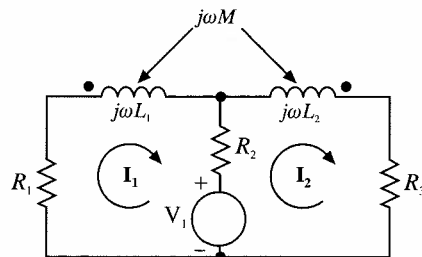


Figura E13.3

**Resp.:**  $(R_1 + j\omega L_1 + R_2)I_1 - (R_2 + j\omega M)I_2 = -V_1$ ,  
 $-(R_2 + j\omega M)I_1 + (R_2 + j\omega L_2 + R_3)I_2 = V_1$ .

**E13.4** Escreva as equações de malha para a rede da Figura E13.4.

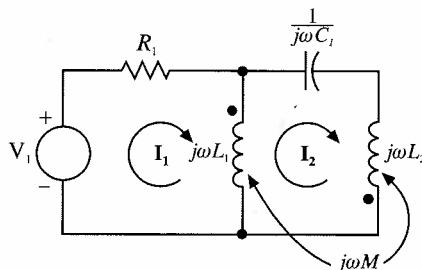


Figura E13.4

**Resp.:**  $(R_1 + j\omega L_1)I_1 - (j\omega L_1 + j\omega M)I_2 = V_1$ ,  $-(j\omega L_1 + j\omega M)I_1 +$   
 $(j\omega L_1 + 1/j\omega C + j\omega L_2 + 2j\omega M)I_2 = 0$ .

## 13.2 Análise de Energia

Faremos agora uma análise de energia em um par de indutores mutuamente acoplados que ilustrará algumas relações importantes entre os elementos do circuito. A análise envolverá a execução de um experimento na rede mostrada na Figura 13.7. Antes de começar o experimento, todas as tensões e correntes no circuito serão zeradas. Uma vez que o circuito estiver estacionário, aumentamos a corrente  $i_1(t)$  de zero para algum valor  $I_1$  com os terminais do lado direito em aberto. Uma vez que os terminais da direita estão em aberto,  $i_2(t) = 0$ , e portanto a corrente entrando nesses terminais é zero. A potência instantânea entrando nos terminais do lado esquerdo é

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) = \left[ L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \right] i_1(t)$$

A energia armazenada no circuito acoplado no instante  $t_1$  quando  $i_1(t) = I_1$  é então

$$\int_0^{t_1} v_1(t)i_1(t)dt = \int_0^{t_1} L_1 i_1(t)di_1(t) = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Dando prosseguimento à nossa experiência, iniciando no instante  $t_1$ , deixamos a corrente  $i_2(t)$  aumentar de zero para algum valor  $I_2$  no instante  $t_2$  enquanto mantemos  $i_1(t)$  constante em  $I_1$ . A energia fornecida através dos terminais do lado direito é

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2(t)i_2(t)dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2(t)di_2(t) = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

No entanto, durante o intervalo entre  $t_1$  e  $t_2$  a tensão  $v_1(t)$  é

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

Uma vez que  $i_1(t)$  é uma constante  $I_1$ , a energia fornecida através dos terminais do lado esquerdo é

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} v_1(t) i_1(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} M \frac{di_2(t)}{dt} I_1 dt = MI_1 \int_0^{I_2} di_2(t) \\ &= MI_1 I_2 \end{aligned}$$

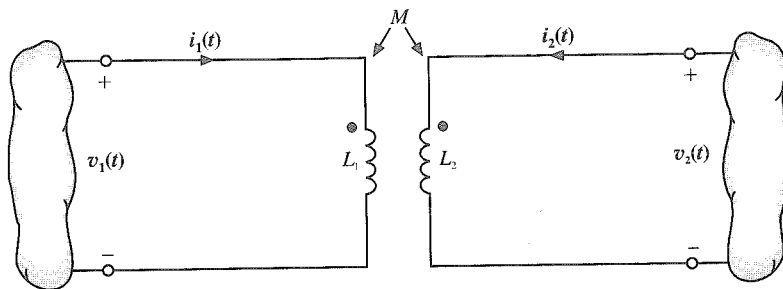


Figura 13.7 Circuito magneticamente acoplado.

Portanto, a energia total armazenada na rede para  $t > t_2$  é

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2 \quad (13.10)$$

Poderíamos, é claro, repetir o experimento inteiro com o ponto em  $L_1$  ou  $L_2$ , mas não ambos, invertidos, e nesse caso o sinal do termo da indutância mútua seria negativo, produzindo

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - MI_1 I_2$$

É importante perceber que na derivação da equação acima, os valores  $I_1$  e  $I_2$  poderiam ter sido quaisquer em qualquer instante; portanto, a energia armazenada nos indutores magneticamente acoplados em qualquer instante de tempo é dada pela expressão

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2} L_2 [i_2(t)]^2 \pm Mi_1(t)i_2(t) \quad (13.11)$$

Os dois indutores acoplados representam uma rede passiva e, portanto, a energia armazenada nessa rede deve ser não-negativa para quaisquer valores de indutâncias e correntes. A equação para a energia instantânea armazenada no circuito magnético pode ser escrita como

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm Mi_1 i_2$$

Somando-se e subtraindo-se o termo  $\frac{1}{2}(M^2/L_2)i_1^2$  e rearrumando a equação, tem-se

$$w(t) = \frac{1}{2} \left( L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \left( i_2 + \frac{M}{L_2} i_1 \right)^2$$

Dessa expressão, reconhecemos que a energia instantânea armazenada será não-negativa se

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (13.12)$$

Note que essa equação especifica um limite superior no valor da indutância mútua.

Definimos o coeficiente de acoplamento entre os dois indutores  $L_1$  e  $L_2$  como

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (13.13)$$

e notamos da Equação 13.12 que sua variação de valores é

$$0 \leq k \leq 1 \quad (13.14)$$

Esse coeficiente é uma indicação de quanto fluxo de uma bobina está sendo enlaçado pela outra bobina; isto é, se todo o fluxo enlaçado por uma bobina for também enlaçado pela outra, então o acoplamento seria de 100% e  $k = 1$ . Para valores muito grandes de  $k$  (ou seja,  $k > 0,5$ ), os indutores estão fortemente acoplados, e para valores pequenos de  $k$  (ou seja,  $k \leq 0,5$ ), as bobinas estão fracamente acopladas. As equações anteriores indicam que o valor para indutância mútua está restrito ao intervalo

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (13.15)$$

e que o limite superior é a média geométrica das indutâncias  $L_1$  e  $L_2$ .

### Exemplo 13.6

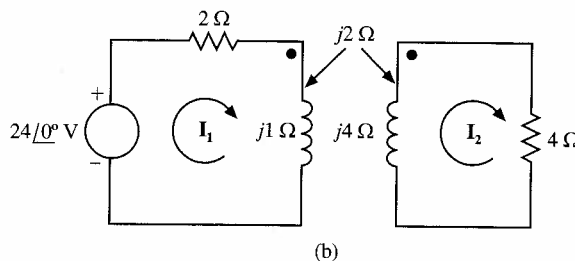
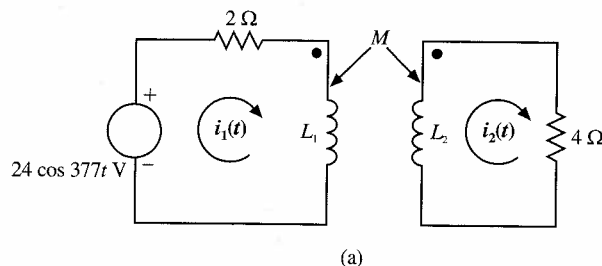
O circuito acoplado da Figura 13.8a tem um coeficiente de acoplamento de 1 (ou seja,  $k = 1$ ). Desejamos determinar a energia armazenada nos indutores mutuamente acoplados no instante  $t = 5$  ms.  $L_1 = 2,653$  mH e  $L_2 = 10,61$  mH.

A partir dos dados, a indutância mútua é

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = 5,31 \text{ mH}$$

O circuito equivalente no domínio da frequência é mostrado na Figura 13.8b, onde os valores da impedância para  $X_{L_1}$ ,  $X_{L_2}$  e  $X_M$  são 1, 4 e 2, respectivamente. As equações de malha para a rede são então

$$\begin{aligned} (2 + j1)\mathbf{I}_1 - 2j\mathbf{I}_2 &= 24\angle 0^\circ \\ -j2\mathbf{I}_1 + (4 + 4j)\mathbf{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$



**Figura 13.8** Exemplo de um circuito magneticamente acoplado desenhado nos domínios da frequência e tempo.

Resolvendo-se essas equações para as duas correntes de malha, tem-se

$$\mathbf{I}_1 = 9,41 \angle -11,31^\circ \text{ A e } \mathbf{I}_2 = 3,33 \angle +33,69^\circ \text{ A}$$

e portanto

$$i_1(t) = 9,41 \cos(377t - 11,31^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 3,33 \cos(377t - 33,69^\circ) \text{ A}$$

No instante  $t = 5$  ms,  $377t = 1,885$  rad ou  $108^\circ$ , e portanto

$$i_1(t = 5 \text{ ms}) = 9,41 \cos(108^\circ - 11,31^\circ) = -1,10 \text{ A}$$

$$i_2(t = 5 \text{ ms}) = 3,33 \cos(108^\circ + 33,69^\circ) = -2,61 \text{ A}$$

Logo, a energia armazenada nos indutores acoplados no instante  $t = 5$  ms é

$$\begin{aligned}
 w(t) \Big|_{t=0,005\text{ s}} &= \frac{1}{2} (2,653)(10^{-3})(-1,10)^2 + \frac{1}{2} (10,61)(10^{-3})(-2,61)^2 \\
 &\quad - (5,31)(10^{-3})(-1,10)(-2,61) \\
 &= (1,55)(10^{-3}) + (36,14)(10^{-3}) - (15,25)(10^{-3}) \\
 &= 22,44 \text{ mJ}
 \end{aligned}$$

### Exercícios

**E13.5** Duas bobinas em uma rede estão posicionadas de modo tal que existe 100% de acoplamento entre elas. Se a indutância de uma bobina é de 10 mH e a indutância mútua é 6 mH, calcule a indutância da outra bobina.

**Resp.:**  $L_2 = 3,6 \text{ mH}$ .

**E13.6** A rede da Figura E13.6 opera a 60 Hz. Calcule a energia armazenada nos indutores mutuamente acoplados no instante  $t = 10 \text{ ms}$ .

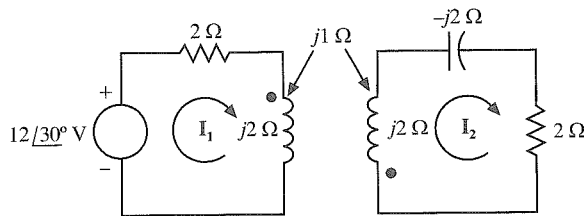


Figura E13.6

**Resp.:**  $w(10 \text{ ms}) = 39 \text{ mJ}$ .

## 13.3 O Transformador Linear

Um transformador é um equipamento que contém duas ou mais bobinas acopladas magneticamente. Um transformador típico conectado a uma fonte e alimentando uma carga é mostrado na Figura 13.9. A fonte está conectada ao enrolamento *primário* do transformador, e a carga está conectada ao enrolamento *secundário*. Dessa forma,  $R_1$  e  $L_1$  se referem à resistência e auto-indutância do primário, e  $R_2$  e  $L_2$  se referem à resistência e auto-indutância do secundário. O transformador é *linear* se a permeabilidade magnética ( $\mu$ ) dos caminhos através dos quais os fluxos fluem é constante. Sem o uso de material alto  $\mu$ , o coeficiente de acoplamento,  $k$ , é tipicamente muito pequeno. Transformadores desse tipo têm aplicação variada em produtos como rádios e aparelhos de televisão.

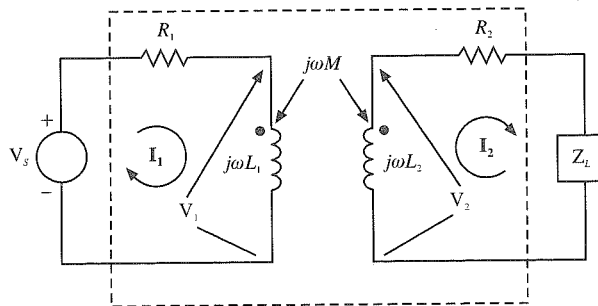
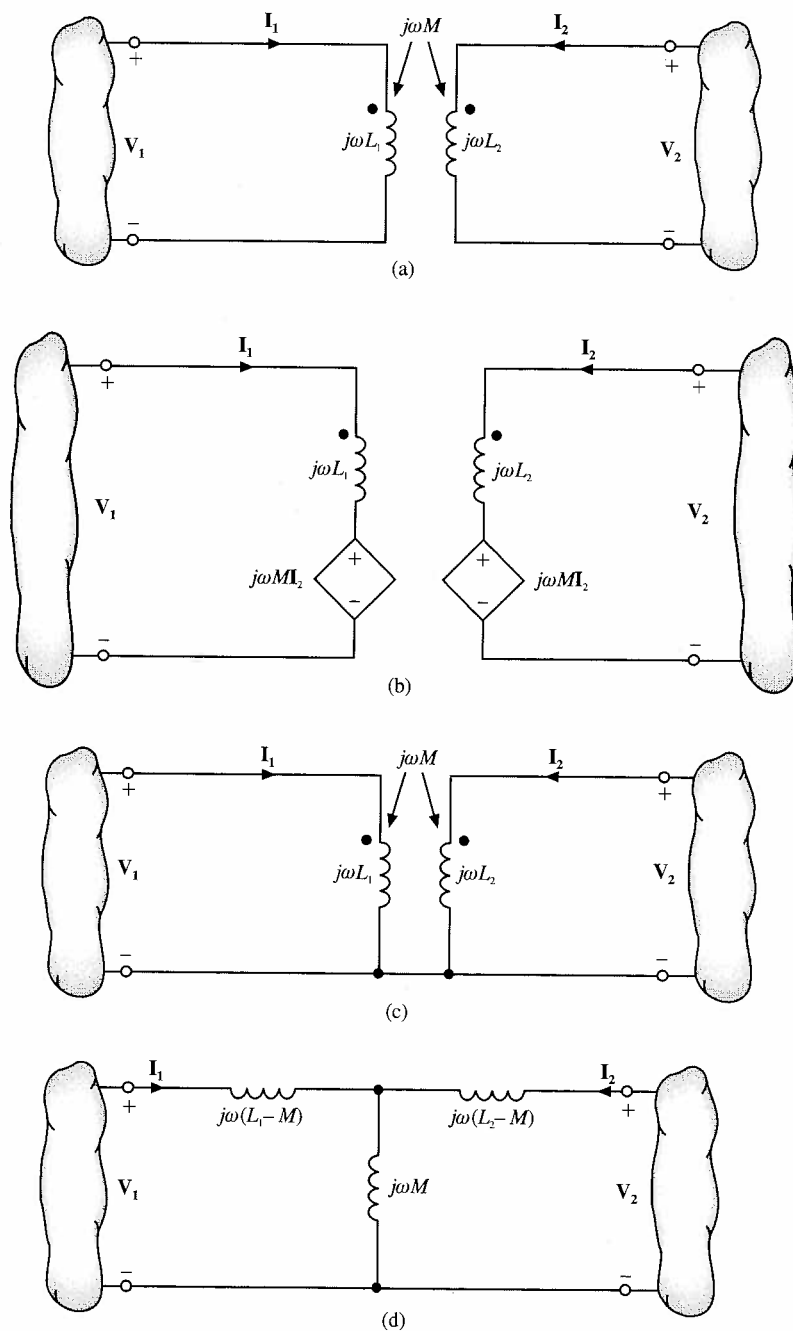


Figura 13.9 Circuito com transformador.

Existem várias maneiras de modelar a parte magneticamente acoplada do transformador. O modelo já desenvolvido é mostrado na Figura 13.10a. Todos os modelos são desenvolvidos para que as equações relacionadas com  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$  na Figura 13.10a sejam satisfeitas. Tais equações são

$$\begin{aligned}
 V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\
 V_2 &= j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1
 \end{aligned} \tag{13.16}$$



**Figura 13.10** Circuitos transformadores equivalentes.

Uma técnica envolve o uso de fontes dependentes, como mostrado na Figura 13.10b. As equações do circuito para esse modelo são

$$\begin{aligned} V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{aligned} \quad (13.17)$$

Outra rede envolve a substituição do transformador com uma rede T equivalente. Esse circuito equivalente é válido somente se a rede de quatro terminais puder ser substituída pela rede de três terminais mostrada na Figura 13.10c. Tais equações de circuito são também

$$\begin{aligned} V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{aligned} \quad (13.18)$$

Essas equações parecem representar duas equações de malha em que o elemento comum entre as duas malhas é um indutor de valor  $M$ . De forma que a indutância total da primeira malha seja  $L_1$  e que a indutância do elemento comum seja  $M$ , como indicado na primeira equação acima, um indutor de valor  $L_1 - M$  deve ser colocado na primeira malha do circuito equivalente. Um argumento semelhante para a segunda malha indica que um indutor de valor  $L_2 - M$  deve ser colocado naquela malha do circuito equivalente. O circuito equivalente resultante dessa análise é mostrado na Figura 13.10d. Note que essa rede satisfaz as equações de circuito 13.18.

Se as relações entre as correntes e os pontos (que indicam a polaridade das bobinas) forem tais que os termos mútuos na Equação 13.18 são negativos, podemos simplesmente substituir  $M$  por  $-M$  na rede equivalente da Figura 13.10. Tal situação é ilustrada no Exemplo 13.7. Do ponto de vista de modelagem matemática, uma indutância negativa não apresenta problemas; devemos, porém, nos lembrar que tal elemento físico não existe na realidade.

### Exemplo 13.7

O coeficiente de acoplamento para o transformador linear na rede da Figura 13.11a é  $k = 0,1$ . Desejamos determinar a rede T equivalente para o transformador e redesenhar o circuito usando esse modelo equivalente.

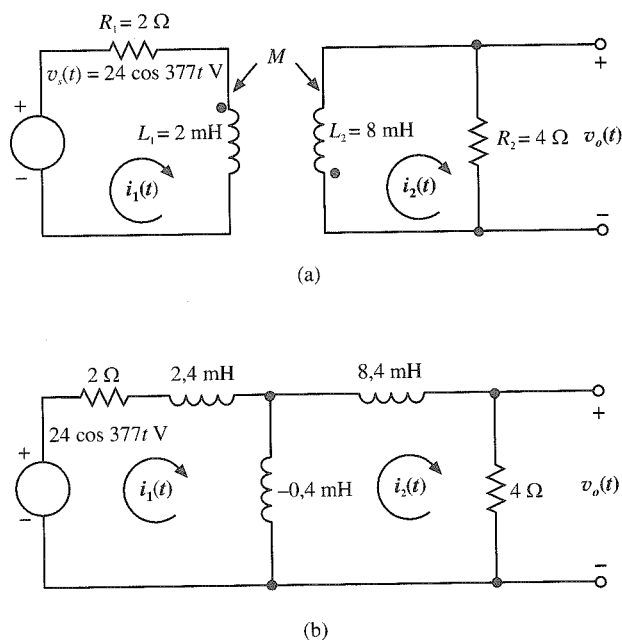


Figura 13.11 Exemplo de circuito transformador junto com seu circuito T equivalente.

Usando o relacionamento  $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ , achamos que

$$\begin{aligned} M &= k\sqrt{L_1 L_2} \\ &= 0,1\sqrt{(16)(10^{-6})} \\ &= 0,4 \text{ mH} \end{aligned}$$

Uma vez que ambas as correntes estão indo para o ponto, as equações para a rede original são

$$\begin{aligned} V_s &= R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ 0 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 + R_2 I_2 \end{aligned}$$

Note que o termo mútuo é positivo nessas equações. Se na rede T usarmos a mesma direção para as correntes, o termo mútuo na primeira equação será positivo somente se o indutor no centro da rede T é negativo. Portanto, o indutor do centro é escolhido para ter o valor de  $-M$ , e os outros dois indutores têm valores  $L_1 + M$  e  $L_2 + M$ , como mostrado na Figura 13.11b. Escreva as equações de malha para a rede da Figura 13.11b para verificar que elas são as mesmas equações acima. ■

Em relação à Figura 13.9, vamos calcular a impedância de entrada para os transformadores como visto pela fonte. As equações são

$$\begin{aligned} V_s &= I_1(R_1 + j\omega L_1) - j\omega M I_2 \\ 0 &= -j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)I_2 \end{aligned}$$

Resolvendo-se a segunda equação para  $I_2$  e substituindo-a na primeira equação, tem-se

$$V_s = \left( R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} \right) I_1$$

Portanto, a impedância de entrada é

$$Z_i = \frac{V_s}{I_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} \quad (13.19)$$

Se olharmos da fonte para a rede para determinar  $Z_i$ , vemos a impedância do primário (ou seja,  $R_1 + j\omega L_1$ ) mais uma impedância que o secundário dos transformadores reflete, devido ao acoplamento mútuo, para o primário. Essa *impedância refletida* é

$$Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} \quad (13.20)$$

Note que tal impedância refletida é independente da alocação dos pontos.

Se  $Z_L$  na Equação 13.20 for escrita como

$$Z_L = R_L + jX_L \quad (13.21)$$

então

$$Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L)}$$

que pode ser escrito como

$$Z_R = \frac{\omega^2 M^2 [(R_2 + R_L) - j(\omega L_2 + X_L)]}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 + X_L)^2} \quad (13.22)$$

Essa equação ilustra que se  $X_L$  é uma reactância indutiva ou se  $X_L$  é uma reactância capacitiva com  $\omega L_2 > X_L$ , então a reactância refletida é capacitiva. Em geral, a reactância refletida é oposta em sinal àquele da reactância total no secundário. Se  $\omega L_2 + X_L = 0$  (ou seja, o secundário está em ressonância),  $Z_R$  é puramente resistivo e

$$Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + R_L} \quad (13.23)$$

### Exemplo 13.8

Para a rede mostrada na Figura 13.12 desejamos determinar a impedância de entrada.

Seguindo-se o desenvolvimento que leva à Equação 13.19, achamos que a impedância de entrada é

$$\begin{aligned} Z_i &= 12 + j10 + \frac{(1)^2}{16 + j8 - j4 + 4 + j6} \\ &= 12,04 + j9,98 \\ &= 15,64 / 39,65^\circ \Omega \end{aligned}$$

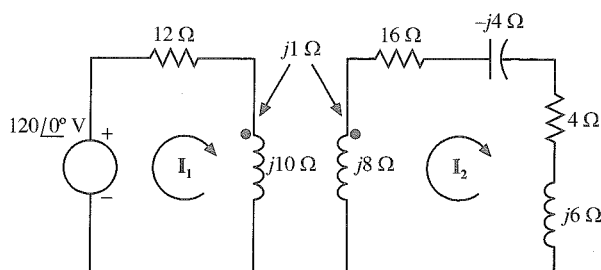


Figura 13.12 Exemplo de circuito transformador.

### Exercício

E13.7 Dada a rede da Figura E13.7, determine a impedância de entrada da rede e da corrente na fonte de tensão.

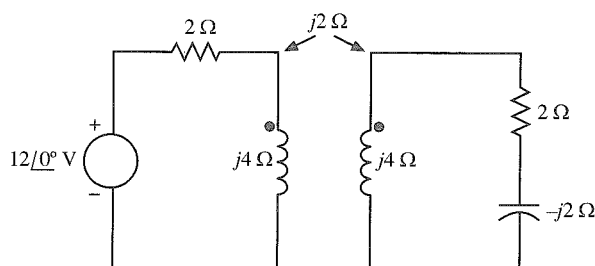


Figura E13.7

Resp.:  $Z_i = 3 + j3 \Omega$ ,  $I_S = 2 - j2 \text{ A}$ .

## 13.4 Análise PSPICE de Circuitos Magneticamente Acoplados

O programa de análise de circuitos PSPICE pode ser empregado para se resolver circuitos magnéticos acoplados. Para se usar PSPICE nesse caso, devemos apresentar um comando adicional que define o acoplamento. O comando é

KXXXXXXX LYYYYYYY LZZZZZZZ value

LYYYYYYY e LZZZZZZZ são os nomes dos indutores acoplados, e o valor (value) é o coeficiente de acoplamento KXXXXXXX que deve satisfazer o relacionamento

$$0 < KXXXXXXX \leq 1$$

A convenção do “ponto” se aplica nessa análise e o ponto deveria estar no primeiro nó de cada indutor.

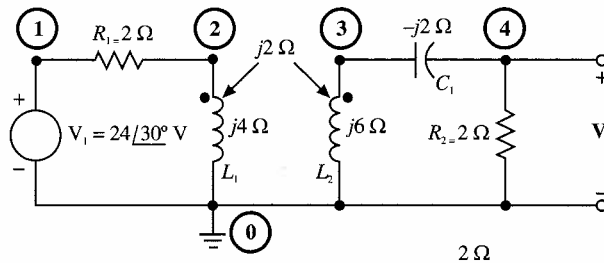
Os exemplos seguintes ilustram o uso de PSPICE para circuitos acoplados.

### Exemplo 13.9

Vamos considerar mais uma vez a rede do Exemplo 13.4, que está redesenhada na Figura 13.13 para análise PSPICE. Vamos assumir que a frequência é  $f = 1/2\pi \text{ Hz}$ . O coeficiente de acoplamento é então

$$K = \frac{2}{\sqrt{(4)(6)}} = 0,408248$$





**Figura 13.13** Figura 13.5 preparada para análise PSPICE.

O programa PSPICE para determinar a tensão de saída é

EXAMPLE 13.9

```
V1 1 0 AC 24 30
R1 1 2 2
L1 2 0 4
L2 3 0 6
K1 L1 L2 0.408248
C1 3 4 0.5
R2 4 0 2
.AC LIN 1 0.159155 0.159155
.PRINT AC VM(4) VP(4)
.END
```

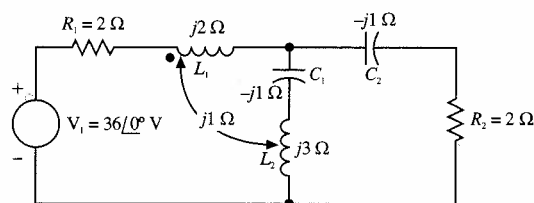
A saída do computador é

| FREQ      | VM(4)     | VP(4)     |
|-----------|-----------|-----------|
| 1.592E-01 | 5.367E+00 | 3.435E+00 |

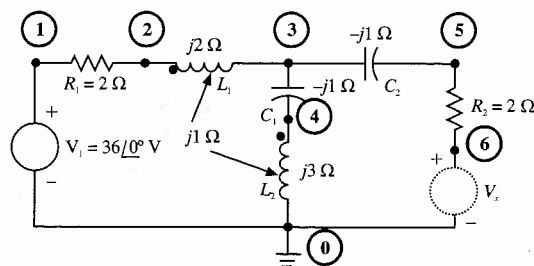
### Exemplo 13.10

A rede da Figura 13.14a está redesenhada na Figura 13.14b para análise PSPICE. Vamos escrever um programa que calcule a corrente em  $R_2$  assumindo que a frequência é  $f = 1/2\pi$  Hz. O coeficiente de acoplamento é

$$k = \frac{1}{\sqrt{(2)(3)}} = 0,408248$$



(a)



(b)

**Figura 13.14** Exemplo de análise PSPICE.

O programa está listado abaixo.

```
EXAMPLE 13.10
V1 1 0 AC 36 0
R1 1 2 2
L1 2 3 2
C1 3 4 1
L2 4 0 3
K1 L1 L2 0.408248
C2 3 5 1
R2 5 6 2
VX 6 0 AC 0 0
.AC LIN 1 0.159155 0.159155
.PRINT AC IM(VX) IP(VX)
.END
```

A saída do computador é

| FREQ      | IM(VX)    | IP(VX)    |
|-----------|-----------|-----------|
| 1.592E-01 | 6.900E+00 | 2.657E+01 |

### Exercícios

**E13.8** Dada a rede da Figura E13.8, com  $f = 1/2\pi$  Hz e o coeficiente de acoplamento = 0,9, calcule  $V_o$  usando o programa PSPICE.

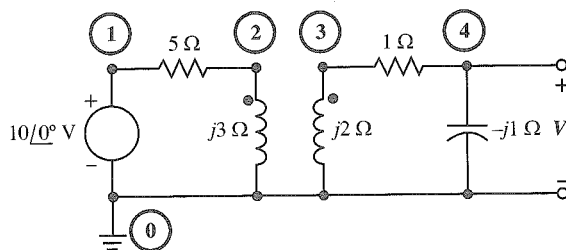


Figura E13.8

*Resp.:*  $V_o = 2,092 \angle -49,39^\circ$  V.

**E13.9** Dada a rede da Figura E13.9 com  $f = 1/2\pi$  Hz e o coeficiente de acoplamento = 0,7071, escreva o programa PSPICE para calcular  $V_o$ .

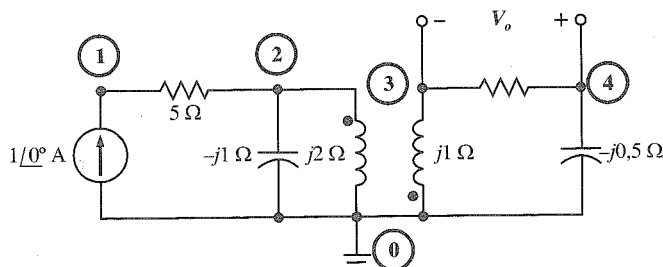


Figura E13.9

*Resp.:*  $V_o = 0,8944 \angle -63,44^\circ$  V.

## 13.5 O Transformador Ideal

Considere a situação ilustrada na Figura 13.15, mostrando duas bobinas de fio enroladas em um único núcleo magnético fechado. O núcleo magnético concentra o fluxo de modo tal que liga todas as voltas de ambas as

bobinas. No caso ideal, também desprezamos a resistência do fio. Vamos agora examinar as equações de acoplamento sob a condição de que o mesmo fluxo passe através de cada volta e, portanto,

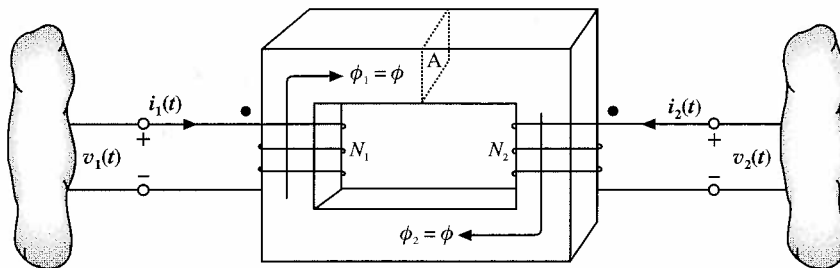
$$v_1(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

e

$$v_2(t) = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

e desse modo

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (13.24)$$



**Figura 13.15** Transformador empregando um núcleo magnético.

Outra relação pode ser desenvolvida para as correntes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  e o número de espiras em cada bobina. Para achar tal relação, será usada, da teoria de campos magnéticos, a lei de Ampère, que é escrita de forma matemática como

$$\oint H \cdot dl = i_{\text{incluída}} = N_1 i_1 + N_2 i_2 \quad (13.25)$$

onde  $H$  é a intensidade do campo magnético e a integral é calculada ao longo do caminho fechado que é percorrido pelo fluxo ao redor do núcleo do transformador. Para o caso em que o núcleo é feito de material com características ideais,  $\mu = \infty$ ,  $H = 0$ . Portanto,

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \quad (13.26)$$

ou

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} \quad (13.27)$$

Note que se dividirmos a Equação 13.26 por  $N_1$  e a multiplicarmos por  $v_1$ , obteremos

$$v_1 i_1 + \frac{N_2}{N_1} v_1 i_2 = 0$$

Entretanto, uma vez que  $v_1 = (N_1/N_2)v_2$ ,

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0$$

e dessa forma a potência total que flui para o equipamento é zero, o que significa que um transformador ideal é isento de perdas.

Portanto, para resumirmos a convenção do ponto para um transformador ideal,

$$v_1 = \frac{N_1}{N_2} v_2 \quad (13.28a)$$

onde ambas as tensões são positivas nos terminais indicados por pontos e

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \quad (13.28b)$$

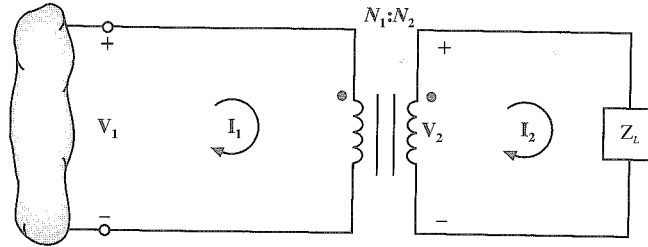
onde ambas as correntes entram nos terminais indicados por pontos.

Considere agora o circuito mostrado na Figura 13.16, onde o símbolo usado para o transformador indica que é um transformador de núcleo de ferro. Por causa da convenção de polaridade adotada, as tensões de fasores  $V_1$  e  $V_2$  são relacionadas pela expressão

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

e as correntes de fasores, da Equação 13.28b, estão relacionadas por

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$



**Figura 13.16** Circuito do transformador ideal usado para ilustrar a impedância de entrada.

O sinal na Equação 13.28b está invertido, uma vez que a direção de  $I_2$  está invertida. Essas duas equações acima podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{N_1}{N_2} V_2 \\ I_1 &= \frac{N_2}{N_1} I_2 \end{aligned} \quad (13.29)$$

Note também que

$$\begin{aligned} S_1 &= V_1 I_1^* = \left( \frac{N_1}{N_2} V_2 \right) \left( \frac{N_2}{N_1} I_2 \right)^* \\ &= V_2 I_2^* = S_2 \end{aligned}$$

A partir da figura, notamos que  $Z_L = V_2/I_2$  e, portanto, a impedância de entrada

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_L \quad (13.30)$$

Se definirmos agora a razão de espiras como

$$n = \frac{N_2}{N_1} \quad (13.31)$$

então as equações de definição para o transformador ideal são

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{V_2}{n} \\ I_1 &= n I_2 \\ S_1 &= S_2 \\ Z_1 &= \frac{Z_L}{n^2} \end{aligned} \quad (13.32)$$

As equações 13.32 são relações importantes para um transformador ideal. Deve-se tomar cuidado no uso de tais relações, porque os sinais das tensões e correntes dependem das referências designadas e como estão relacionadas aos pontos.

**Exemplo 13.11**

Desejamos determinar a impedância de entrada vista pela fonte no circuito da Figura 13.17, caso  $Z_L = 10 \angle 30^\circ \Omega$ .

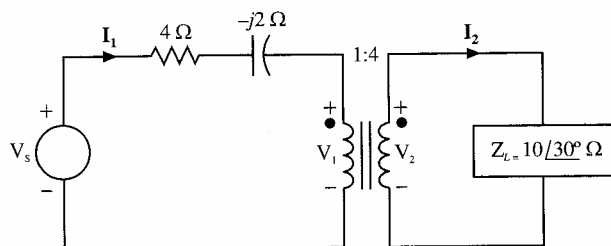
$$n = \frac{N_2}{N_1} = \frac{4}{1} = 4$$

e a impedância refletida é

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{10 \angle 30^\circ}{(4)^2} \\ &= 0,54 + j0,313 \Omega \end{aligned}$$

Portanto, a impedância de entrada vista pela fonte é

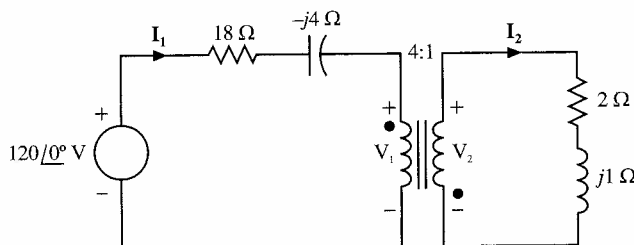
$$\begin{aligned} Z_i &= 4 - j2 + 0,54 + j0,313 \\ &= 4,54 - j1,69 \Omega \end{aligned}$$



**Figura 13.17** Circuito exemplo contendo um transformador ideal.

**Exemplo 13.12**

Dado o circuito mostrado na Figura 13.18, desejamos determinar todas as correntes e tensões indicadas.



**Figura 13.18** Circuito transformador ideal.

Por causa das relações matemáticas entre os pontos, correntes e tensões, as equações são

$$V_1 = -\frac{V_2}{n} \text{ e } I_1 = -nI_2$$

onde  $n = 1/4$ . A impedância refletida na entrada do transformador é

$$Z_1 = 16(2 + j1) = 32 + j16 \Omega$$

Portanto, a corrente na fonte é

$$I_1 = \frac{120 \angle 0^\circ}{18 - j4 + 32 + j16} = 2,23 \angle -13,5^\circ \text{ A}$$

A tensão sobre a entrada do transformador é então

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 Z_1 \\ &= (2,23 \angle -13,5^\circ)(32 + j16) \\ &= 83,50 \angle 13,07^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Dessa forma,  $V_2$  é

$$\begin{aligned} V_2 &= -nV_1 \\ &= -\frac{1}{4}(83,50/13,07^\circ) \\ &= 20,88/193,07^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

A corrente  $I_2$  é

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{I_1}{n} \\ &= -4(2,33/-13,5^\circ) \\ &= 9,32/166,50^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

### Exercícios

**E13.10** Calcule a corrente  $I_1$  na rede da Figura E13.10.

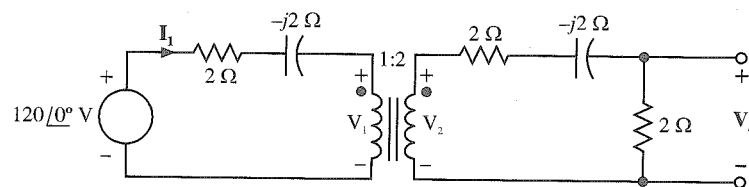


Figura E13.10

*Resp.:  $I_1 = 3,07 / 39,81^\circ \text{ A}$ .*

**E13.11** Determine  $V_o$  na rede da Figura E13.10.

*Resp.:  $V_o = 3,07 / 39,82^\circ \text{ V}$ .*

**E13.12** Na rede da Figura E13.12, a tensão  $V_o = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$ . Determine a tensão de entrada  $V_S$ .

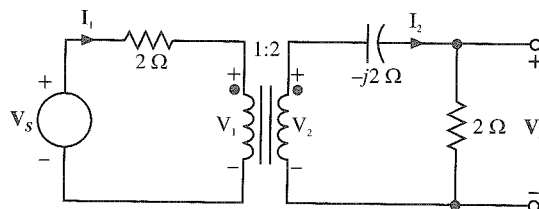


Figura E13.12

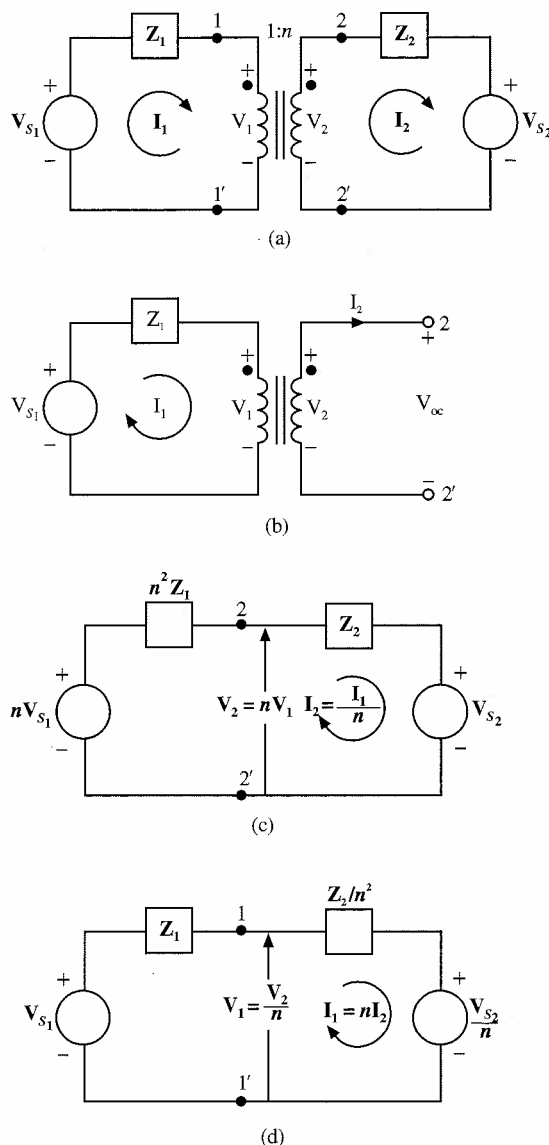
*Resp.:  $V_S = 25,5 / -11,31^\circ \text{ V}$ .*

Outra técnica para simplificação de análise de circuitos contendo um transformador ideal envolve o uso do teorema de Thévenin ou de Norton para obter um circuito equivalente que substitua o transformador e o circuito primário ou secundário. No entanto, tal técnica normalmente exige um esforço maior do que o método apresentado até agora. Vamos demonstrar o método que usa o teorema de Thévenin para derivar um circuito equivalente para o transformador e o circuito primário da rede mostrada na Figura 13.19a. As equações para o transformador em vista da direção das correntes, tensões e a posição dos pontos são

$$\begin{aligned} I_1 &= nI_2 \\ V_1 &= \frac{V_2}{n} \end{aligned}$$

Formando-se um equivalente de Thévenin nos terminais secundários 2-2', como mostrado na Figura 13.19b, notamos que  $I_2 = 0$  e, portanto, da Equação 13.32  $I_1 = 0$ . Desse modo

$$V_{oc} = V_2 = nV_1 = nV_{s1}$$



**Figura 13.19** Circuito contendo um transformador ideal e algumas de suas redes equivalentes.

A impedância equivalente de Thévenin obtida a partir dos terminais do circuito aberto com  $V_S$  substituído por um curto-circuito é  $Z_1$ , que quando refletido no secundário pela razão de espiras é

$$Z_{Th} = n^2 Z_1$$

Portanto, um dos circuitos equivalentes resultantes para a rede da Figura 13.19a é como mostrado na Figura 13.19c. De forma semelhante, podemos mostrar que substituindo o transformador e seu circuito secundário por um circuito equivalente resulta na rede mostrada na Figura 13.19d.

Pode-se mostrar em geral que, ao desenvolver um circuito equivalente para o transformador e seu circuito primário, cada tensão primária é multiplicada por  $n$ , cada corrente primária é dividida por  $n$ , e cada impedância primária é multiplicada por  $n^2$ . Similarmente, ao desenvolver um circuito equivalente para o transformador e seu circuito secundário, cada tensão secundária é dividida por  $n$ , cada corrente secundária é multiplicada por  $n$ , e cada impedância secundária é dividida por  $n^2$ . As potências são as mesmas, não interessa se calculadas no lado primário ou no lado secundário.

O leitor deve se lembrar da nossa análise anterior que, se um dos pontos no transformador for invertido, então  $n$  é substituído por  $-n$  nos circuitos equivalentes. Além disso, deve ser notado que o desenvolvimento desses circuitos equivalentes é baseado no pressuposto de que a remoção do transformador dividirá a rede em duas partes; isto é, não existem conexões entre o primário e o secundário além do transformador.

Se existir alguma conexão externa, a técnica de circuito equivalente não pode normalmente ser usada. Finalmente, deve ser ressaltado que se os circuitos primário e secundário são mais complicados do que aqueles mostrados na Figura 13.19a, o teorema de Thévenin pode ser aplicado para reduzir a rede àquela mostrada na Figura 13.19a. Podemos também simplesmente refletir componente por componente, de um circuito complicado do primário para o secundário e vice-versa.

### Exemplo 13.13

Dado o circuito da Figura 13.20a, desejamos desenhar as duas redes obtidas pela substituição do transformador, o primário e o secundário, por circuitos equivalentes.

Devido ao relacionamento entre as correntes e tensões arbitradas e a posição dos pontos, as redes contendo os circuitos equivalentes para o primário e o secundário são mostradas na Figura 13.20b e c, respectivamente. O leitor deve ter o cuidado de notar a polaridade das fontes de tensão nas redes equivalentes. ■

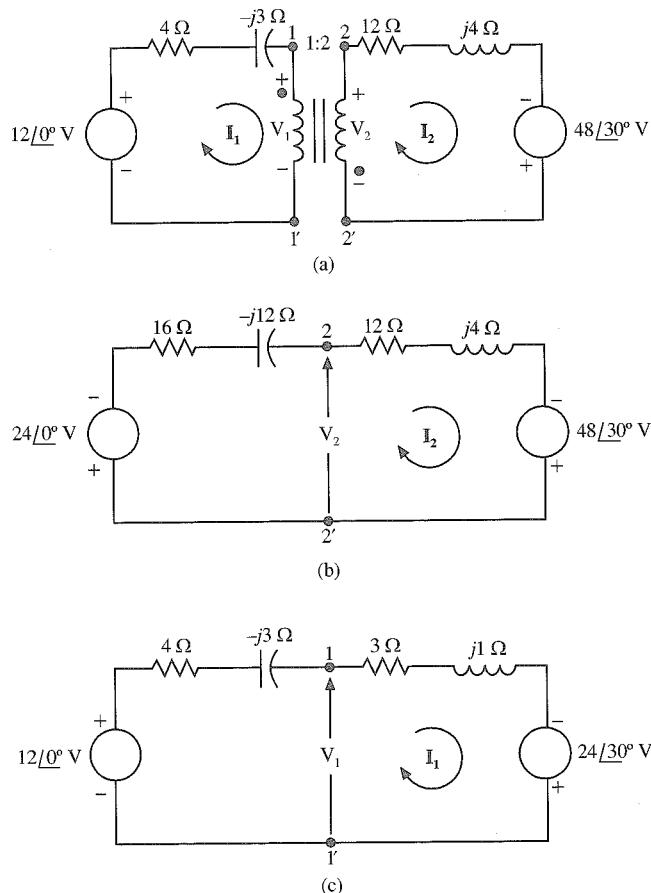


Figura 13.20 Circuito do Exemplo 13.13 e dois circuitos equivalentes.

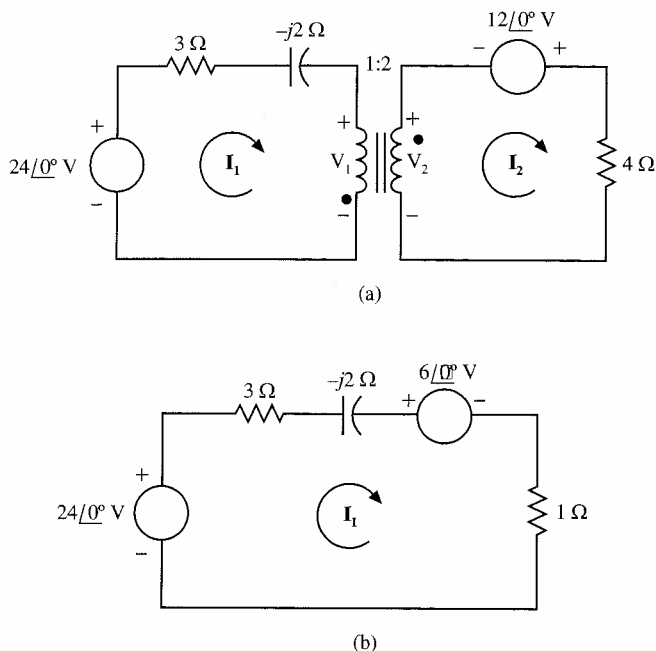
### Exemplo 13.14

Desejamos derivar a rede equivalente para o circuito da Figura 13.21a e usá-la para determinar a corrente I<sub>1</sub>.

A Figura 13.21b mostra a rede contendo um circuito equivalente para o transformador e o secundário, dadas as correntes e tensões arbitradas e a posição dos pontos. A corrente I<sub>1</sub> é portanto

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{24\angle 0^\circ - 6\angle 0^\circ}{3 - j2 + 1} \\
 &= \frac{18\angle 0^\circ}{4 - j2} \\
 &= 4,02 \angle 26,57^\circ \text{ A}
 \end{aligned}$$





**Figura 13.21** Exemplo de circuito contendo um transformador ideal e um circuito equivalente.

### Exemplo 13.15

Vamos determinar a tensão de saída  $V_o$  no circuito da Figura 13.22a.

Começamos formando um equivalente de Thévenin para o circuito primário. Da Figura 13.22b podemos mostrar que a tensão do circuito aberto é

$$\begin{aligned} V_{oc} &= \frac{24 \angle 0^\circ}{4 - j4} (-j4) - 4 \angle -90^\circ \\ &= 12 - j8 = 14,42 \angle -33,69^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

A impedância equivalente de Thévenin vista a partir dos terminais do circuito aberto com as fontes de tensão curto-circuitadas é

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= \frac{(4)(-j4)}{4 - j4} + 2 \\ &= 4 - j2 \Omega \end{aligned}$$

O circuito da Figura 13.22a se reduz então ao mostrado na Figura 13.22c. Formando um circuito equivalente para o transformador e primário resulta na rede mostrada na Figura 13.22d. Portanto, a tensão  $V_o$  é

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{-28,84 \angle -33,69^\circ}{20 - j5} (2) \\ &= 2,80 \angle +160,35^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

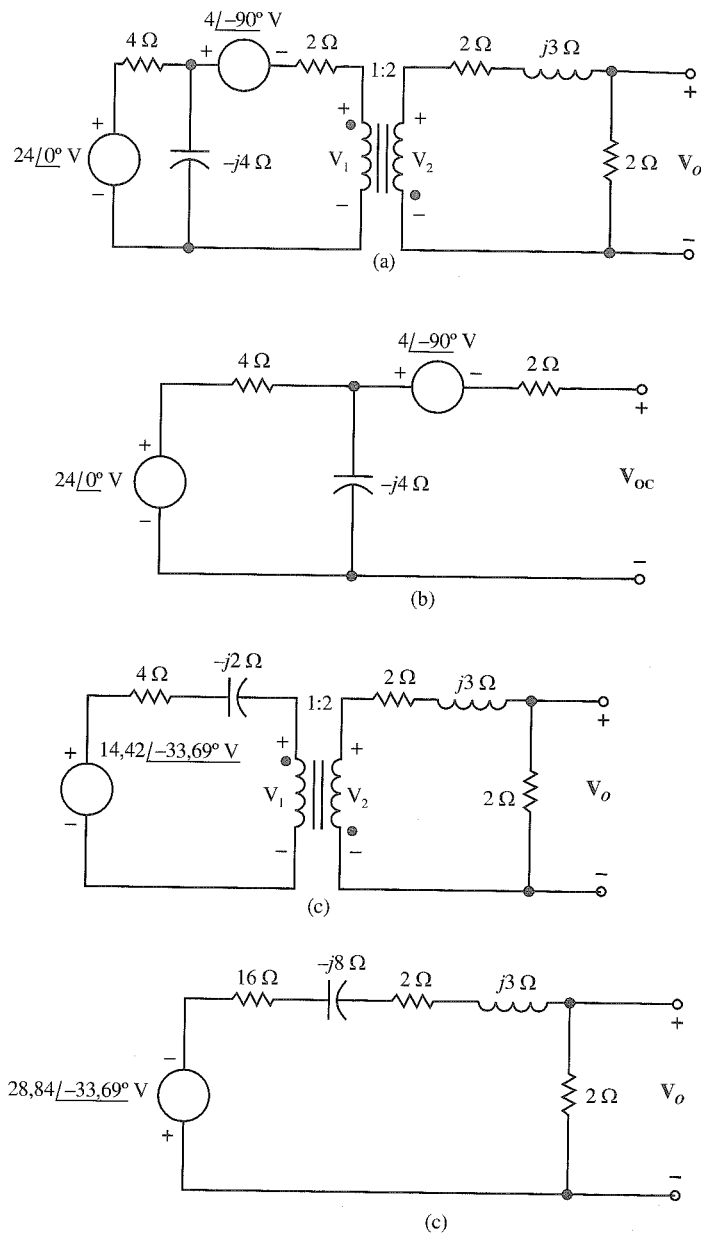


Figura 13.22 Exemplo de rede e outros circuitos usados para derivar uma rede equivalente.

### Exercícios

E13.13 Dada a rede da Figura E13.13, forme um circuito equivalente para o transformador e o secundário, e use a rede resultante para calcular  $I_1$ .

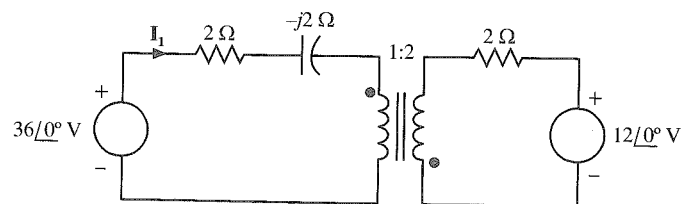
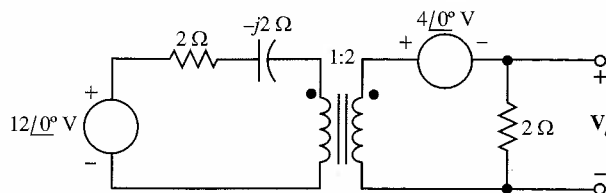


Figura E13.13

Resp.:  $I_1 = 13,12 \angle 38,66^\circ$  A.

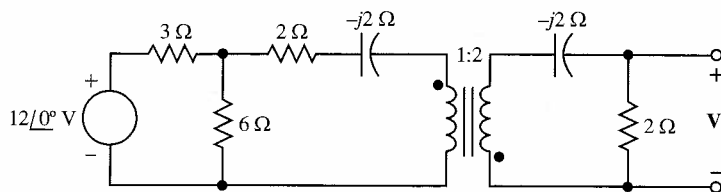
**E13.14** Dada a rede da Figura E13.14, forme um circuito equivalente para o transformador e o primário, e use a rede resultante para determinar  $V_o$ .



**Figura E13.14**

**Resp.:**  $V_o = 3,12 \angle 38,66^\circ \text{ V}$ .

**E13.1** Determine  $V_o$  na rede da Figura E13.15.



**Figura E13.15**

**Resp.:**  $V_o = 4,66 \angle 29,05^\circ \text{ V}$ .

Para finalizar, considere o exemplo a seguir.

### Exemplo 13.16

Dado o circuito da Figura 13.23a, desejamos achar o valor da carga  $R_o$  para uma transferência máxima de potência e o valor da máxima potência fornecida a essa carga.

Para determinar o valor de  $R_o$  que resulte em uma transferência máxima de potência, formaremos um equivalente de Thévenin visto dos terminais de  $R_o$ . A tensão do circuito aberto é derivada da Figura 13.23b como segue. A resistência do secundário refletida no primário é  $16 \Omega$  e portanto

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{48 \angle 0^\circ}{6 + 2 + 16} \\ &= 2 \angle 0^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V_1 &= (2 \angle 0^\circ)(16) \\ &= 32 \angle 0^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

e pela relação de espiras

$$\begin{aligned} I_2 &= 4 \angle 0^\circ \text{ A} \\ V_2 &= 16 \angle 0^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Agora

$$V_{oc} = V_a + V_T + V_b = V_a + V_1 - V_2 + V_b = 24 \angle 0^\circ \text{ V}$$

A corrente de curto-circuito é obtida da Figura 13.23c. As equações para essa rede são

$$\begin{aligned}
 48\angle 0^\circ &= 6I_1 + 2(I_1 - I_{sc}) + V_1 \\
 48\angle 0^\circ &= 6I_1 + 3[2(I_1 - I_{sc}) + I_{sc}] \\
 V_2 &= (1)[2(I_1 - I_{sc})] + 3[2(I_1 - I_{sc}) + I_{sc}] \\
 V_1 &= 2V_2
 \end{aligned}$$

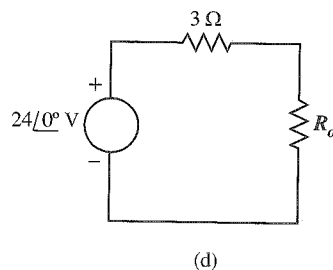
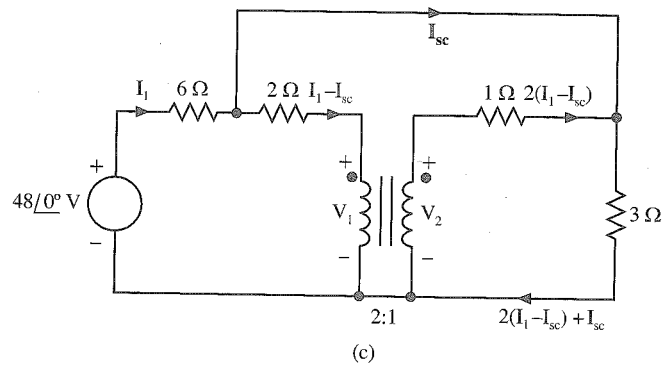
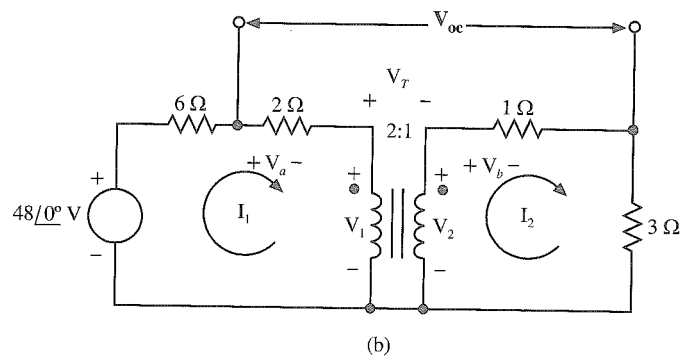
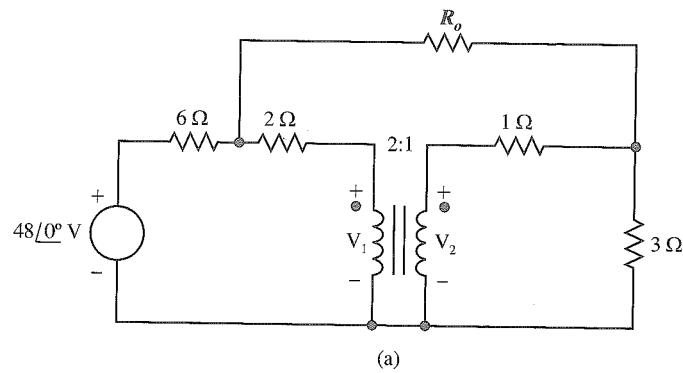


Figura 13.23 Exemplo de transferência máxima de potência envolvendo um transformador ideal.

Essas equações se reduzem a

$$48 \angle 0^\circ = 12\mathbf{I}_1 - 3\mathbf{I}_{sc}$$

$$48 \angle 0^\circ = 24\mathbf{I}_1 - 12\mathbf{I}_{sc}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_{sc} \end{bmatrix} &= \frac{-1}{72} \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ -24 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \angle 0^\circ \\ 48 \angle 0^\circ \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{72} \begin{bmatrix} (-9) & 48 \angle 0^\circ \\ (-12) & 48 \angle 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,55 \angle 0^\circ \text{ A} \\ 8 \angle 0^\circ \text{ A} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{24 \angle 0^\circ}{8 \angle 0^\circ} = 3 \Omega$$

Logo, o circuito equivalente é mostrado na Figura 13.23d, e  $R_o = 3 \Omega$  para transferência máxima de potência. A potência máxima fornecida a  $R_o$  é

$$P_{max} = \left[ \frac{24}{2(3)} \right]^2 (3) = 48 \text{ W}$$

■

### 13.6 Análise Usando PSPICE de Circuitos com Transformadores Ideais

O programa de análise de circuitos PSPICE é uma ferramenta útil para resolver circuitos com transformadores ideais. Para tirar proveito do potencial do PSPICE, devemos modelar o transformador ideal em termos dos elementos do circuito que introduzimos até agora. As equações matemáticas que comandam a operação do transformador ideal mostrado na Figura 13.24a são

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{n} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{1}{n} \mathbf{I}_1$$

Note que tanto a equação de tensão quanto a de corrente estão relacionadas. Portanto, as equações podem ser modeladas como mostrado na Figura 13.24b, e o programa PSPICE para esse modelo é

|    |   |   |    |   |               |
|----|---|---|----|---|---------------|
| E1 | 1 | 2 | 3  | 0 | $\frac{1}{n}$ |
| VT | 2 | 0 | 0  |   |               |
| F1 | 0 | 3 | VT |   | $\frac{1}{n}$ |

onde VT é uma fonte de teste fictícia usada apenas para medir  $\mathbf{I}_1$ . Se um dos pontos estiver invertido, então o termo  $1/n$  no programa PSPICE deveria ter um sinal negativo. Além disso, lembre-se que em uma análise PSPICE deve existir um caminho dc de todo nó para o terra do circuito. Logo, em alguns casos pode ser necessário inserir um resistor muito grande (por exemplo,  $10 \text{ M}\Omega$ ) entre os terminais da fonte de corrente, ou seja, do nó ③ para o nó ① a fim de estabelecer tal caminho sem afetar os resultados da análise.

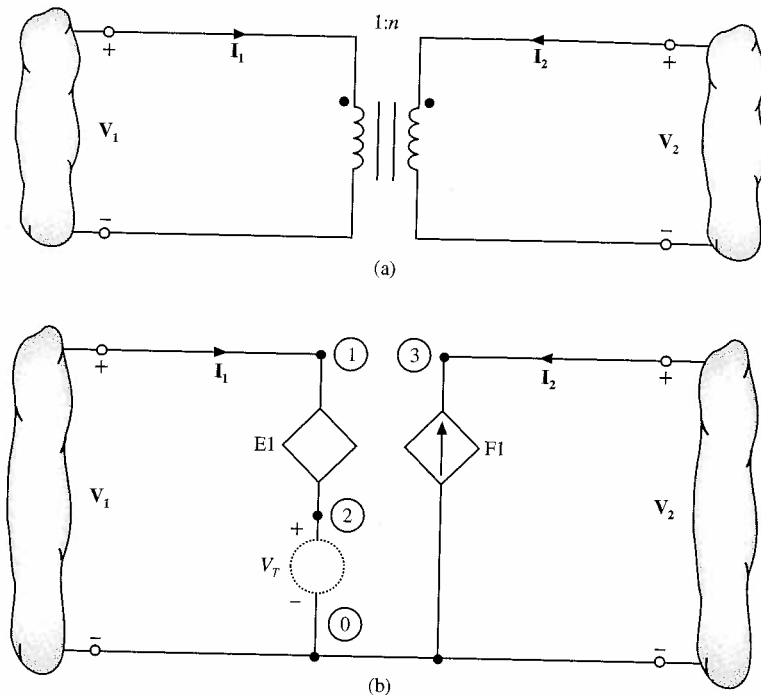


Figura 13.24 (a) Transformador ideal; (b) modelo PSPICE.

### Exemplo 13.17

Vamos resolver os exercícios E13.10 e E13.11 usando PSPICE.

Empregando o modelo para o transformador ideal, a rede da Figura E13.10 está pronta para uma análise PSPICE como mostrado na Figura 13.25, onde, mais uma vez, por conveniência, assumimos que  $f = 1/2\pi$  Hz. O programa PSPICE e os resultados de saída são mostrados a seguir.

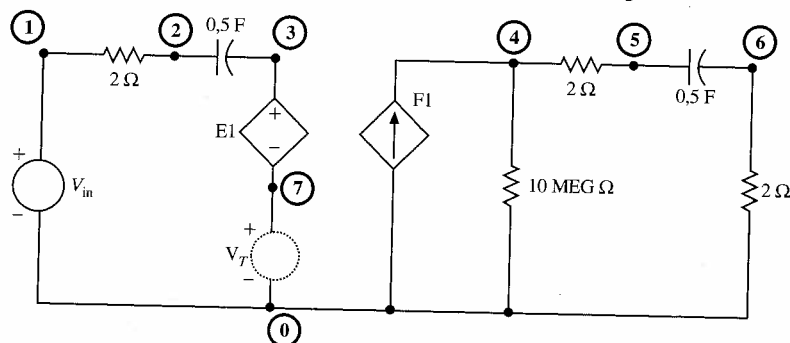


Figura 13.25 Rede usada no Exemplo 13.17.

```
DRILL EXERCISES D13.10 AND D13.11 USING
*DEPENDENT SOURCES.
```

```
VIN 1 0 AC 12
```

```
R1 1 2 2
```

```
C1 2 3 0.5
```

```
E1 3 7 4 0 0.5
```

```
VTEST 7 0 0
```

```
F1 0 4 VTEST 0.5
```

```
* Add this to create a DC path to ground.
```

```
* Pspice will generate an error if there
```

```
* is not a DC path to ground from every node.
```

```
RDCPATH 4 0 10MEG
```

```
R2 4 5 2
```

```

C2 5 6 0.5
R3 6 0 2
* F=1/2PI
.AC LIN 1 0.159155 0.159155
.PRINT AC VM(6) VP(6) IM(VTEST) IP(VTEST)
.END

AC ANALYSIS RESULTS
      FREQ      VM(6)      VP(6)      IM(VTEST)      IP(VTEST)
1.592E-01      3.073E+00      3.981E+01      3.073E+00      3.981E+01

```

### Exercício

**E13.16** Resolva o problema apresentado no Exemplo 13.15 usando o PSPICE.

*Resp.:* Veja o Exemplo 13.15.

## 13.7 Autotransformadores Ideais

Os dois transformadores que apresentamos até agora fornecem isolamento elétrico entre os enrolamentos primários e secundários como mostrado na Figura 13.26a. É possível, porém, interconectar os enrolamentos primário e secundário serialmente, criando um componente de três terminais, como mostrado na Figura 13.26b e representado na Figura 13.26c. Como veremos mais adiante, tal arranjo oferece vantagens práticas sobre o caso eletricamente isolado. Note que o arranjo dos três terminais é essencialmente um enrolamento contínuo com um ponto interno chamado de derivação<sup>1</sup> (terminal Y). Tal equipamento é chamado de “autotransformador”.

O ponto em que é tomado o *tap* pode ser ajustado para fornecer uma tensão variável na saída. O autotransformador pode ser usado em qualquer aplicação que exija um transformador normal, desde que o isolamento elétrico não seja necessário. (Por exemplo, em um ambiente de laboratório.)

Vamos examinar a conexão redutora de tensão do autotransformador na Figura 13.27a. A partir da ação do transformador

$$\frac{V_{XY}}{V_{YZ}} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{e} \quad N_1 I_1 = N_2 I_{ZY}$$

Usando a LKT, temos

$$V_2 = V_{YZ}$$

$$V_1 = V_{XY} + V_{YZ} = \left( \frac{N_1}{N_2} + 1 \right) V_2$$

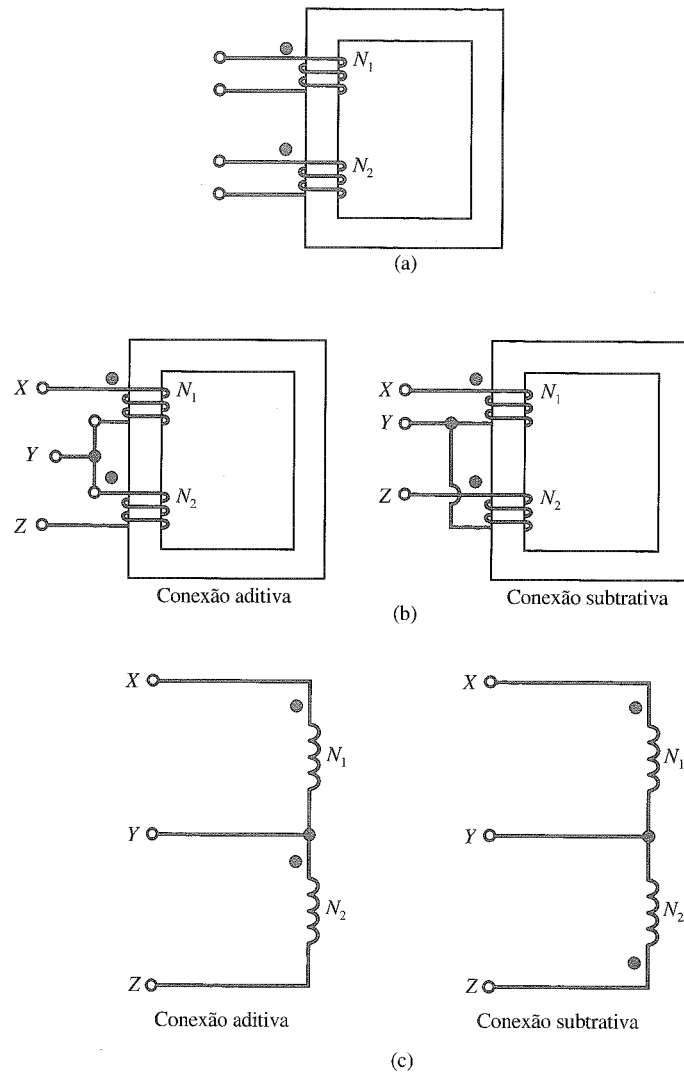
e

$$I_2 = I_1 + I_{ZY} = \left( 1 + \frac{N_1}{N_2} \right) I_1$$

Então

$$\frac{V_{XY} I_1}{V_2 I_2} = \frac{\left( \frac{N_1}{N_2} V_2 \right) \left( \frac{N_2}{N_1 + N_2} I_2 \right)}{V_2 I_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \quad (13.33)$$

<sup>1</sup> N.T.: No inglês, a palavra usada é *tap*. Devido ao seu uso difundido, manteremos o termo *tap* no restante do livro. Assim, um enrolamento com derivação central será chamado de enrolamento com *tap* central.

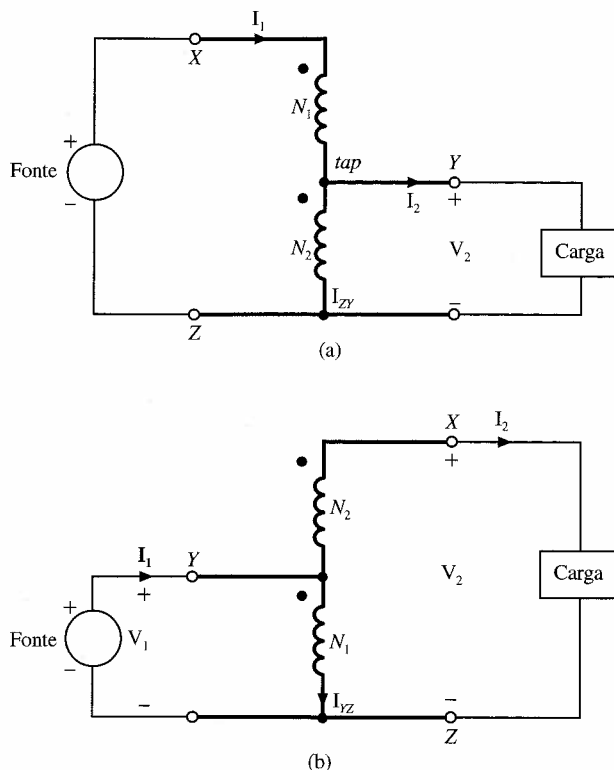


**Figura 13.26** Autotransformador: (a) transformador normal de dois enrolamentos com enrolamentos adjacentes; (b) transformador de dois enrolamentos interconectados para criar um único enrolamento, autotransformador de três terminais; (c) representação simbólica de (b).

Qual é o significado de tal expressão? Sabemos que a taxa de potência do enrolamento  $N_1$  deve ser a mesma que a taxa de enrolamento  $N_2$ . No entanto, a Equação 13.33 ilustra que a taxa de potência do enrolamento  $N_1$  (ou seja, a taxa de potência do transformador) é somente uma fração  $[N_1/(N_1 + N_2)]$  da potência que é necessária para a carga.

Os exemplos a seguir ilustram tal ponto.





**Figura 13.27** Circuitos autotransformadores: (a) conexão redutora de tensão; (b) conexão elevadora de tensão.

### Exemplo 13.18

Um transformador 5 kVA 220 V/110 V será conectado a uma carga de 110 V que deverá ser alimentada a partir de uma fonte de 330 V.

(a) Desenhe o diagrama apropriado para o circuito.

(b) Determine a carga máxima que pode ser alimentada sem sobrecarga do transformador.

(a) O circuito da Figura 13.27a será apropriado se o indutor “ $N_1$ ” for o enrolamento de 220 V, e o indutor “ $N_2$ ” for o enrolamento de 110 V.

(b) Uma vez que  $N_1/N_2 = 220/110$ ,  $N_1 = 2N_2$  e

$$\frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{2N_2}{2N_2 + N_2} = \frac{2}{3}$$

Portanto

$$\frac{V_{XY} I_1}{V_2 I_2} = \frac{5 \text{ kVA}}{S_2} = \frac{2}{3}$$

e

$$S_2 = \frac{3}{2} (S) = 7,5 \text{ kVA}$$

ou a carga alimentada pode ser 1,0 e 1,5 vez a taxa de potência do transformador. ■

### Exemplo 13.19

O transformador no Exemplo 13.18 deve alimentar uma carga de 330 V a partir de uma fonte de 220 V.

(a) Desenhe o diagrama apropriado para o circuito.

(b) Calcule todas as correntes caso cada enrolamento opere nas condições nominais.

(c) Calcule a potência aparente da carga.

- (a) O diagrama apropriado para o circuito é mostrado na Figura 13.27b, com o enrolamento de 220 V rotulado como " $N_1$ " e o enrolamento de 110 V rotulado como " $N_2$ ".
- (b)  $I_{YZ} = 5.000/220 = 22,73$  A e  $I_2 = 5.000/110 = 45,45$  A, e portanto  $I_1 = I_{YZ} + I_2 = 68,18$  A. Note: a esta altura pode não estar claro o porquê de termos ignorado a natureza complexa das correntes e tensões, somando-as. O Exemplo 13.20 vai analisar esse assunto.
- (c)  $S_2 = V_2 I_2 = 15$  kVA. Note que esse valor é três vezes a razão de espiras! ■

### Exemplo 13.20

Sob as condições descritas no Exemplo 13.19, vamos determinar todas as tensões fasoriais e correntes, caso  $V_2 = 330 \angle 0^\circ$  V e o fator de potência da carga seja 0,8 em atraso.

Suponhamos que  $V_1 = 220 \angle \alpha$ . Então  $V_{XY} = (110/220)220 \angle \alpha = 110 \angle \alpha$  V. Agora  $V_2 = V_1 + V_{XY} = 220 \angle \alpha + 110 \angle \alpha = 330 \angle \alpha$  V. Entretanto, uma vez que  $V_2 = 330 \angle 0^\circ$  V,  $\alpha = 0^\circ$ . Já que o fator de potência da carga está em atraso,  $\theta_2 = -\cos^{-1}(0,8) = -36,9^\circ$ , e portanto  $I_2 = 45,45 \angle -36,9^\circ$  A. Também,  $I_{YZ} = (N_2/N_1) I_2 = (110/220)(45,45 \angle -36,9^\circ) = 22,72 \angle -36,9^\circ$  A. Desse modo,  $I_1 = I_2 + I_{YZ} = 45,45 \angle -36,9^\circ + 22,72 \angle -36,9^\circ = 68,18 \angle -36,9^\circ$  A. A análise indica que resultados semelhantes foram alcançados para qualquer ângulo  $\alpha$  ou fator de potência; isto é,  $V_1$ ,  $V_{XY}$  e  $V_2$  em geral estão em fase, assim como  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_{YZ}$ . ■

Os exemplos ilustraram que transformadores de dois enrolamentos são capazes de fornecer mais potência quando conectados como autotransformadores. No transformador de dois enrolamentos, a potência é transferida apenas indutivamente, enquanto em um autotransformador a potência é transferida tanto indutiva quanto condutivamente.

### Exercício

**E13.17** Seja um transformador 120/12 V de dois enrolamentos. Que tensões podem ser obtidas na saída se o transformador está conectado como um autotransformador com uma entrada de  $120 \angle 0^\circ$  V?

**Resp.:**  $132 \angle 0^\circ$  V e  $108 \angle 0^\circ$  V.

## 13.8 Transformadores Trifásicos

Os transformadores têm um papel importante na transmissão de potência ac trifásica. Eles são usados para elevar a tensão da estação geradora para a rede de transmissão de alta-tensão e para abaixar a tensão da rede de transmissão para as cargas. A transformação trifásica pode ser conseguida usando-se um banco de transformadores monofásicos ou um transformador trifásico. Se um banco de transformadores monofásicos for usado, é importante assegurar que todos os transformadores tenham características semelhantes, para que o equilíbrio do sistema seja mantido.

Existem quatro maneiras equilibradas em que o transformador trifásico pode ser conectado: Y-Y, delta-delta, Y-delta e delta-Y, como mostrado na Figura 13.28. Normalmente, "delta" é simbolizado como " $\Delta$ ".

Os enrolamentos primários de transformadores são normalmente conectados em delta. A razão para se usar essa configuração é que ela permite que o terceiro harmônico, que normalmente existe na corrente primária, circule no laço que inclui o enrolamento primário contudo sem induzir tensões no enrolamento secundário.

A configuração delta-delta tem uma propriedade singular. Se um dos transformadores for removido por qualquer razão (por exemplo, manutenção ou reparo), os outros dois transformadores, que agora formam um delta aberto, ainda podem fornecer tensões trifásicas equilibradas para carga reduzida.

Sempre que um secundário está conectado em Y e a linha neutra é usada, ambas as cargas monofásica (fase-neutro) e trifásica (fase-fase) podem ser alimentadas.

Em configurações Y-Y e delta-delta, as tensões e correntes de linha diferem pela relação de espiras  $n$ . Nas configurações Y-delta e delta-Y, aparece um fator adicional de  $\sqrt{3}$ .

$$V_{LHV} = \left( \frac{12.000}{208} \right) (210,1) \\ = 12,12 \text{ kV}$$

De modo semelhante,

$$I_{LHV} = \left( \frac{208}{12.000} \right) (288,7) \\ = 5,004 \text{ A}$$

É interessante notar que a relação de espiras por fase é  $(12.000/)/208$ . No entanto, a tensão de fase no lado de alta-tensão do transformador é fase-neutro por causa da conexão Y. Logo, se a tensão de linha for determinada usando-se a relação de espiras por fase, obteremos

$$V_{LHV} = \sqrt{3} \left( \frac{12.000 / \sqrt{3}}{208} \right) V_{LLV}$$

e o fator  $\sqrt{3}$  é cancelado. Considerações semelhantes afetam a corrente. ■

### Exercício

**E13.18** As especificações de um transformador trifásico em equilíbrio são 1.000 MVA 25 kVΔ: 500 kVY. A carga trifásica em equilíbrio conectada aos terminais de alta-tensão do transformador consome 750 MW, com um 0,8 fp em atraso, a 500 kV. Determine a magnitude das correntes de linha na fonte e na carga.

**Resp.:**  $I_S = 21,65 \text{ kA}$ ,  $I_L = 1.083 \text{ A}$ .

## 13.9 Considerações sobre Segurança

Transistores são amplamente usados nos equipamentos eletrônicos atuais com componentes de fontes de baixa tensão. Por exemplo, em sistemas computacionais, um nível comum de tensão é 5 V dc, rádios portáteis usam 9 V dc, e equipamento militar e de aviação operam a 28 V dc. Quando transformadores são usados para conectar tais circuitos à linha de alimentação, o perigo de choque é reduzido porque as bobinas do transformador são isoladas eletricamente. No entanto, do ponto de vista de segurança, um transformador, embora muito útil em várias situações, não é uma solução absoluta. Devemos estar constantemente alertas ao trabalhar com qualquer equipamento elétrico para minimizar os riscos de choques elétricos.

Em equipamentos eletrônicos de potência ou sistemas de potência, o risco é altíssimo. O problema nesses casos é que uma fonte de baixa impedância pode produzir uma alta-tensão na saída e, além disso, devemos nos lembrar constantemente que a tensão de linha em nossas residências pode ser fatal.

Considere agora o seguinte exemplo que ilustra um perigo sutil que poderia surpreender mesmo um profissional experiente da área, com consequências devastadoras.

### Exemplo 13.22

Duas casas adjacentes, A e B, são alimentadas a partir de transformadores diferentes, como mostrado na Figura 13.30a. Um problema na linha de alimentação da casa B leva o disjuntor X-Y a atuar, abrindo o circuito. A casa B está agora sem energia elétrica. Em uma tentativa de ajudar o vizinho, o residente da casa A se oferece para conectar uma extensão entre uma tomada na parede da casa A e outra tomada da parede da casa B, como mostrado na Figura 13.30b. Mais tarde, o técnico de manutenção da companhia de energia vem armar o disjuntor. Sem saber da existência da extensão irregular, tal pessoa desconhece que existe tensão entre os pontos X e Z. De fato, por causa da conexão entre as duas casas, existe 7.200 V entre os dois pontos, e tal pessoa poderia ser seriamente ferida, ou até mesmo morrer, se entrasse em contato com essa alta-tensão. ■

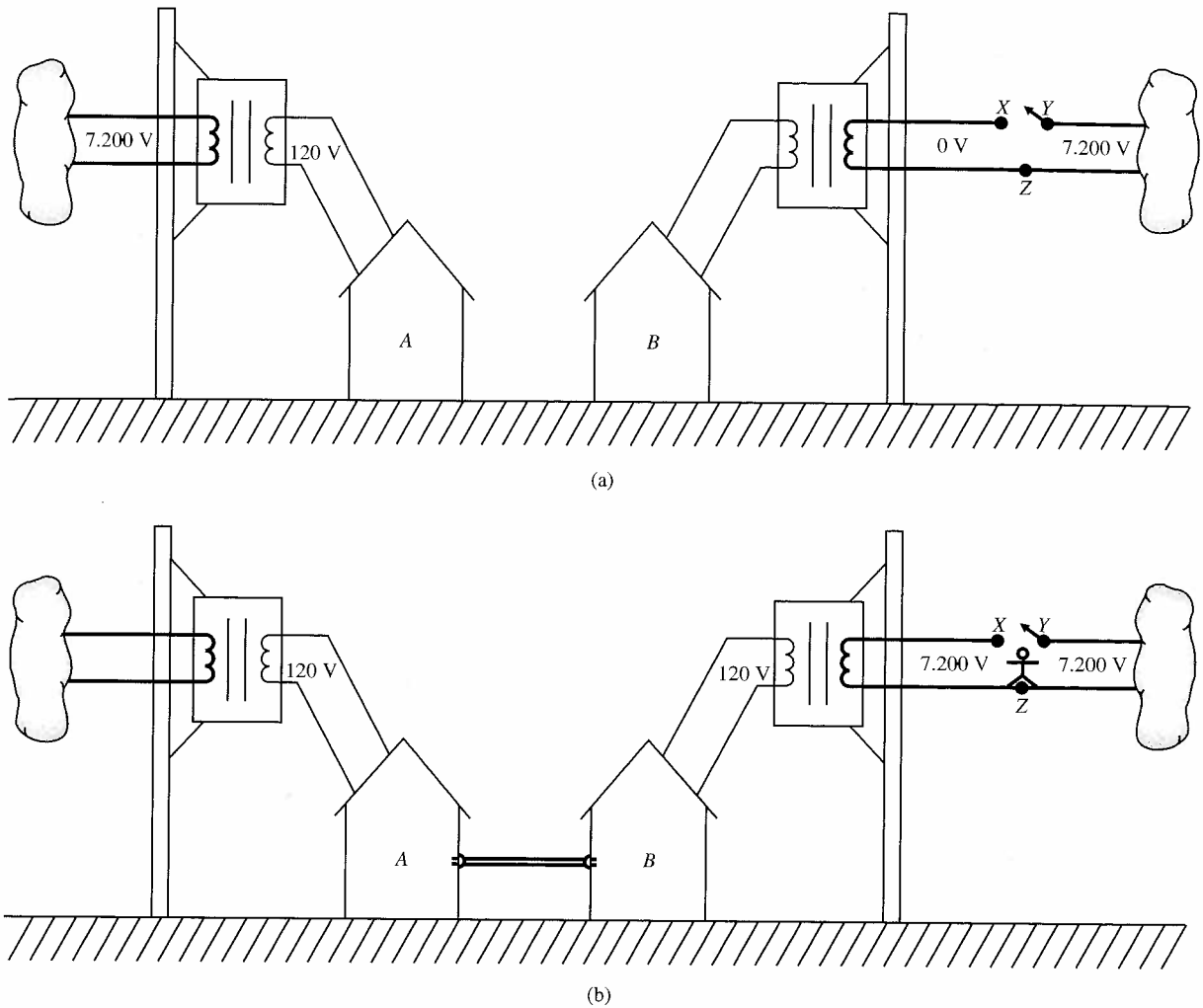


Figura 13.30 Diagramas usados no Exemplo 13.22.

### 13.10 Resumo

Circuitos magnéticos acoplados foram apresentados, e as equações de circuito que descrevem tais elementos foram discutidas. Indutância mútua foi definida, e uma convenção de ponto foi adotada para indicar a polaridade das bobinas, a fim de simplificar a convenção de sinal para os termos mútuos nas equações do circuito. Uma análise de energia para bobinas mutuamente acopladas foi realizada, o que nos conduziu a uma definição do coeficiente de acoplamento entre bobinas.

O transformador linear em que nenhum material magnético é usado para acoplar as bobinas foi discutido. Foram descritas então as bobinas com bom material magnético e apresentadas como um transformador ideal. Finalmente, o teorema de Thévenin foi empregado para derivar circuitos equivalentes para o transformador e seu circuito primário ou secundário visando simplificar a análise de circuitos contendo transformadores ideais.

O programa de análise de circuitos PSPICE foi usado para analisar circuitos contendo indutância mútua e transformadores ideais.

Autotransformadores e transformadores trifásicos também foram apresentados. Finalmente, algumas considerações sobre segurança foram discutidas.

13.8 Determine  $V_o$  na rede da Figura P13.8.

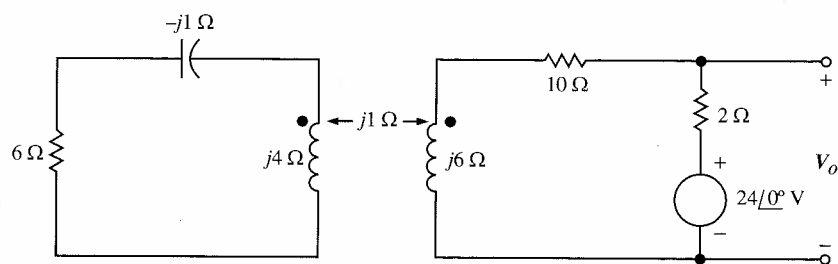


Figura P13.8

13.9 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P13.9.

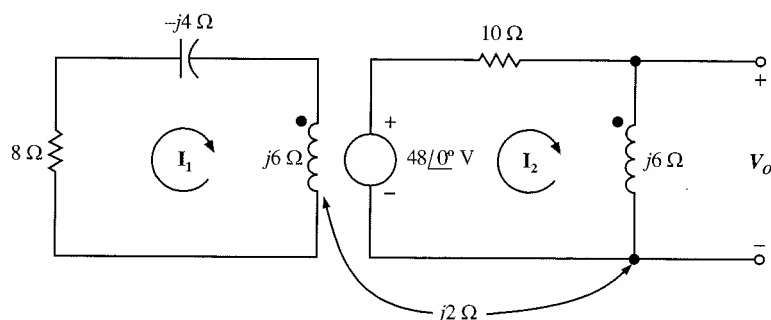


Figura P13.9

13.10 Determine  $V_o$  na rede da Figura P13.10.

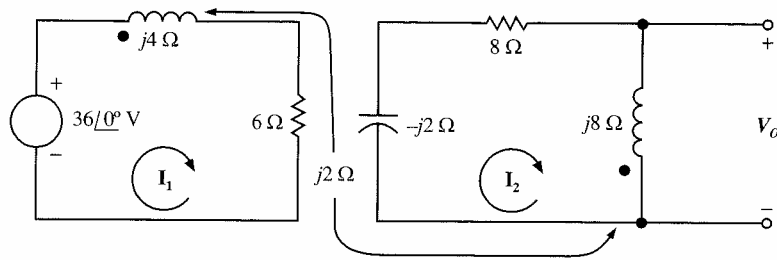


Figura P13.10

13.11 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P13.11.

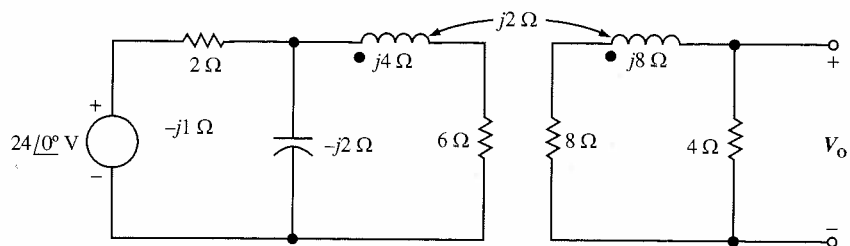


Figura P13.11

13.12 Determine  $V_o$  na rede da Figura P13.12.

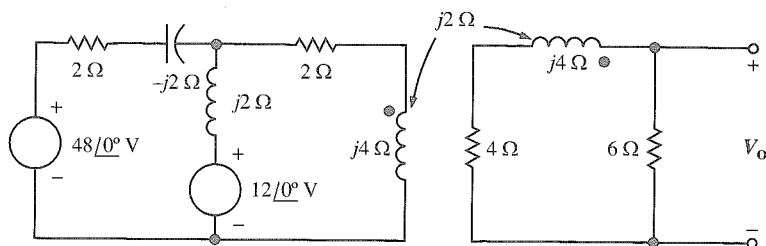


Figura P13.12

13.13 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P13.13.

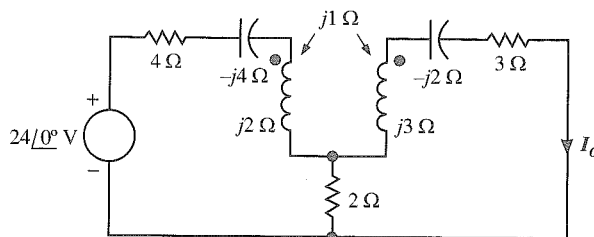


Figura P13.13

13.14 As correntes na rede mostrada na Figura P13.14 são

$$i_1(t) = 16 \cos(377t - 45^\circ) \text{ mA}$$

$$i_2(t) = 3 \cos(377t - 45^\circ) \text{ mA}$$

Se os valores de indutância são  $L_1 = 2 \text{ H}$ ,  $L_2 = 8 \text{ H}$  e  $M = 3 \text{ H}$ , determine as tensões  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ .

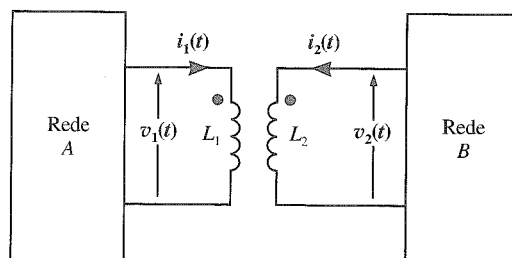


Figura P13.14

13.15 Determine a energia armazenada nos indutores acoplados no Problema 13.14 no instante  $t = 3 \text{ ms}$ .

13.16 Dada a rede mostrada na Figura P13.16, determine o valor do capacitor  $C$  que fará com que a impedância refletida para o primário seja puramente resistiva.

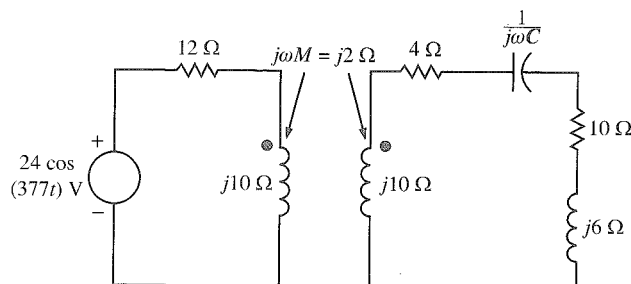


Figura P13.16

- 13.17** Analise a rede da Figura P13.17 e determine se pode ser encontrado algum valor de  $X_C$  tal que a tensão de saída seja igual a duas vezes a tensão de entrada.

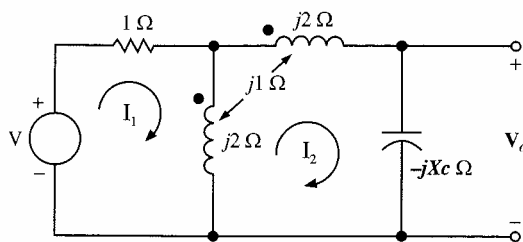


Figura P13.17

- 13.18** Determine a impedância de entrada da rede na Figura P13.18.

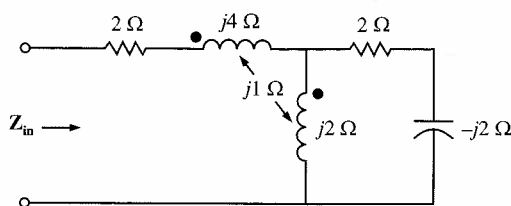


Figura P13.18

- 13.19** Escreva um programa PSPICE para calcular  $V_o$  da rede mostrada na Figura P13.19, onde  $f = 1/2\pi$  Hz.

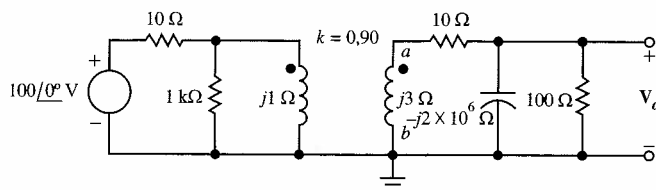


Figura P13.19

- 13.20** Repita o Problema 13.19 com o ponto mudado da posição  $a$  para a posição  $b$ .  
**13.21** Use o programa PSPICE para determinar  $V_o$  na rede na Figura P13.21. A frequência da fonte é 60 Hz.

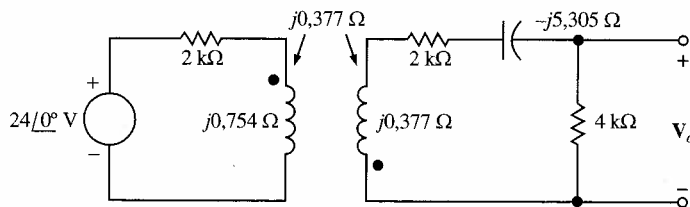


Figura P13.21

- 13.22** Use PSPICE para determinar  $V_o$  na rede na Figura P13.22. A frequência da fonte é 60 Hz.

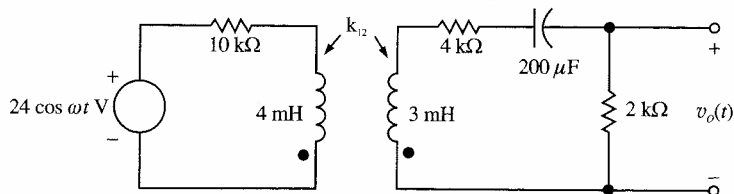


Figura P13.22

13.23 Dada a rede na Figura P13.23, determine as correntes  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  e  $i_o(t)$  usando PSPICE.

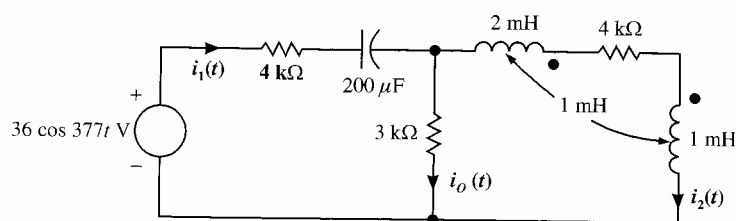


Figura P13.23

13.24 Repita o Problema 13.23, caso a frequência da fonte seja 400 Hz.

13.25 Use PSPICE para determinar  $v_o(t)$  na rede na Figura P13.25. A frequência da fonte é 400 Hz.

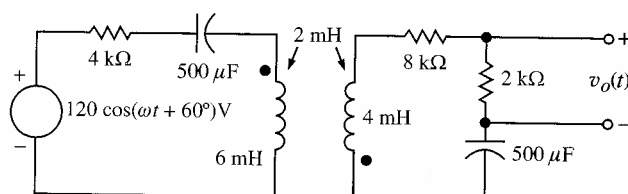


Figura P13.25

13.26 Use PSPICE para determinar as correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  na rede na Figura P13.26. A frequência da fonte é 60 Hz.  $k = 0,6$

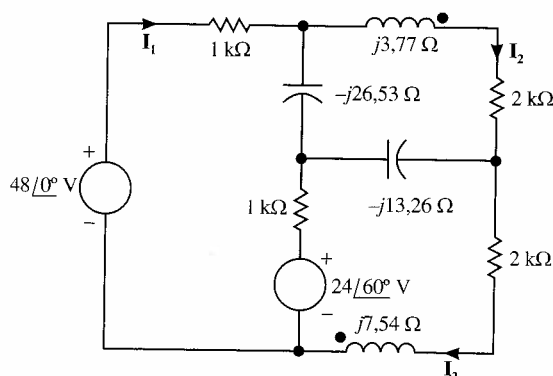


Figura P13.26

13.27 Dada a rede na Figura P13.27, determine  $V_o$  usando PSPICE.  $f = 1/2\pi$  Hz. Sejam

$$k_{12} = 0,995$$

$$k_{13} = 0,980$$

$$k_{23} = 0,950$$

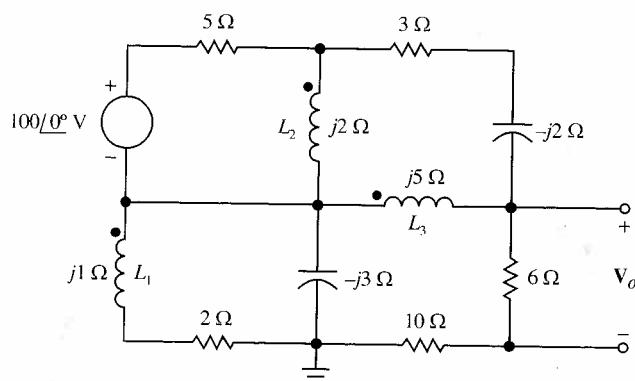


Figura P13.27



13.28 Dado que  $V_o = 48 \angle 30^\circ \text{ V}$  no circuito mostrado na Figura P13.28, determine  $V_s$ .

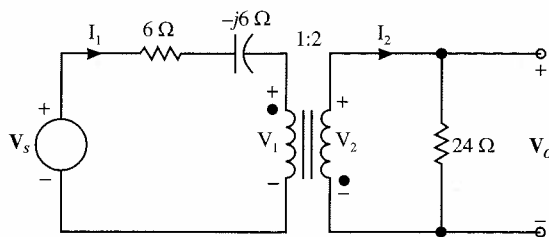


Figura P13.28

13.29 Se a fonte de tensão  $V_s$  no circuito do Problema 13.28 é  $50 \angle 0^\circ \text{ V}$ , determine  $V_o$ .

13.30 Determine a impedância de entrada vista pela fonte na rede da Figura P13.30.

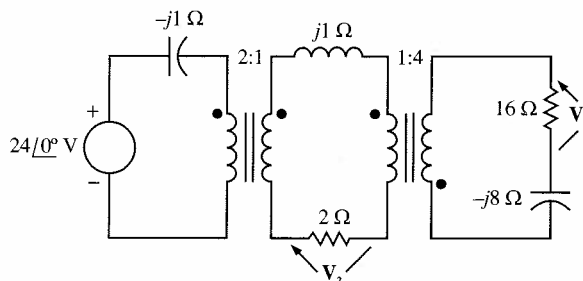


Figura P13.30

13.31 Determine todas as correntes e tensões na rede da Figura P13.31.

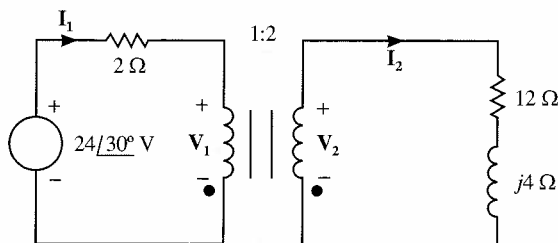


Figura P13.31

13.32 Determine  $I_o$  na rede da Figura P13.32.

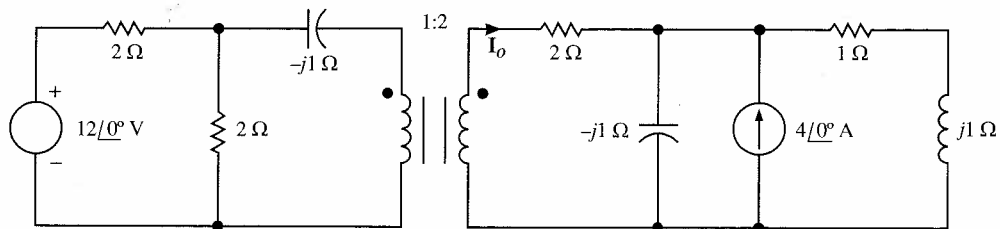


Figura P13.32

13.33 Determine a tensão  $V_o$  na rede da Figura P13.33.

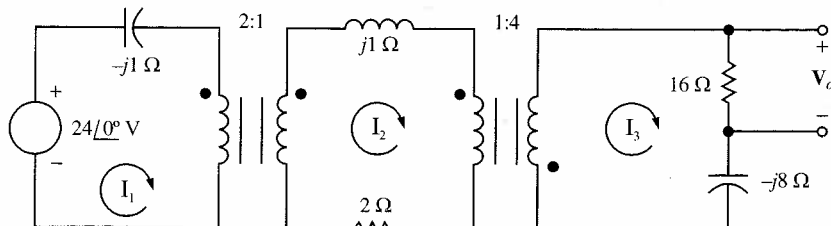


Figura P13.33

13.34 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P13.34.

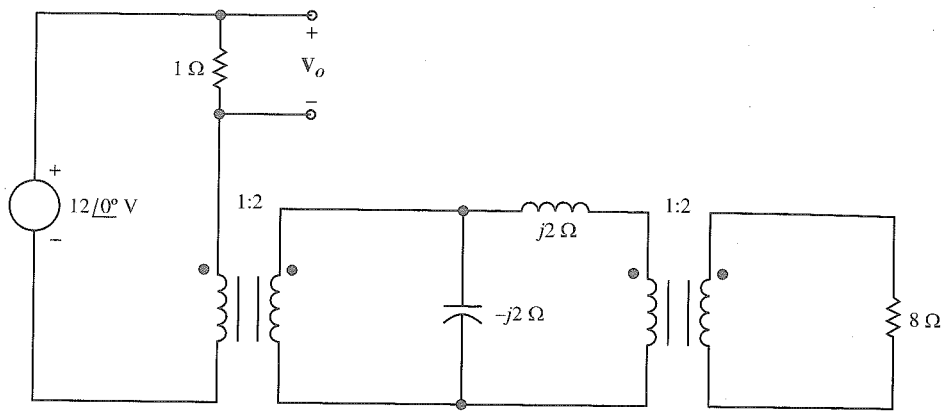


Figura P13.34

13.35 Determine a corrente  $I$  na rede da Figura P13.35.

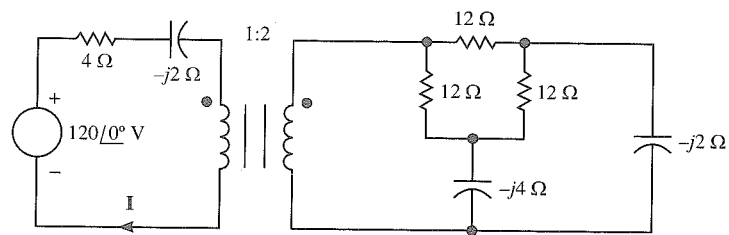


Figura P13.35

13.36 Determine a corrente  $I$  na rede da Figura P13.36.

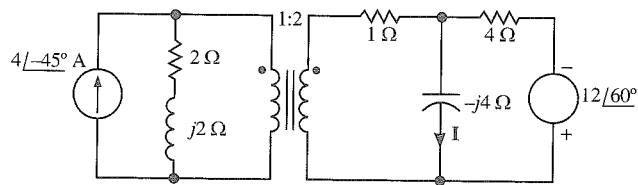


Figura P13.36

13.37 Determine  $V_o$  na rede da Figura P13.37.

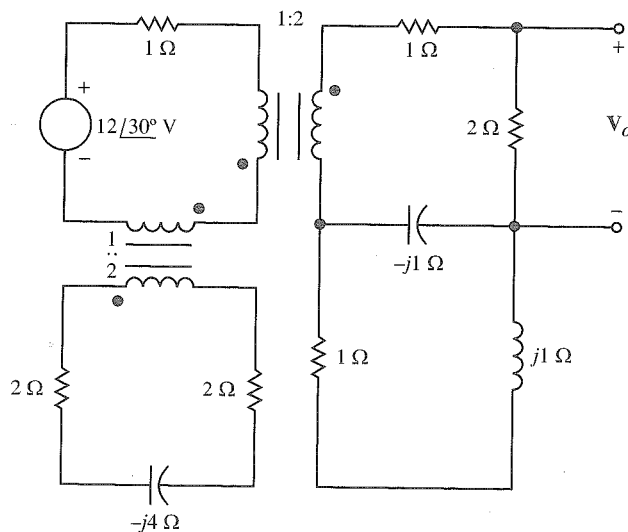
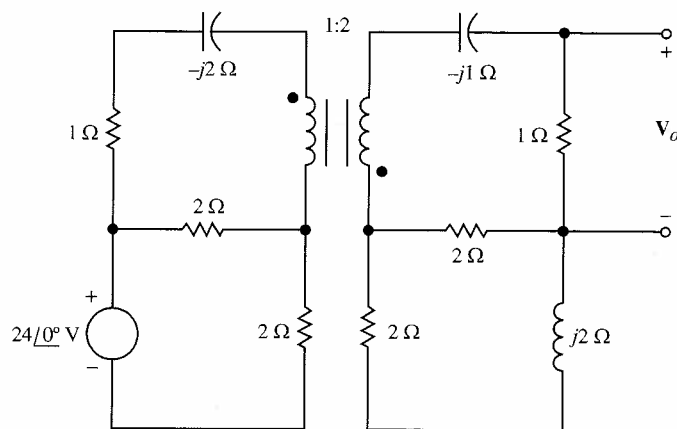


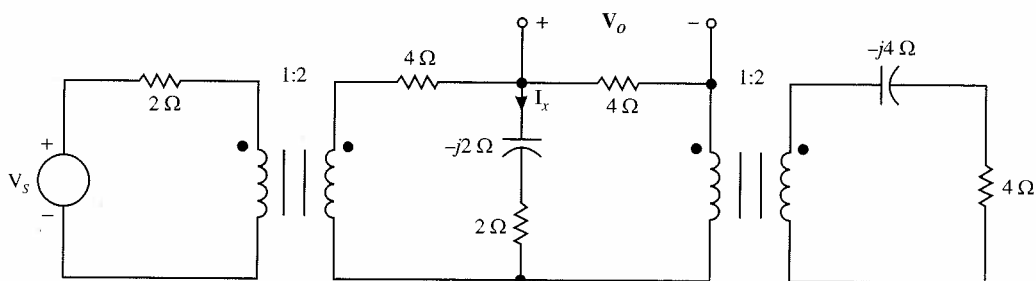
Figura P13.37

**13.38** Determine  $V_o$  no circuito da Figura P13.38.



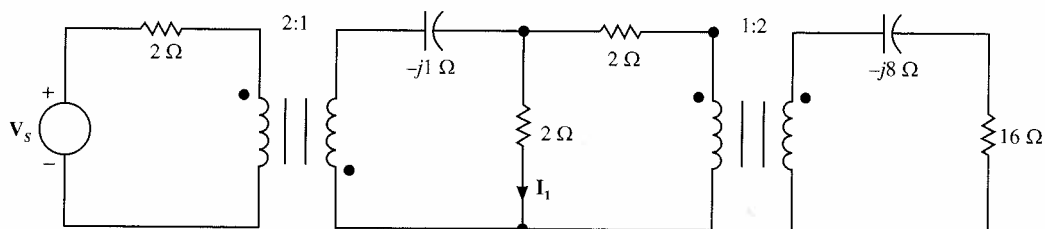
**Figura P13.38**

**13.39** No circuito da Figura P13.39, caso  $I_x = 6 \angle 45^\circ$  A, determine  $V_o$ .



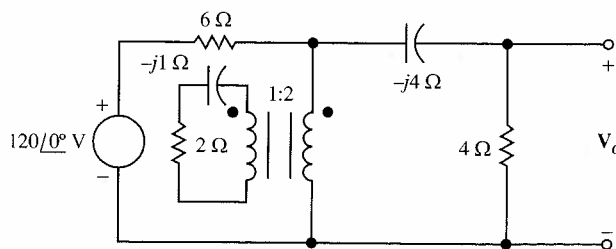
**Figura P13.39**

**13.40** Na rede da Figura P13.40, caso  $I_1 = 4 \angle 0^\circ$  A, determine  $V_s$ .



**Figura P13.40**

**13.41** Determine  $V_o$  na rede da Figura P13.41.



**Figura P13.41**

13.42 Determine  $I_o$  no circuito da Figura P13.42.

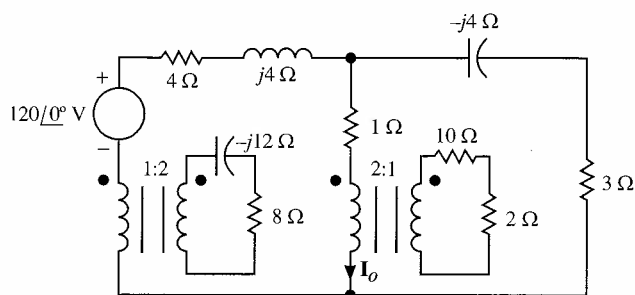


Figura P13.42

13.43 Determine  $V_o$  na rede da Figura P13.43.

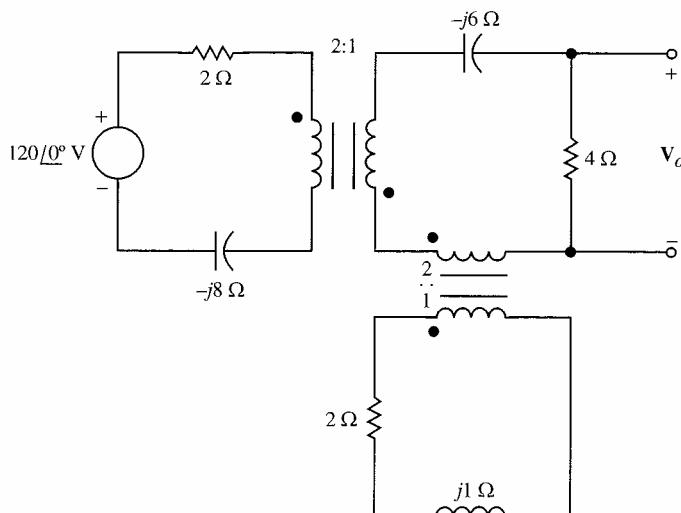


Figura P13.43

13.44 Determine  $V_o$  no circuito da Figura P13.44.

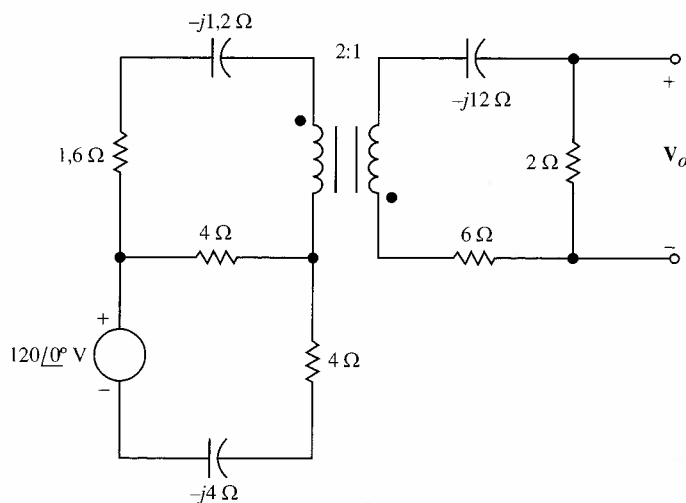


Figura P13.44

13.45 Determine  $I_o$  na rede da Figura P13.45.

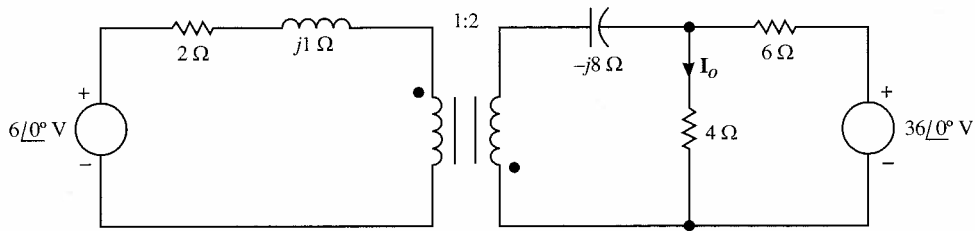


Figura P13.45

13.46 Determine  $V_o$  na rede da Figura P13.46.

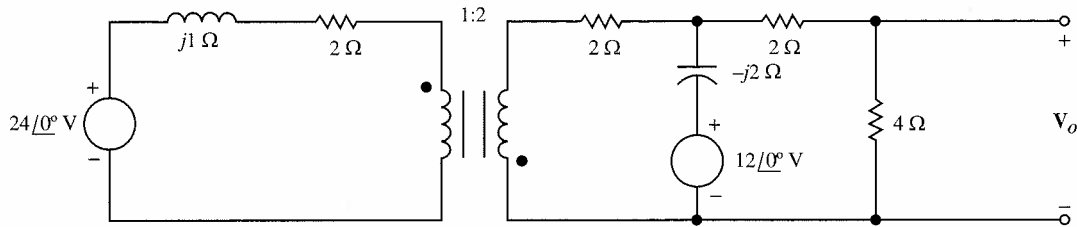


Figura P13.46

13.47 O estágio de saída de um amplificador está para ser conectado à impedância de um alto-falante como mostrado na Figura P13.47. Se a impedância do alto-falante é  $8 \Omega$  e o amplificador necessita de uma impedância de carga de  $3,2 k\Omega$ , determine a relação de espiras do transformador ideal.

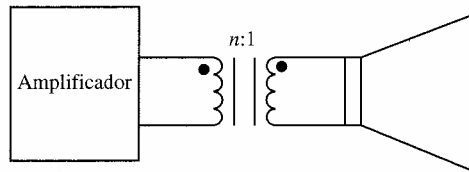


Figura P13.47

13.48 Na rede mostrada na Figura P13.48,  $V_L = 120 \angle 0^\circ$  V rms.  $Z_L$  dissipa 500 watts a  $0,85$  fp em atraso. Determine  $V_S$ .

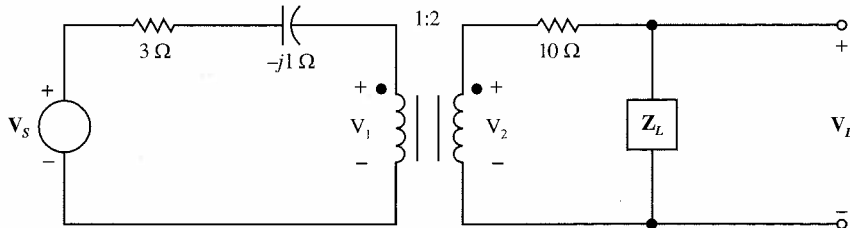


Figura P13.48

13.49 Determine a tensão de entrada  $V_S$  e o fator de potência na rede da Figura P13.49.

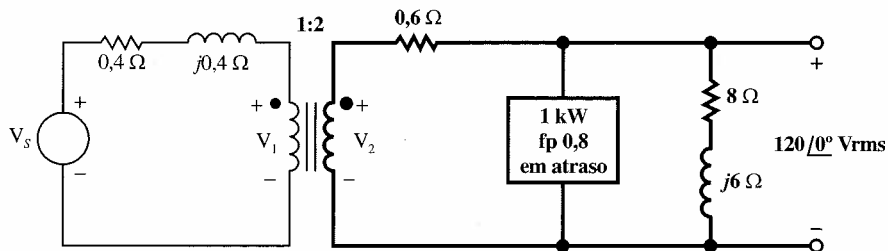


Figura P13.49

13.50 Determine  $I_S$  no circuito da Figura P13.50.

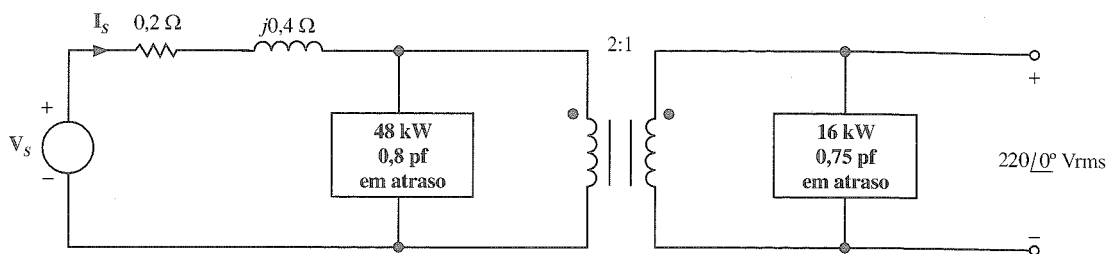


Figura P13.50

13.51 Determine  $V_S$  na rede da Figura P13.51.

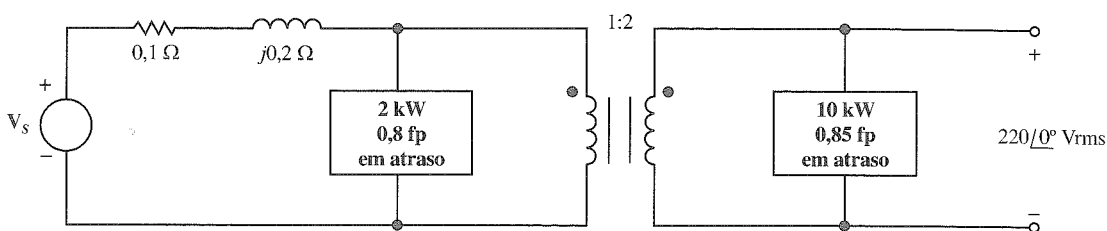


Figura P13.51

13.52 Determine a leitura do wattímetro na rede da Figura P13.52.

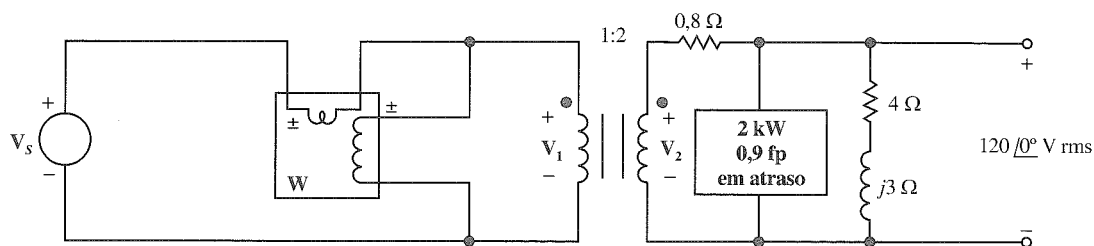


Figura P13.52

13.53 Determine a impedância de entrada do circuito mostrado na Figura P13.53.

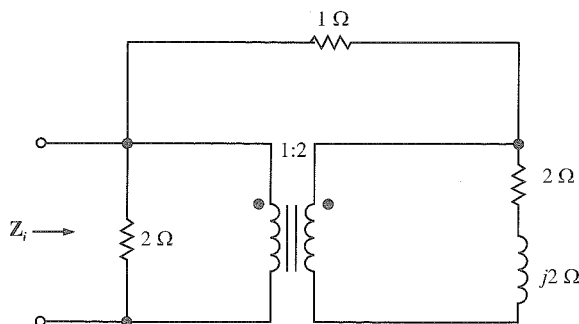


Figura P13.53

13.54 Determine o valor da resistência da carga  $R_o$  na rede mostrada na Figura P13.54.

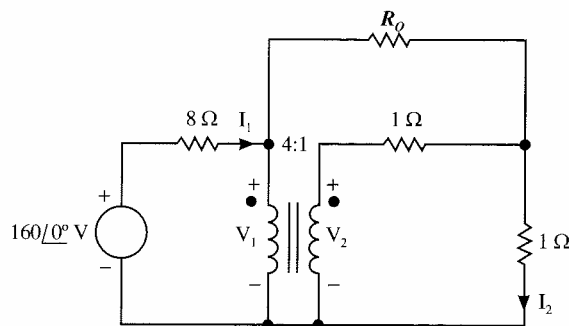


Figura P13.54

13.55 Na rede da Figura P13.55,  $I_A$  é conhecida como  $10 \angle 30^\circ$  A. Use PSPICE para determinar a tensão  $V_o$ .

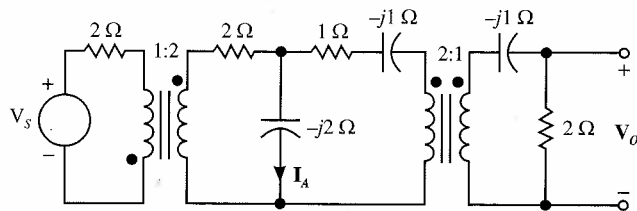


Figura P13.55

13.56 Use PSPICE para determinar  $I$  na rede da Figura P13.56.

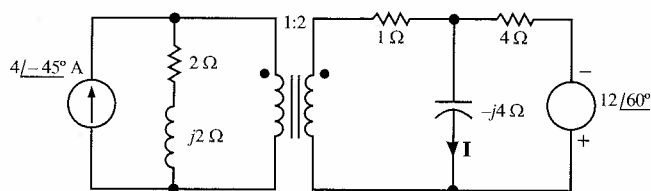


Figura P13.56

13.57 Use PSPICE para determinar  $I$  na rede da Figura P13.57.

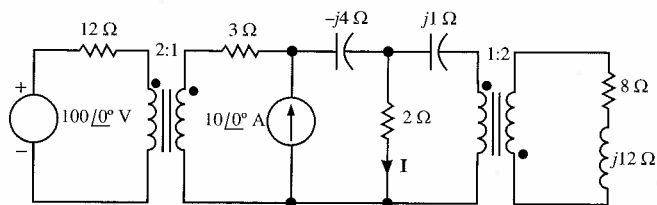


Figura P13.57

13.58 Forme um circuito equivalente para o transformador e o primário da rede mostrada na Figura P13.58, e use esse circuito e PSPICE para determinar a corrente  $I_2$ .

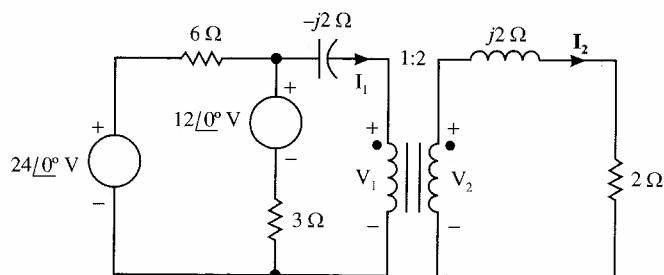


Figura P13.58

- 13.59** Um transformador de dois enrolamentos, 36 kVA, 2400/240 V, deve ser conectado como um autotransformador para fornecer 2.160 V para uma carga. Esboce a conexão do transformador e determine a especificação kVA do autotransformador.
- 13.60** Um transformador de dois enrolamentos, 2.300/230 V, de especificação 50 kVA, está conectado como um autotransformador para elevar a tensão de 2.300 V para 2.530 V. Qual a saída kVA do autotransformador?
- 13.61** Um transformador 440/220 V, de dois enrolamentos, especificado 15 kVA, está conectado como um autotransformador para abaixar a tensão de 660 V para 220 V. Determine a taxa volt-ampère do autotransformador e compare-a com o transformador original.
- 13.62** Um transformador 440/110 V, de dois enrolamentos, 20 kVA, está conectado como mostrado na Figura P13.62. Determine a tensão  $V_2$  e a especificação kVA do transformador na configuração mostrada.

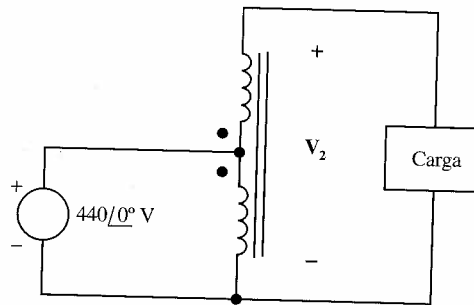


Figura P13.62

- 13.63** Um banco de transformadores monofásicos está conectado em um Y de alta-tensão a uma configuração delta de baixa tensão. Cada transformador tem a seguinte especificação: 60 kVA, 13,2 kV/240 V rms. Se os transformadores alimentam uma carga trifásica em equilíbrio que consome 66,67 kVA a 0,75 fp em atraso, quais as magnitudes das correntes de linha na fonte e na carga?
- 13.64** Um transformador trifásico em equilíbrio tem a seguinte especificação: 240Δ/208Y V rms. O transformador serve uma carga trifásica em equilíbrio que consome 12,5 kVA a um fp de 0,8 em atraso. A magnitude da tensão da linha na carga é 200 V rms e a impedância de linha é  $0,1 + j0,2 \Omega$ . Determine a magnitude da corrente da linha na carga e a magnitude da tensão de linha no primário do transformador.
- 13.65** Um transformador trifásico em equilíbrio com especificação de 13,2kY/240Δ V rms é usado na rede da Figura P13.65 para alimentar uma carga. A magnitude da tensão da linha na carga é 230 V rms. Determine a magnitude da corrente de linha na carga e a magnitude da tensão de linha no primário do transformador.

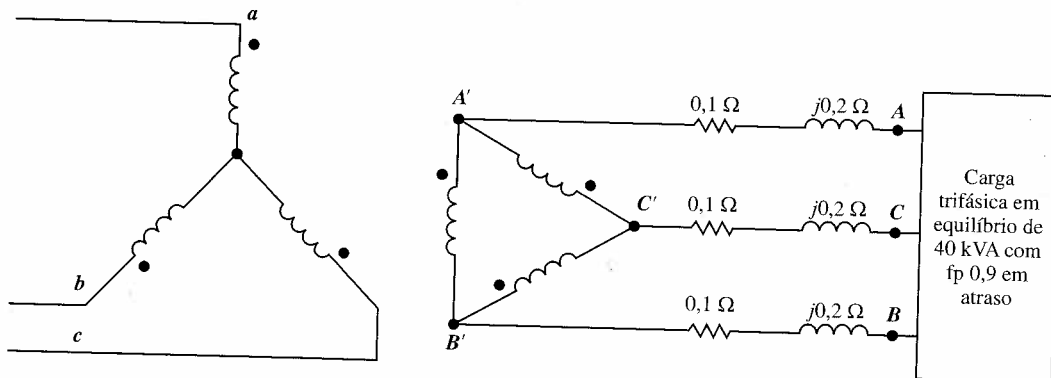


Figura P13.65



# Resposta em Freqüência

Examinaremos neste capítulo a resposta em freqüência de redes elétricas. O efeito da freqüência da fonte na rede será de especial interesse. Técnicas para determinar a resposta em freqüência de uma rede serão apresentadas e gráficos que mostram o desempenho de uma rede em função da freqüência serão analisados.

O conceito de ressonância será examinado em detalhes. Os vários parâmetros usados para definir a seletividade de freqüência em uma rede, tal como largura de faixa, freqüência de canto e fator de qualidade, serão discutidos.

Redes com características de filtro serão examinadas. Especificamente, filtros passa-baixas, passa-altas e filtro rejeita-faixa serão discutidos. Técnicas de projeto de filtros ativos (contendo amp-op) serão apresentadas. PSPICE será usado para traçar gráficos de respostas em freqüência de redes e também para ilustrar as propriedades da seletividade de freqüência em redes.

Redes que apresentam características particulares de filtragem têm uma aplicação ampla em vários tipos de sistemas de comunicação e controle onde é necessário passar algumas freqüências e rejeitar outras.

## 14.1 Características Gerais de Rede

Nos capítulos anteriores, analisamos a resposta de redes a diversos tipos diferentes de excitação. Por exemplo, foram analisadas redes em que a função excitante era uma constante (dc) ou uma senóide (ac). No último caso, a resposta em regime permanente da rede a uma função senoidal foi obtida determinando a resposta à função  $Xe^{j\omega t}$ , onde  $Xe^{j\omega t}$  representava corrente ou tensão, e então tomando a parte real da função resultante. Nesse caso, a resposta em regime permanente é da forma  $y(t) = Ye^{j\omega t}$ . Demonstramos no Capítulo 9 que a aplicação da função excitante  $Xe^{j\omega t}$ , o que pareceria complicar a análise, na realidade simplificou a tarefa, porque reduziu a equação diferencial para a resposta em regime permanente a um conjunto de equações algébricas com coeficientes complexos. Mudamos agora a ênfase e examinamos o desempenho de uma rede à medida que a freqüência muda (ou seja, a freqüência passa a ser uma variável). Redes em sistemas de comunicação e controle são freqüentemente projetadas para serem seletoras de freqüência; em outras palavras, elas passam certas freqüências e rejeitam outras. Por exemplo, se as redes em um aparelho de som são projetadas de modo tal que cada freqüência no intervalo de áudio seja amplificada da mesma maneira, consegue-

se uma reprodução do som de alta fidelidade. Por outro lado, se algumas frequências são amplificadas mais que as outras, ocorre distorção, e a saída não é a duplicação exata da entrada.

Para simplificar nossa notação, podemos representar uma rede linear por um diagrama de blocos, como mostrado na Figura 14.1a. O bloco representa a rede,  $x(t)$  é a entrada ou excitação e  $y(t)$  é a saída ou resposta. Ambas,  $x(t)$  e  $y(t)$  podem ser tanto a tensão como a corrente. Simplificando ainda mais, vamos substituir  $s$  por  $j\omega$  como mostrado na Figura 14.1b. Nesse ponto, fazemos a substituição por conveniência, eliminando os coeficientes complexos nas manipulações algébricas. Chamaremos essa variável,  $s$ , de frequência complexa. Nesse contexto, ela sempre será igual a  $j\omega$ . No entanto, no Capítulo 16, ela poderá ser expressa como  $\sigma + j\omega$  e lhe será dada um significado e uso mais geral.

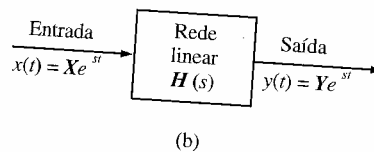
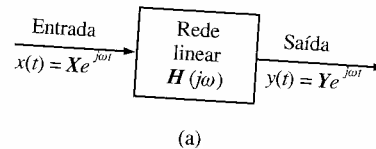


Figura 14.1 Representação de uma rede linear.

Uma vez que a rede da Figura 14.1 é linear, a entrada  $x(t) = X e^{j\omega t}$  produzirá uma resposta em regime permanente do tipo  $y(t) = Y e^{j\omega t} = H(j\omega) X e^{j\omega t}$ , onde  $H(j\omega)$  dependerá da frequência  $\omega$ . Usando-se a notação  $s$ ,  $y(t) = Y e^{st} = H(s) X e^{st}$ . A razão entre a saída e a entrada é chamada de *função de transferência da rede* e é

$$H(s) = \frac{Y}{X} \quad (14.1)$$

que é dependente da frequência complexa  $s$  e é independente do tempo.

Já que tanto a entrada como a saída podem geralmente ser tensão ou corrente, existem quatro funções de rede possíveis. Por exemplo, se a entrada é corrente e a saída é tensão, a função da rede é uma impedância, mais especificamente uma impedância de transferência  $Z(s)$ . De modo semelhante, as outras funções de rede são: admitância de transferência,  $Y(s)$ , ganho de tensão,  $G_V(s)$ , e ganho de corrente,  $G_I(s)$ . Tais funções serão examinadas em detalhes no Capítulo 15, quando serão estudados os quadripolos. Deve-se também notar que, além das *funções de transferência* que acabamos de definir, existem também funções tais como admitância ou impedância, que são definidas para um par de terminais, por exemplo, a impedância de entrada de uma rede.

### Exemplo 14.1

Desejamos determinar a admitância de transferência  $[I_2(s)/V_1(s)]$  e o ganho de tensão da rede mostrada na Figura 14.2.

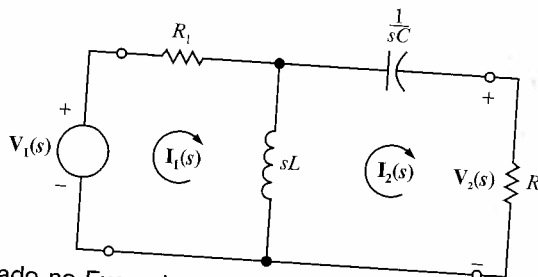


Figura 14.2 Circuito empregado no Exemplo 14.1.

As equações de malha para a rede são

$$\begin{aligned}(R_1 + sL)\mathbf{I}_1(s) - sL\mathbf{I}_2(s) &= \mathbf{V}_1(s) \\ -sL\mathbf{I}_1(s) + \left(R_2 + sL + \frac{1}{sC}\right)\mathbf{I}_2(s) &= 0 \\ \mathbf{V}_2(s) &= \mathbf{I}_2(s)R_2\end{aligned}$$

Resolvendo-se as equações para  $\mathbf{I}_2(s)$ , tem-se

$$\mathbf{I}_2(s) = \frac{sL\mathbf{V}_1(s)}{(R_1 + sL)(R_2 + sL + 1/sC) - s^2L^2}$$

Portanto, a admitância de transferência  $[\mathbf{I}_2(s)/\mathbf{V}_1(s)]$  é

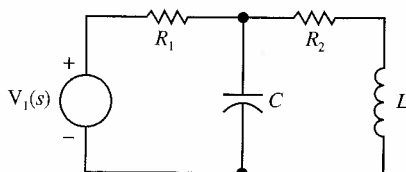
$$\mathbf{Y}_T(s) = \frac{\mathbf{I}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} = \frac{LCs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1}$$

e o ganho de tensão é

$$\mathbf{G}_V(s) = \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} = \frac{LCR_2s^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1}$$

## Exercícios

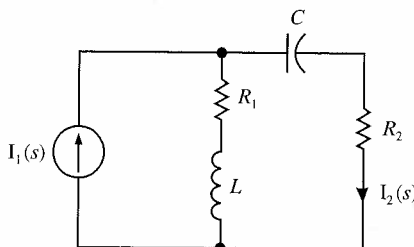
**E14.1** Determine a impedância de entrada  $\mathbf{Z}_i(s)$  para a rede da Figura E14.1.



**Figura E14.1**

$$\text{Resp.: } \mathbf{Z}_i(s) = \frac{(R_1 + R_2) + s(CR_1R_2 + L) + s^2LCR_1}{1 + sCR_2 + s^2LC}$$

**E14.2** Determine o ganho de corrente  $\mathbf{G}_I(s)$  para a rede da Figura E14.2.



**Figura E14.2**

$$\text{Resp.: } \mathbf{G}_I(s) = \frac{sC(R_1 + sL)}{1 + sC(R_1 + R_2) + s^2LC}$$

## Pólos e Zeros

Em geral, funções de rede podem ser expressas como a razão de dois polinômios em  $s$ . O Exemplo 14.1 é uma ilustração desse fato. Além disso, notamos que uma vez que os valores dos nossos elementos do circuito, ou fontes controladas, são números reais, os coeficientes dos dois polinômios serão reais. Portanto, vamos expressar uma função de rede na forma

$$\mathbf{H}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (14.2)$$

onde  $N(s)$  é o numerador polinomial de grau  $m$  e  $D(s)$  é o denominador polinomial de grau  $n$ . A Equação 14.2 pode ser também escrita na forma

$$\mathbf{H}(s) = \frac{K_0 (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (14.3)$$

onde  $K_0$  é uma constante,  $z_1, \dots, z_m$  são as raízes de  $N(s)$ , e  $p_1, \dots, p_n$  são as raízes de  $D(s)$ . Note que se  $s = z_1$  ou  $z_2, \dots, z_m$ , então  $\mathbf{H}(s)$  se torna zero e dessa forma  $z_1, \dots, z_m$  são chamados *zeros* da função. Similarmente, se  $s = p_1$  ou  $p_2, \dots, p_n$ , então  $\mathbf{H}(s)$  se torna infinito e portanto  $p_1, \dots, p_n$  são chamados de *pólos* da função. Os zeros ou pólos podem na realidade ser complexos. No entanto, se eles forem complexos, sempre aparecerão em pares conjugados, uma vez que os coeficientes dos polinômios são reais. A representação da função da rede da Equação 14.3 é extremamente importante e é geralmente empregada para representar qualquer sistema linear invariante no tempo. A importância dessa forma se baseia no fato de que as propriedades dinâmicas de um sistema podem ser inferidas examinando-se os pólos do sistema.

## 14.2 Análise Senoidal de Frequência

Embora existam casos específicos em que uma rede opera somente em uma frequência (por exemplo, uma rede do sistema de potência), em geral estamos interessados no comportamento de uma rede como uma função da frequência. Na análise senoidal em regime permanente, a função da rede pode ser expressa como

$$\mathbf{H}(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (14.4)$$

onde  $M(\omega) = |\mathbf{H}(j\omega)|$  e  $\phi(\omega)$  é a fase. Gráficos dessas funções, normalmente chamados de *diagrama de magnitude* ou *ganho* e *diagrama de fase*, mostram como a resposta varia com a frequência de entrada  $\omega$ . Vamos agora ilustrar a maneira como realizamos uma análise no domínio da frequência simplesmente avaliando a função em várias frequências dentro de um intervalo de interesse ou usando-se o que é chamado de *diagrama de Bode* (em homenagem a Hendrik W. Bode).

### Diagramas de Resposta em Frequência

Se a função da rede é avaliada em algum ponto  $s = j\omega$ , seu valor será uma grandeza complexa com magnitude e fase. Daí, no caso de uma função de transferência, dois diagramas são usados para descrever o comportamento da função da rede: o diagrama de amplitude e o diagrama de fase. Podemos então avaliar a função  $\mathbf{H}(j\omega)$  no domínio da frequência simplesmente substituindo valores para  $\omega$  em  $\mathbf{H}(j\omega)$ . Portanto, para cada valor de  $\omega$  obteremos tanto a magnitude como a fase de  $\mathbf{H}(j\omega)$ .

Suponhamos que a função da rede seja da forma

$$\mathbf{H}(s) = \frac{K_0 (s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (14.5)$$

Se analisarmos essa função em algum ponto  $s = j\omega_0$ , então

$$\mathbf{H}(s = j\omega_0) = \frac{K_0 (j\omega_0 - z_1)(j\omega_0 - z_2)}{(j\omega_0 - p_1)(j\omega_0 - p_2)} \quad (14.6)$$

e cada termo da forma  $(j\omega_0 - z_i)$  e  $(j\omega_0 - p_j)$  é um número complexo tendo uma magnitude e fase. Portanto, a Equação 14.6 pode ser escrita como

$$\mathbf{H}(j\omega_0) = \frac{K_0 (Z_1 e^{j\theta_1})(Z_2 e^{j\theta_2})}{(P_1 e^{j\phi_1})(P_2 e^{j\phi_2})} \quad (14.7)$$

ou

$$\mathbf{H}(j\omega_0) = \frac{K_0 Z_1 Z_2}{P_1 P_2} e^{j(\theta_1 + \theta_2 - \phi_1 - \phi_2)} \quad (14.8)$$

onde, por exemplo,  $(j\omega_0 - z_1) = Z_1 e^{j\theta_1}$

De modo geral, a magnitude e fase da função da rede podem ser expressas como

$$|\mathbf{H}(j\omega_0)| = \frac{K_0 \prod_{i=1}^m Z_i}{\prod_{j=1}^n P_j} \quad (14.9)$$

e

$$\angle \mathbf{H}(j\omega_0) = \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{j=1}^n \phi_j \quad (14.10)$$

onde  $m$  é o número de zeros finitos de  $\mathbf{H}(j\omega)$  e  $n$  é o número de pólos finitos. Se analisarmos essas funções para vários valores de  $\omega$  de 0 a  $\infty$ , obteremos as características de magnitude e fase, ou de forma equivalente, a resposta em frequência de  $\mathbf{H}(j\omega)$ .

### Exemplo 14.2

Desejamos determinar a resposta em frequência de uma rede com a função de transferência

$$\mathbf{H}(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 17}$$

$\mathbf{H}(s)$  pode ser escrita como

$$\mathbf{H}(s) = \frac{2s}{(s + 1 + j4)(s + 1 - j4)}$$

e dessa forma

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{2\omega \angle 90^\circ}{[1 + j(\omega + 4)][1 + j(\omega - 4)]}$$

A resposta em frequência, que consiste da magnitude e fase de  $\mathbf{H}(j\omega)$  como uma função da frequência, pode ser obtida simplesmente analisando  $\mathbf{H}(j\omega)$  para vários valores de  $\omega$ . A magnitude e fase de  $\mathbf{H}(j\omega)$  para vários valores de  $\omega$  são

| $\omega$       | 0   | 1    | 2    | 3    | 4    | $\sqrt{17}$ | 5    | 6    | 7    | 8    |
|----------------|-----|------|------|------|------|-------------|------|------|------|------|
| $M(\omega)$    | 0   | 0,12 | 0,29 | 0,60 | 0,99 | 1,0         | 0,78 | 0,53 | 0,40 | 0,32 |
| $\phi(\omega)$ | 90° | 83°  | 73°  | 53°  | 7°   | 0°          | -39° | -58° | -66° | -71° |

Esboços dos diagramas de amplitude e fase para a função de rede são mostrados na Figura 14.3a e b. ■

O Exemplo 14.2 ilustra alguns pontos sutis que em geral são verdade. Note que, nas adjacências de um zero, a resposta da rede se aproxima de um mínimo, e nas adjacências de um pólo, a resposta da rede se aproxima de um máximo. A importância disso baseia-se no fato de que se quisermos projetar um filtro de rede para passar certas frequências e rejeitar outras, projetaremos o filtro para que tenha pólos no intervalo de passagem de frequências e zeros no intervalo de rejeição de frequências.

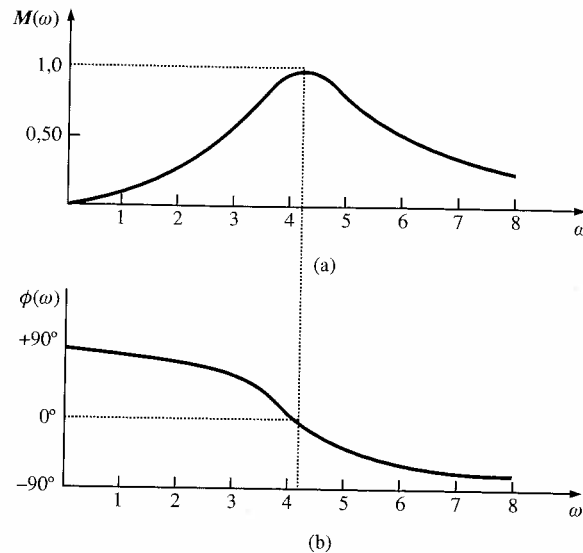


Figura 14.3 Diagramas empregados no Exemplo 14.2.

### Exercício

**E14.3** Dada a seguinte função de rede  $H(j\omega)$ , monte uma tabela para os valores de  $M(\omega)$  e  $\phi(\omega)$  versus  $\omega$  para  $0 \leq \omega \leq 10$  rad/s em incrementos de 1 rad/s.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 6)(j\omega + 8)}$$

Resp.:

| $\omega$       | 0         | 1          | 2            | 3           | ... |
|----------------|-----------|------------|--------------|-------------|-----|
| $M(\omega)$    | 0,042     | 0,0455     | 0,0543       | 0,063       | ... |
| $\phi(\omega)$ | $0^\circ$ | $10^\circ$ | $12,6^\circ$ | $9,2^\circ$ | ... |

### Resposta em Frequência Usando o Diagrama de Bode

Se os diagramas de ganho e fase da rede forem traçados em uma escala semilogarítmica, isto é, uma escala linear para as ordenadas e uma escala logarítmica para as abscissas, tais gráficos são conhecidos como *diagramas de Bode*. Nesse caso, traçamos  $20 \log_{10} M(\omega)$  versus  $\log_{10}(\omega)$  em vez de  $M(\omega)$  versus  $\omega$ . A vantagem de fazer isso é que podemos empregar aproximações por assíntotas para obter uma aproximação da resposta em frequência de forma mais eficiente. A magnitude (no eixo das ordenadas) está em decibéis (dB). Essa unidade foi originalmente usada para medir a razão de duas potências; isto é,

$$\text{número de dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad (14.11)$$

Se as potências são absorvidas por dois resistores iguais, então

$$\begin{aligned} \text{número de dB} &= 10 \log_{10} \frac{|V_2|^2 / R}{|V_1|^2 / R} = 10 \log_{10} \frac{|I_2|^2 R}{|I_1|^2 R} \\ &= 20 \log_{10} \frac{|V_2|}{|V_1|} = 20 \log_{10} \frac{|I_2|}{|I_1|} \end{aligned} \quad (14.12)$$

O termo “dB” tem se tornado tão popular que é freqüentemente usado para razões de tensão e corrente, como ilustrado na Equação 14.12, sem considerar a impedância empregada em cada caso.

No caso do regime permanente senoidal,  $\mathbf{H}(j\omega)$  na Equação 14.3 pode ser expresso em geral como

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{K_0 (j\omega)^{\pm N} (1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)[1 + 2\xi_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2] \cdots}{(1 + j\omega\tau_a)[1 + 2\xi_b(j\omega\tau_b) + (j\omega\tau_b)^2] \cdots} \quad (14.13)$$

Note que essa equação contém os fatores típicos:

1. Um fator constante (independente da freqüência),  $K_0$
2. Pólos e zeros na origem da forma  $j\omega$ , isto é,  $(j\omega)^{+N}$  para zeros e  $(j\omega)^{-N}$  para pólos
3. Pólos e zeros da forma  $(1 + j\omega\tau)$
4. Pólos quadráticos ou zeros da forma  $1 + 2\xi(j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2$

Tomando o logaritmo da magnitude da função  $\mathbf{H}(j\omega)$  na Equação 14.13, tem-se

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |\mathbf{H}(j\omega)| &= 20 \log_{10} K_0 \pm 20N \log_{10} |j\omega| \\ &\quad + 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_1| \\ &\quad + 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_2| \\ &\quad + 20 \log_{10} |1 + 2\xi_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2| \\ &\quad + \cdots - 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_a| - 20 \log_{10} |1 + 2\xi_b(j\omega\tau_b) + (j\omega\tau_b)^2| \cdots \end{aligned} \quad (14.14)$$

Note que temos usado o fato de que o logaritmo do produto de dois ou mais termos é igual à soma dos logaritmos dos termos individuais, o logaritmo do quociente de dois termos é igual à diferença dos logaritmos dos termos individuais, e o fato de que  $\log_{10} A^n = n \log_{10} A$ .

O ângulo de fase para  $\mathbf{H}(j\omega)$  é

$$\begin{aligned} \angle \mathbf{H}(j\omega) &= 0 \pm N(90^\circ) + \tan^{-1} \omega\tau_1 + \tan^{-1} \omega\tau_2 \\ &\quad + \tan^{-1} \left( \frac{2\xi_3 \omega\tau_3}{1 - \omega^2 \tau_3^2} \right) + \cdots \\ &\quad - \tan^{-1} \omega\tau_a - \tan^{-1} \left( \frac{2\xi_b \omega\tau_b}{1 - \omega^2 \tau_b^2} \right) \cdots \end{aligned} \quad (14.15)$$

Como as equações 14.14 e 14.15 indicam, iremos simplesmente traçar o gráfico para cada fator individualmente e somá-los algebricamente para obter o diagrama total.

O termo  $20 \log_{10} K_0$  tem magnitude constante com defasamento nulo, como mostrado na Figura 14.4a. Pólos e zeros na origem são da forma  $(j\omega)^{\pm N}$ , onde + é usado para zeros e - é usado para pólos. A magnitude dessa função é  $\pm 20N \log_{10} \omega$ , que é uma linha reta na escala semilogarítmica com uma inclinação de  $\pm 20N$  dB/década; isto é, o valor mudará de 20 dB a cada vez que a freqüência for multiplicada por 10, e a fase dessa função é uma constante  $\pm N(90^\circ)$ . Os diagramas de magnitude e fase para pólos e zeros na origem são mostrados na Figura 14.4b e c, respectivamente.

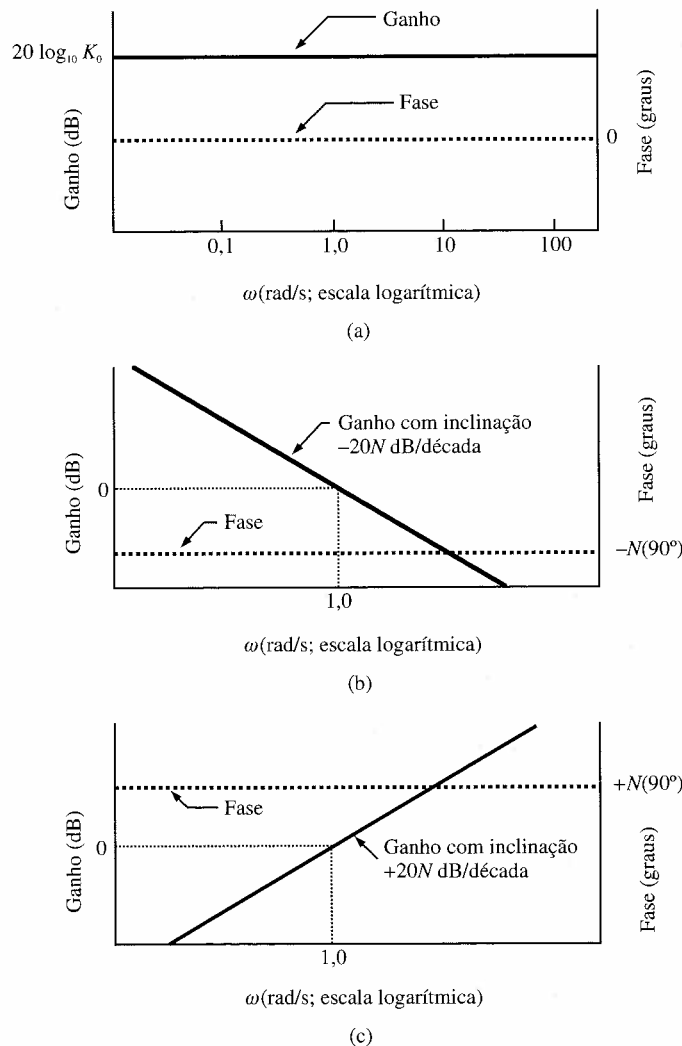
Aproximações lineares podem ser empregadas quando um pólo ou zero da forma  $(1 + j\omega\tau)$  estiverem presentes na função da rede. Para  $\omega\tau \ll 1$ ,  $(1 + j\omega\tau) \approx 1$ , e portanto  $20 \log_{10} |(1 + j\omega\tau)| = 20 \log_{10} 1 = 0$  dB. De modo semelhante, se  $\omega\tau \gg 1$ , então  $(1 + j\omega\tau) \approx j\omega\tau$ , e dessa forma  $20 \log_{10} |(1 + j\omega\tau)| = 20 \log_{10} \omega\tau$ . Portanto, para  $\omega\tau \ll 1$ , a resposta é 0 dB, e para  $\omega\tau \gg 1$ , a resposta tem inclinação igual a um pólo ou zero na origem. A intersecção dessas duas assíntotas, uma para  $\omega\tau \ll 1$  e uma para  $\omega\tau \gg 1$ , é o ponto onde  $\omega\tau = 1$  ou  $\omega = 1/\tau$ , que é chamado de *freqüência de corte*,  $\omega_c$ . Nessa freqüência, onde  $\omega = 1/\tau$ ,  $20 \log_{10} |(1 + j1)| = 20 \log_{10}(2)^{1/2} = 3$  dB. Logo, a curva real se desvia da assíntota de 3 dB na freqüência de corte. Pode ser mostrado que para  $0,5\omega_c$  e  $2\omega_c$  os desvios são de 1 dB. O ângulo de fase associado a um pólo simples ou zero é  $\phi = \tan^{-1} \omega\tau$ , que é uma simples curva arcotangente. Portanto, o deslocamento de fase é de  $45^\circ$  na freqüência de corte e  $26,6^\circ$  e  $63,4^\circ$  em uma e meia e duas vezes a freqüência de corte, respectivamente. A magnitude para um pólo dessa forma é mostrada na Figura 14.5a. Para um zero, a curva de magnitude e a assíntota para  $\omega\tau \gg 1$  têm uma inclinação positiva, e a curva de fase se estende de  $0^\circ$  a  $+90^\circ$ , como mostrado na Figura 14.5b. Se houver múltiplos pólos ou zeros da forma  $(1 + j\omega\tau)^N$ , então a inclinação da assíntota em altas freqüências é

multiplicada por  $N$ , o desvio entre a curva real e a assíntota na frequência de corte é  $3N$  dB, e a curva de fase se estende de  $0$  a  $N(90^\circ)$  e é  $N(45^\circ)$  na frequência de corte.

Pólos quadráticos ou zeros são da forma  $1 + 2\zeta(j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2$ . Esse termo é uma função não somente de  $\omega$ , mas do coeficiente adimensional  $\zeta$ , que é chamado de *quociente de amortecimento*. Se  $\zeta > 1$  ou  $\zeta = 1$ , as raízes são reais e diferentes ou reais e iguais, respectivamente. Esses dois casos já foram estudados. Se  $\zeta < 1$ , as raízes são complexas e conjugadas, e é esse caso que examinaremos agora. Seguindo o argumento acima para um pólo simples ou zero, a magnitude do fator quadrático é 0 dB para  $\omega\tau \ll 1$ . Para  $\omega\tau \gg 1$ ,

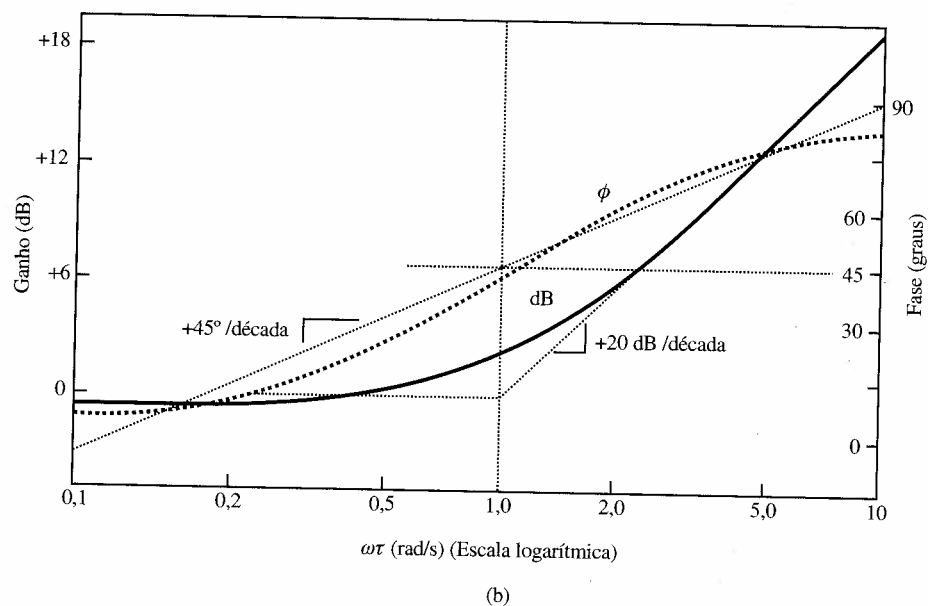
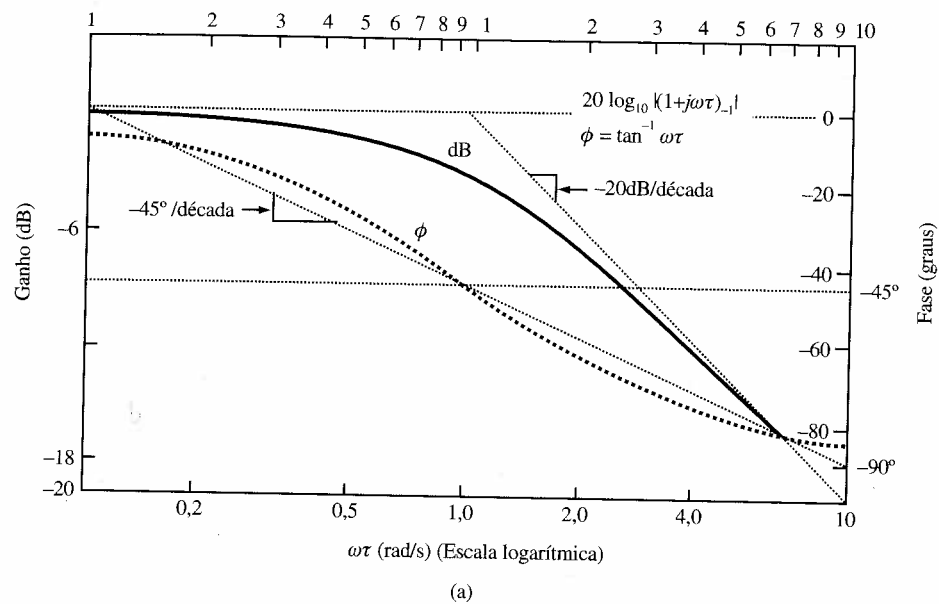
$$20 \log_{10} |1 - (\omega\tau)^2 + 2j\zeta(\omega\tau)| \approx 20 \log_{10} |(\omega\tau)^2| = 40 \log_{10} |\omega\tau|$$

e portanto, para  $\omega\tau \gg 1$ , a inclinação da curva de magnitude é  $+40$  dB/década para um zero quadrático e  $-40$  dB/década para um pólo quadrático. Entre os dois extremos,  $\omega\tau \ll 1$  e  $\omega\tau \gg 1$ , o comportamento da função é dependente do quociente de amortecimento  $\zeta$ . A Figura 14.6a ilustra a maneira como a curva de magnitude logarítmica para um *pólo* quadrático muda em função do quociente de amortecimento. O deslocamento de fase para o fator quadrático é  $\tan^{-1} 2\zeta\omega\tau/[1 - (\omega\tau)^2]$ . O diagrama de fase para *pólos* quadráticos é mostrado na Figura 14.6b. Note que, nesse caso, a fase muda de  $0^\circ$  para  $\omega\tau \ll 1$  até  $-180^\circ$  para  $\omega\tau \gg 1$ . Para zeros quadráticos, as curvas de magnitude e fase são invertidas; isto é, a curva de magnitude logarítmica tem uma inclinação de  $+40$  dB/década para  $\omega\tau \gg 1$ , e a curva de fase é  $0^\circ$  para  $\omega\tau \ll 1$  e  $+180^\circ$  para  $\omega\tau \gg 1$ .

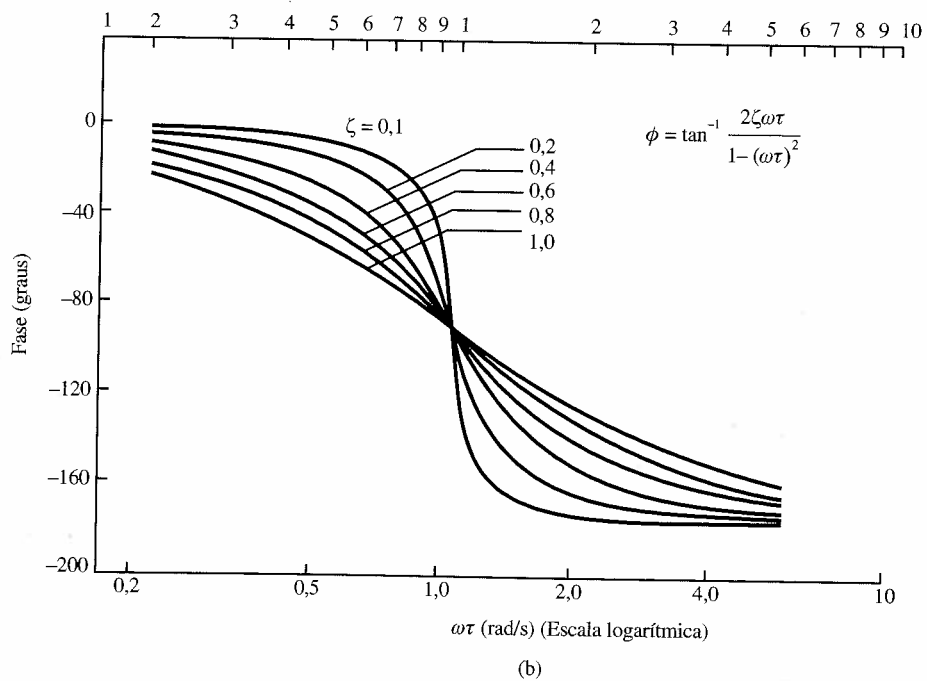
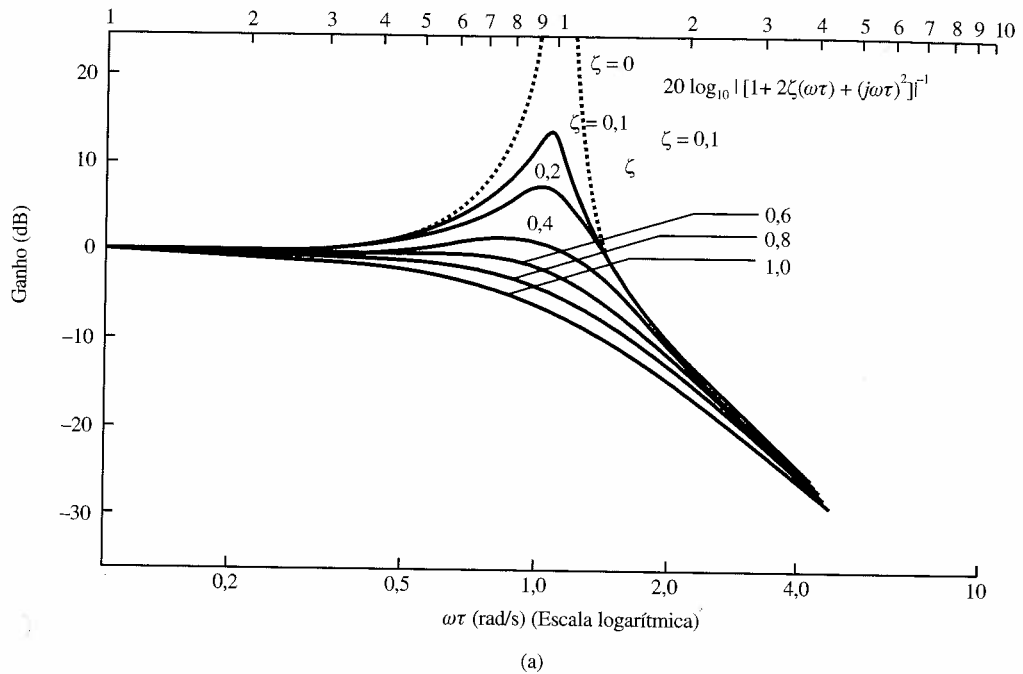


**Figura 14.4** Diagramas de magnitude e fase para um termo constante e pólos e zeros na origem.





**Figura 14.5** Gráficos de magnitude e fase (a) para um pólo simples e (b) para um zero simples.



**Figura 14.6** Diagramas de magnitude e fase para pólos quadráticos.

### Exemplo 14.3

Queremos traçar os diagramas de magnitude e fase para a função de transferência

$$G_v(j\omega) = \frac{10(0.1j\omega + 1)}{(j\omega + 1)(0.02j\omega + 1)}$$

Note que essa função está na forma padrão, uma vez que todos os termos estão na forma  $(j\omega\tau + 1)$ . Para se determinar a resposta em frequência completa, traçaremos as assíntotas de cada termo individualmente e então as somaremos. Vamos considerar o diagrama de magnitude primeiro. Uma vez que  $K_0 = 10$ ,  $20 \log_{10} 10 = 20$  dB, que é uma constante independente da frequência, como mostrado na Figura 14.7a. O zero da função de transferência contribui com um termo da forma  $+20 \log_{10} |1 + 0,1j\omega|$ , que é 0 dB para  $0,1\omega \ll 1$ , tem uma inclinação de +20 dB/década para  $0,1\omega \gg 1$  e tem uma frequência de corte em  $\omega = 10$  rad/s. Os pólos têm frequência de corte em  $\omega = 1$  rad/s e  $\omega = 50$  rad/s. O pólo com frequência de corte em  $\omega = 1$  rad/s contribui com um termo da forma  $-20 \log_{10} |1 + j\omega|$ , que é 0 dB para  $\omega \ll 1$  e tem inclinação de -20 dB/década para  $\omega \gg 1$ . Um argumento semelhante pode ser feito para o pólo que tem uma frequência de corte em  $\omega = 50$  rad/s. Esses fatores são mostrados na Figura 14.7a.

Considere agora as curvas de fase individualmente. O termo  $K_0$  não é uma função de  $\omega$  e não contribui para a fase da função de transferência. A curva de fase para o zero é  $+\tan^{-1} 0,1\omega$ , que é uma curva arco-tangente que se estende de  $0^\circ$  para  $0,1\omega \ll 1$  para  $+90^\circ$  para  $0,1\omega \gg 1$  e tem uma fase de  $+45^\circ$  na frequência de corte. As curvas de fase para os dois pólos são  $-\tan^{-1} \omega$  e  $-\tan^{-1} 0,02\omega$ . O termo  $-\tan^{-1} \omega$  é  $0^\circ$  para  $\omega \ll 1$ ,  $-90^\circ$  para  $\omega \gg 1$  e  $-45^\circ$  na frequência de corte  $\omega = 1$ . A curva de fase para o pólo restante é traçada de modo semelhante. Todas as curvas de fase são mostradas na Figura 14.7a.

Como especificado nas equações 14.14 e 14.15, os diagramas completos de magnitude e fase da função de transferência são obtidas simplesmente somando-se os termos individuais. Tais diagramas são mostrados na Figura 14.7b. Note que a curva real de magnitude (linha contínua) difere da aproximação da linha reta (linha tracejada) de 3 dB nas frequências de corte,  $\omega_{ci}$ , e 1 dB em  $0,5\omega_{ci}$  e  $2\omega_{ci}$ . ■

#### Exemplo 14.4

Vamos traçar o diagrama de Bode para a seguinte função de transferência:

$$G_v(j\omega) = \frac{25(j\omega + 1)}{(j\omega)^2(0,1j\omega + 1)}$$

Novamente os termos individuais para a magnitude e fase estão traçados na Figura 14.8a. A linha reta com uma inclinação de -40 dB/década é gerada pelo pólo duplo na origem. Essa linha é um gráfico de  $-40 \log_{10} \omega$  versus  $\omega$  e portanto passa através de 0 dB em  $\omega = 1$  rad/s. A fase para o pólo duplo é uma constante  $-180^\circ$  para todas as frequências. O restante dos termos estão traçados como ilustrado no Exemplo 14.3.

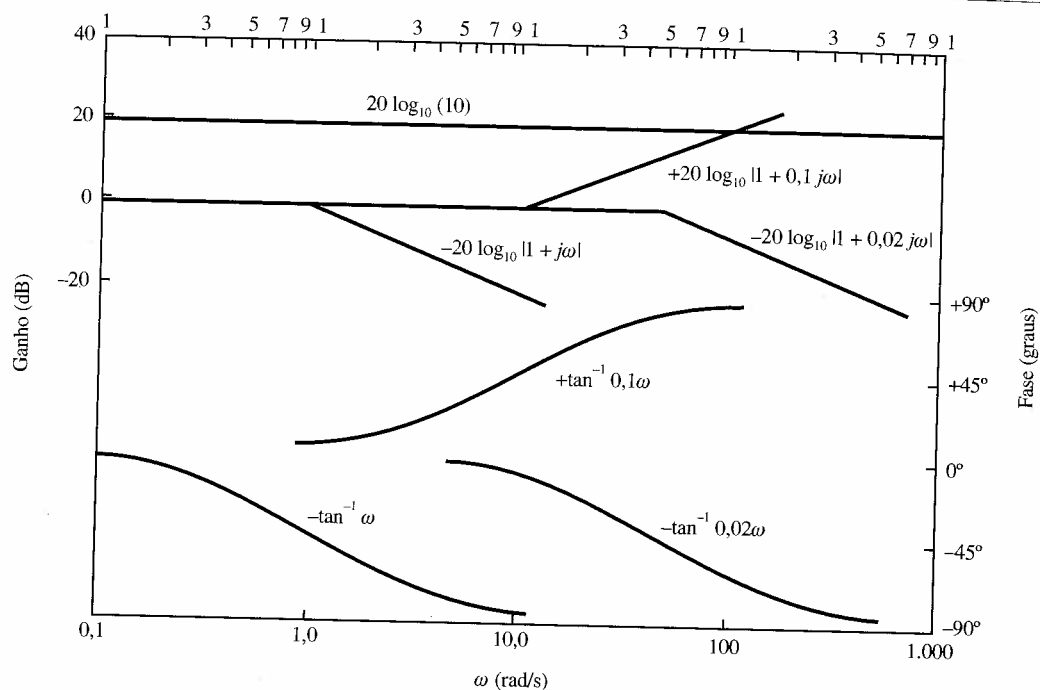
Os diagramas compostos são mostrados na Figura 14.8b. Eles são obtidos somando-se os termos individuais na Figura 14.8a. Note que para frequências  $\omega \ll 1$ , a inclinação da curva de magnitude é -40 dB/década. Em  $\omega = 1$  rad/s, que é a frequência de corte de zero, a curva de magnitude muda de inclinação -20 dB/década. Em  $\omega = 10$  rad/s, que é a frequência de corte do pólo, a inclinação da curva de magnitude volta a -40 dB/década.

A curva de fase composta inicia em  $-180^\circ$  devido ao pólo duplo na origem. Uma vez que a primeira frequência de corte encontrada é um zero, a curva de fase desloca-se em direção de  $-90^\circ$ . No entanto, antes que a fase composta alcance  $-90^\circ$ , o pólo com a frequência de corte  $\omega = 10$  rad/s começa a deslocar a curva de volta para  $-180^\circ$ . ■

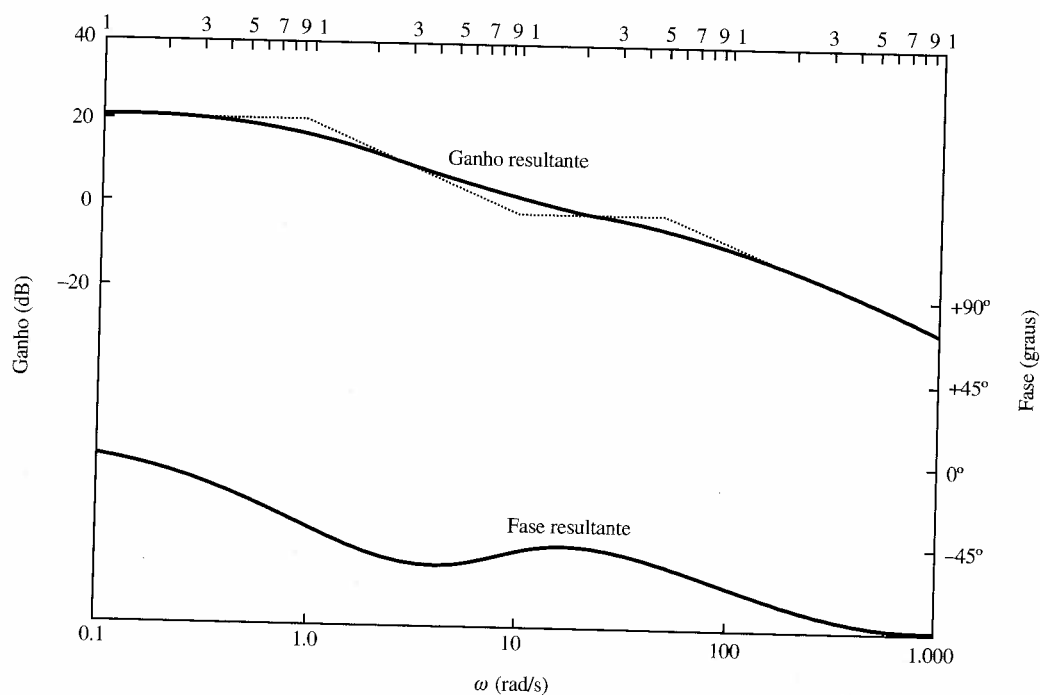
O Exemplo 14.4 ilustra a maneira de traçar os termos diretamente da forma  $K_0/(j\omega)^N$ . Para termos dessa forma, a inclinação inicial de  $-20N$  dB/década interceptará o eixo 0-dB na frequência de  $(K_0)^{1/N}$  rad/s; isto é,  $-20 \log_{10} |K_0/(j\omega)^N| = 0$  dB implica que  $K_0/(\omega)^N = 1$ , e portanto  $\omega = (K_0)^{1/N}$  rad/s. Note que a inclinação projetada da curva de magnitude no Exemplo 14.4 intercepta o eixo 0-dB em  $\omega = (25)^{1/2} = 5$  rad/s.

De forma semelhante, pode ser mostrado que para termos da forma  $K_0(j\omega)^N$ , a inclinação inicial de  $+20N$  dB/década vai interceptar o eixo 0-dB em uma frequência de  $\omega = (1/K_0)^{1/N}$  rad/s; isto é,  $+20 \log_{10} |K_0(j\omega)^N| = 0$  dB implica que  $K_0(\omega)^N = 1$ , e portanto  $\omega = (1/K_0)^{1/N}$  rad/s.

Aplicando-se os conceitos que acabamos de demonstrar, podemos normalmente traçar o diagrama de ganho de uma função de transferência sem dificuldade.

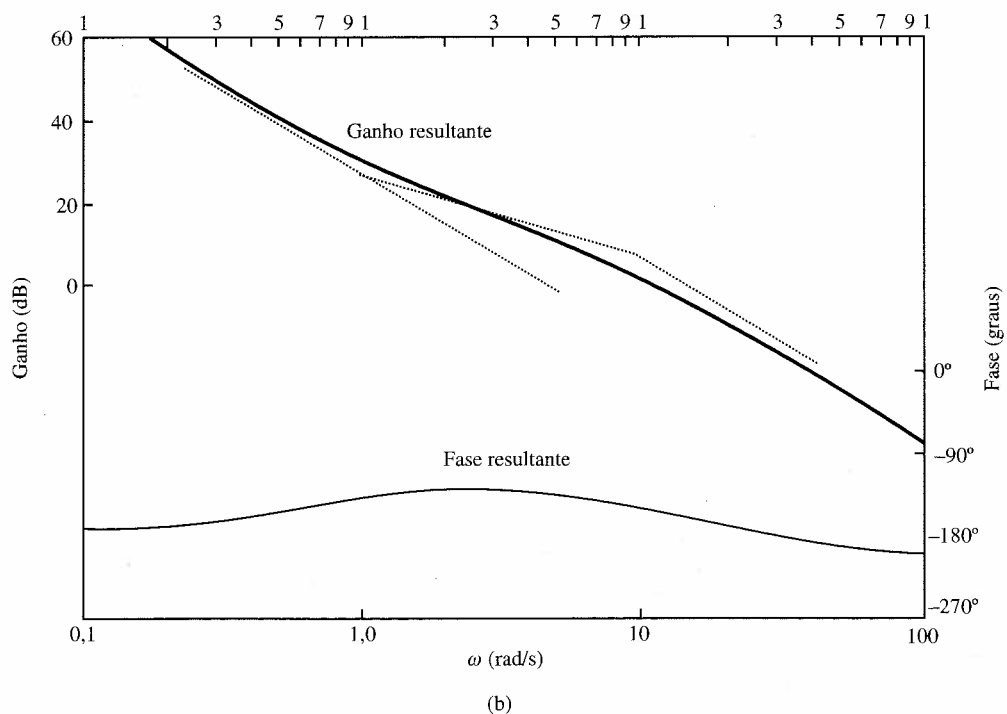
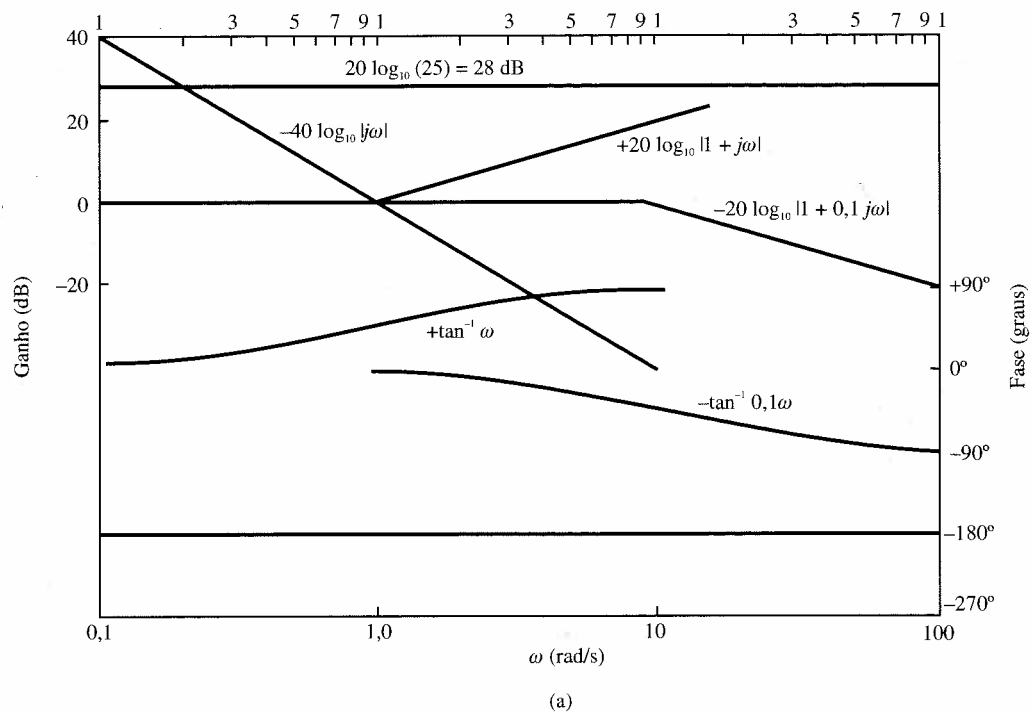


(a)



(b)

**Figura 14.7** (a) Componentes de magnitude e fase para os pólos e zeros da função de transferência no Exemplo 14.3; (b) Diagrama de Bode para a função de transferência no Exemplo 14.3.



**Figura 14.8** (a) Componentes de magnitude e fase para os pólos e zeros da função de transferência no Exemplo 14.4; (b) Diagrama de Bode para a função de transferência no Exemplo 14.4.

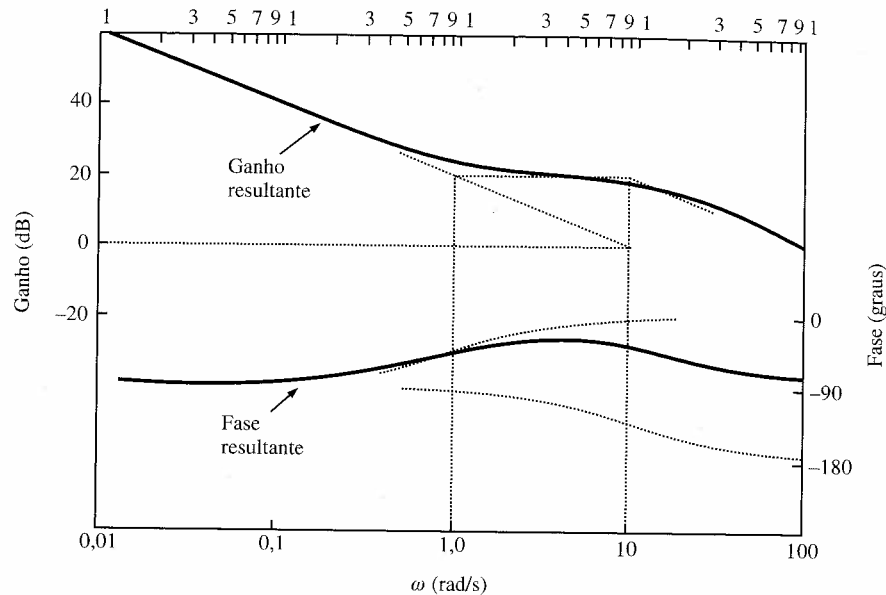


Figura 14.9 Diagrama de Bode para a função do Exemplo 14.5.

### Exemplo 14.5

Desejamos gerar o diagrama de Bode para a seguinte função de transferência:

$$G_v(j\omega) = \frac{100(j\omega + 1)}{j\omega(j\omega + 10)}$$

Essa função pode ser escrita de forma padrão como

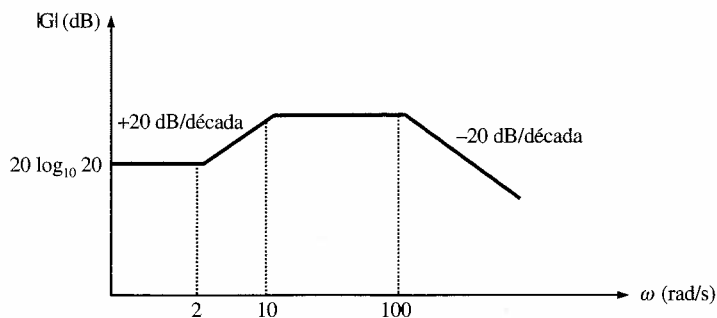
$$G_v(j\omega) = \frac{10(j\omega + 1)}{j\omega(0,1j\omega + 1)}$$

O diagrama de Bode para  $G_v(j\omega)$  é mostrado na Figura 14.9. A curva de magnitude pode ser traçada em um único passo como se segue. Uma vez que a função de transferência tem um fator de ganho independente da frequência de 10 e um pólo na origem, a curva de magnitude composta terá uma inclinação inicial de  $-20$  dB/década, que intercepta o eixo 0-dB em  $\omega = 10$  rad/s. A inclinação inicial de  $-20$  dB/década desloca na primeira frequência de corte, que, nesse caso, é um zero com uma frequência de corte  $\omega = 1$  rad/s. Uma vez que a magnitude para o zero é 0 dB para  $\omega \ll 1$  rad/s e  $+20$  dB/década para  $\omega \gg 1$  rad/s, a curva de magnitude composta desloca de  $-20$  dB/década a 0 dB/década ( $-20$  dB/década  $+ 20$  dB/década) em  $\omega = 1$  rad/s. A magnitude composta, que agora tem uma inclinação de 0 dB/década para  $\omega > 1$  rad/s, continua até que a próxima frequência de corte seja encontrada, que, nesse caso, é um pólo com frequência de corte  $\omega = 10$  rad/s. Já que a magnitude para o pólo é 0 dB/década para  $\omega < 10$  rad/s e  $-20$  dB/década para  $\omega > 10$  rad/s, a característica composta da magnitude muda de inclinação de 0 dB/década para  $-20$  dB/década (0 dB/década  $- 20$  dB/década) em  $\omega = 10$  rad/s. Essa inclinação final de  $-20$  dB/década continua para todos os valores de  $\omega > 10$  rad/s. Note que a curva de magnitude composta na Figura 14.9 foi ajustada para a diferença de 3 dB entre a curva real e as assíntotas nas frequências de corte. A fase devido ao pólo na origem é  $-90^\circ$ . Essa curva, juntamente com as duas curvas arcotangente, uma para o zero com frequência de corte  $\omega = 1$  rad/s e uma para o pólo com a frequência de corte de  $\omega = 10$  rad/s, são compostas para produzir a curva de fase composta, como mostrado na Figura 14.9. ■

### Exercícios

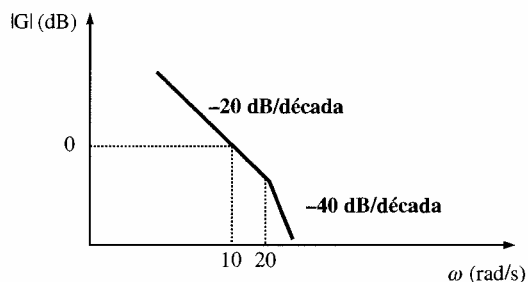
**E14.4** Esboce as assíntotas de magnitude do diagrama de Bode, marcando todas as inclinações críticas e pontos para a função

$$G(j\omega) = \frac{10^4(j\omega + 2)}{(j\omega + 10)(j\omega + 100)}$$

**Resp.:**

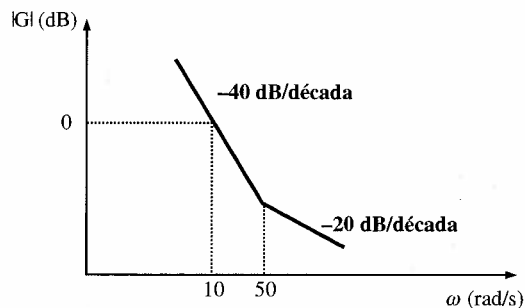
**E14.5** Esboce as assíntotas de magnitude do diagrama de Bode, marcando todas as inclinações críticas e pontos para a função

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(0,05j\omega + 1)}$$

**Resp.:**

**E14.6** Esboce as assíntotas de magnitude do diagrama de Bode, marcando todas as inclinações críticas e pontos para a função

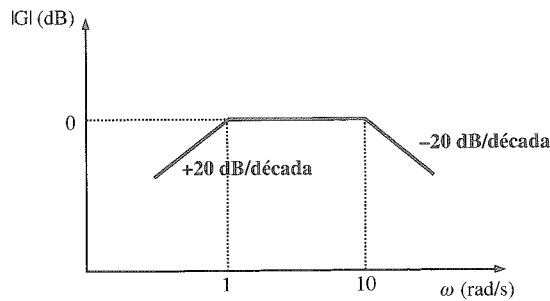
$$G(j\omega) = \frac{100(0,02j\omega + 1)}{(j\omega)^2}$$

**Resp.:**

**E14.7** Esboce as assíntotas de magnitude do diagrama de Bode, marcando todas as inclinações críticas e pontos para a função

$$G(j\omega) = \frac{10j\omega}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)}$$

Resp.:



### Exemplo 14.6

Desejamos gerar o diagrama de Bode para a seguinte função de transferência:

$$G_v(j\omega) = \frac{25j\omega}{(j\omega + 0,5)[(j\omega)^2 + 4j\omega + 100]}$$

Expressando essa função de forma padrão, obtém-se

$$G_v(j\omega) = \frac{0,5j\omega}{(2j\omega + 1)[(j\omega / 10)^2 + j\omega / 25 + 1]}$$

O diagrama de Bode é mostrado na Figura 14.10. A inclinação da assíntota em baixas frequências devido ao zero na origem é +20 dB/década, e essa assíntota intercepta a linha 0 dB em  $\omega = 1/K_0 = 2$  rad/s. Em  $\omega = 0,5$  rad/s, a inclinação muda de +20 dB/década para 0 dB/década devido à presença do pólo com uma frequência de corte em  $\omega = 0,5$  rad/s. O termo quadrático tem uma frequência de centro de  $\omega = 10$  rad/s (ou seja,  $\tau = 1/10$ ). Já que

$$2\zeta\tau = \frac{1}{25}$$

e

$$\tau = 0,1$$

então

$$\zeta = 0,2$$

Traçar a curva na Figura 14.6a com um quociente de amortecimento de  $\zeta = 0,2$  na frequência de corte  $\omega = 10$  rad/s completa a curva de magnitude composta para a função de transferência.

A assíntota de fase em baixas frequências é +90°, devido ao zero na origem. Essa assíntota, juntamente com a curva de fase para o pólo simples e a curva de fase para o termo quadrático, como definido na Figura 14.6b, estão combinadas para produzir a curva de fase total. ■



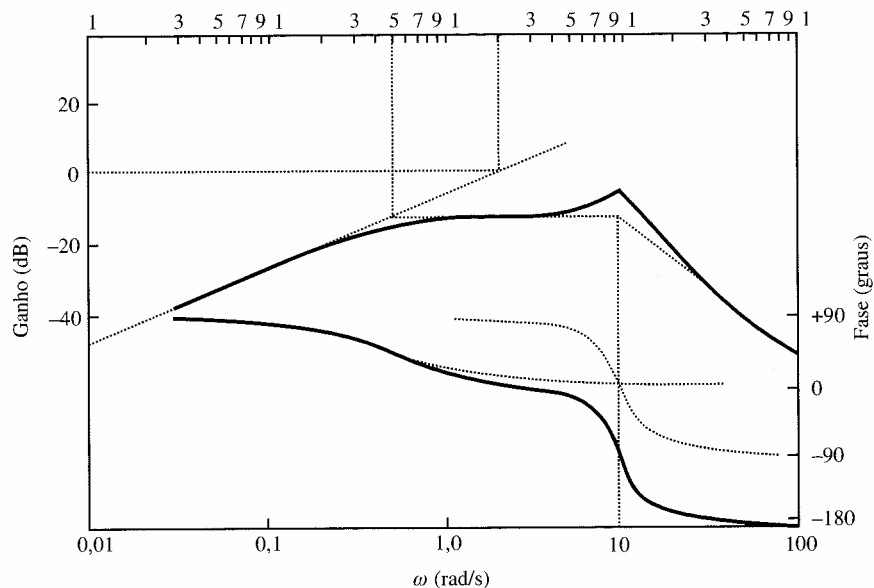


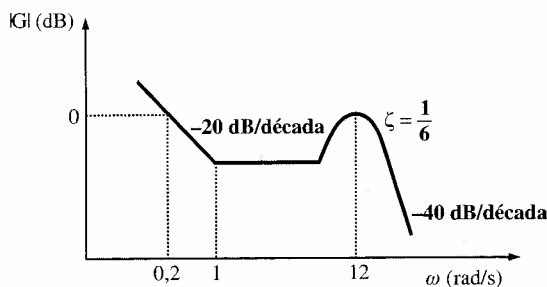
Figura 14.10 Diagrama de Bode para a função de transferência do Exemplo 14.6.

### Exercício

- E14.8** Dada a seguinte função  $G(j\omega)$ , esboce a característica da magnitude do diagrama de Bode, marcando todas as inclinações e pontos críticos.

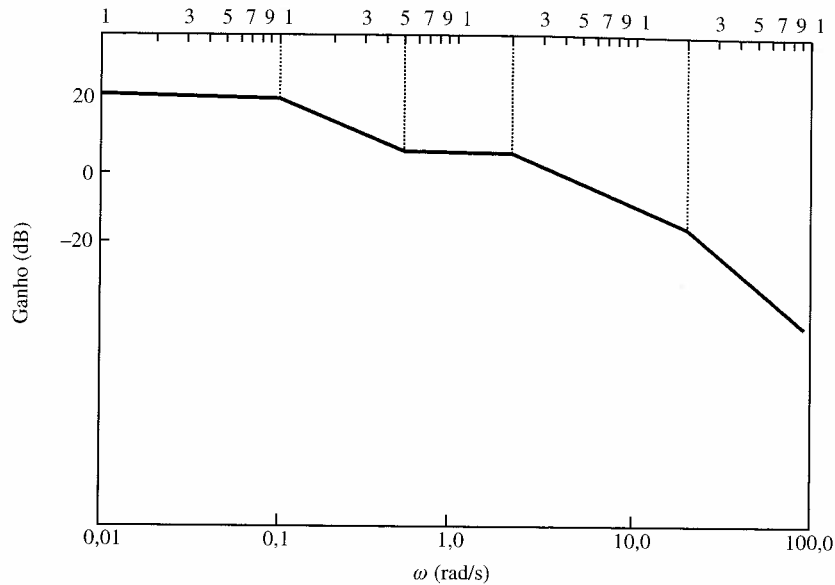
$$G(j\omega) = \frac{0,2(j\omega + 1)}{j\omega[(j\omega/12)^2 + j\omega/36 + 1]}$$

Resp.:



### Exemplo 14.7

Dada a característica da magnitude mostrada na Figura 14.11, desejamos determinar a função de transferência  $G_V(j\omega)$ .



**Figura 14.11** Diagrama com assíntotas de magnitude empregado no Exemplo 14.7.

Uma vez que a inclinação inicial é 0 dB/década, e o ganho é 20 dB, o fator  $K_0$  pode ser obtido da expressão

$$20 \text{ dB} = 20 \log_{10} K_0$$

e dessa maneira

$$K_0 = 10$$

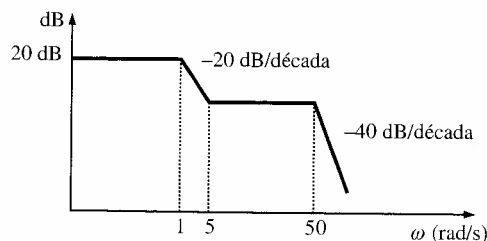
A inclinação  $-20 \text{ dB/década}$  iniciando em  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$  indica que o primeiro pólo tem uma frequência de corte em  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ , e portanto um dos fatores no denominador é  $(10j\omega + 1)$ . A inclinação muda de  $+20 \text{ dB/década}$  em  $\omega = 0,5 \text{ rad/s}$ , indicando que existe um zero presente com uma frequência de corte em  $\omega = 0,5 \text{ rad/s}$ , e portanto o numerador tem um fator do tipo  $(2j\omega + 1)$ . Dois pólos adicionais estão presentes com frequência de corte em  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  e  $\omega = 20 \text{ rad/s}$ . Portanto, a função de transferência composta é

$$G_v(j\omega) = \frac{10(2j\omega + 1)}{(10j\omega + 1)(0,5j\omega + 1)(0,05j\omega + 1)}$$

O leitor deve ter o cuidado de notar as implicações que esse exemplo tem para o projeto de circuitos. ■

### Exercícios

**E14.9** Determine a função de transferência  $G(j\omega)$  se a aproximação assintótica do diagrama de magnitude for conforme mostrado na Figura E14.9.



**Figura E14.9**

$$\text{Resp.: } G(j\omega) = \frac{10 \left( \frac{j\omega}{5} + 1 \right)}{(j\omega + 1) \left( \frac{j\omega}{50} + 1 \right)^2}$$

**E14.10** Determine a função de transferência  $G(j\omega)$  se a aproximação assintótica do diagrama de magnitude for o mostrado na Figura E14.10.

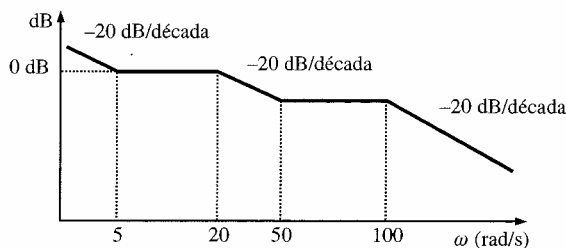


Figura E14.10

$$\text{Resp.: } G(j\omega) = \frac{5 \left( \frac{j\omega}{5} + 1 \right) \left( \frac{j\omega}{50} + 1 \right)}{j\omega \left( \frac{j\omega}{20} + 1 \right) \left( \frac{j\omega}{100} + 1 \right)}$$

### 14.3 Circuitos Ressonantes

Dois circuitos com características de frequência extremamente importantes são mostrados na Figura 14.12. A impedância de entrada para o circuito *RLC* em série é

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (14.16)$$

e a admitância de entrada para o circuito *RLC* em paralelo é

$$Y(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \quad (14.17)$$

Note que essas duas equações têm a mesma forma geral. Os termos imaginários em ambas as equações acima serão zero se

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

O valor de  $\omega$  que satisfaz tal equação é

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14.18)$$

e nesse valor de  $\omega$ , a impedância do circuito em série se torna

$$Z(j\omega_0) = R \quad (14.19)$$

e a admitância do circuito em paralelo é

$$Y(j\omega_0) = G \quad (14.20)$$

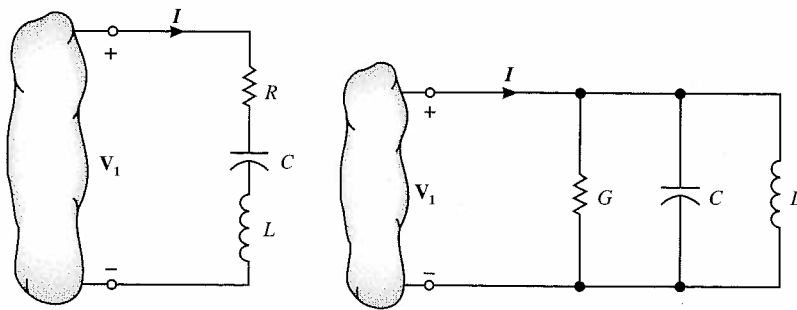


Figura 14.12 Circuitos RLC em série e em paralelo.

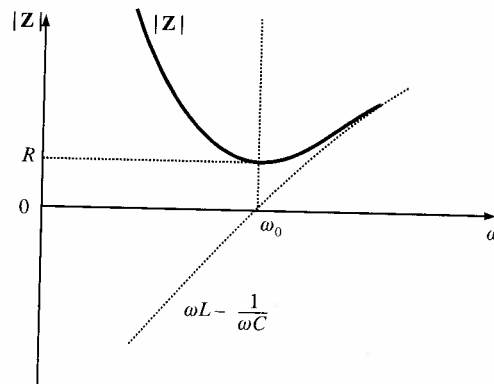
Essa frequência  $\omega_0$ , em que a impedância do circuito em série ou admitância do circuito em paralelo é puramente real, é chamada *frequência de ressonância*, e diz-se que os circuitos nessa frequência estão

em ressonância. Ressonância é uma questão muito importante em projetos de engenharia. Por exemplo, ao projetar os sistemas de controle de veículos espaciais, engenheiros devem assegurar que a frequência da ação de controle não excite as frequências de ressonância do veículo. Caso contrário, poderiam ocorrer oscilações que comprometeriam a estrutura do veículo.

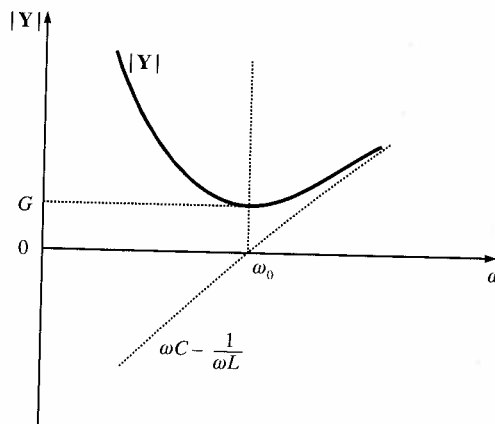
Em ressonância, a tensão e a corrente estão em fase, e portanto o ângulo de fase é zero e o fator de potência é unitário. Para conexões em série, na ressonância o valor da impedância é mínimo, e portanto a corrente é máxima para uma dada tensão. A Figura 14.13 ilustra a resposta em frequência de ambos os circuitos  $RLC$  em série e em paralelo. Note que, em baixas frequências, a impedância do circuito em série é dominada pelo termo capacitivo e a admitância do circuito em paralelo é dominada pelo termo indutivo. Em altas frequências, a impedância do circuito em série é dominada pelo termo indutivo e a admitância do circuito em paralelo é dominada pelo termo capacitivo.

Ressonância pode ser vista de outra perspectiva – a do diagrama de fasores. Mais uma vez, vamos considerar os casos em série e em paralelo juntos para ilustrar as similaridades entre eles. No caso em série, a corrente é comum a todos os elementos e, no caso em paralelo, a tensão é uma variável comum. Portanto, a corrente no circuito em série e a tensão no circuito em paralelo são empregadas como referência. O diagrama de fasores para ambos os circuitos é mostrado na Figura 14.14 para os três valores de frequência  $\omega < \omega_0$ ,  $\omega = \omega_0$  e  $\omega > \omega_0$ .

No caso em série, quando  $\omega < \omega_0$ ,  $V_C > V_L$ ,  $\theta_Z$  é negativo e a tensão  $V_1$  fica em atraso em relação à corrente. Se  $\omega = \omega_0$ ,  $V_L = V_C$ ,  $\theta_Z$  é zero, e a tensão  $V_1$  está em fase com a corrente. Se  $\omega > \omega_0$ ,  $V_L > V_C$ ,  $\theta_Z$  é positivo, e a tensão  $V_1$  precede a corrente. Afirmações semelhantes podem ser feitas para o caso em paralelo na Figura 14.14b. Por causa do relacionamento bem próximo entre a ressonância em série e em paralelo, como ilustrado no material anterior, vamos nos concentrar na discussão do caso em série nos desenvolvimentos a seguir.

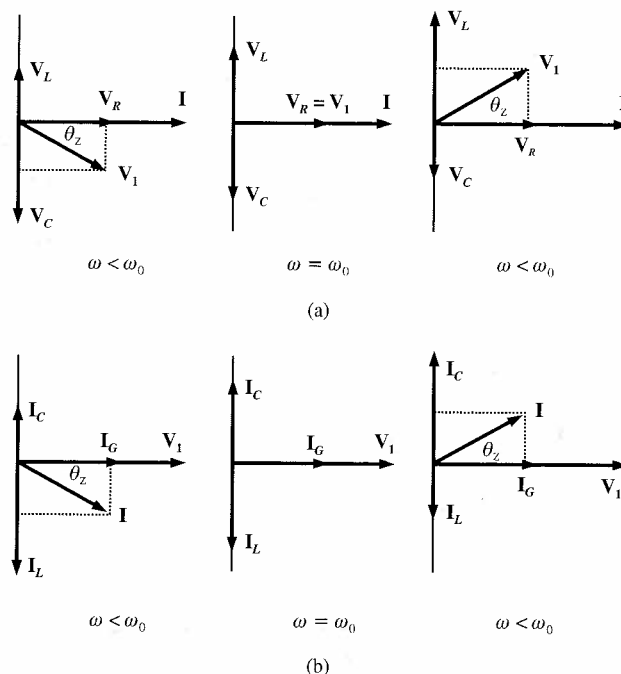


(a)



(b)

Figura 14.13 Resposta de frequência de circuitos  $RLC$  (a) em série e (b) em paralelo.



**Figura 14.14** Diagramas de fasores para (a) um circuito  $RLC$  em série e (b) um circuito  $RLC$  em paralelo.

Para o circuito em série, definimos o que é normalmente chamado de *fator de qualidade  $Q$*  como

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (14.21)$$

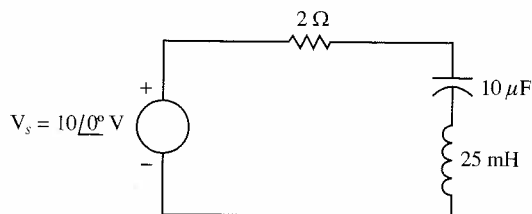
$Q$  é um fator de considerável importância em circuitos ressonantes, e suas implicações serão ilustradas no restante desta seção.

### Exemplo 14.8

Considere a rede mostrada na Figura 14.15. Vamos determinar a frequência de ressonância, as tensões sobre cada elemento em ressonância e o valor do fator de qualidade.

A frequência de ressonância é obtida da expressão

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(25)(10^{-3})(10)(10^{-6})}} \\ &= 2.000 \text{ rad/s} \end{aligned}$$



**Figura 14.15** Circuito em série.

Nessa frequência de ressonância

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{V}}{R} = 5 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Portanto,

$$V_R = (5 \angle 0^\circ)(2) = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$V_L = j\omega_0 L I = 250 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$V_C = \frac{I}{j\omega_0 C} = 250 \angle -90^\circ \text{ V}$$

Note a magnitude das tensões sobre o indutor e capacitor em relação à tensão de entrada. Note também que essas tensões são iguais e estão  $180^\circ$  fora de fase uma com respeito à outra. Logo, o diagrama de fasores para essa condição é mostrado na Figura 14.14a para  $\omega = \omega_0$ . O fator de qualidade  $Q$  derivado da Equação 14.21 é

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(2)(10^3)(25)(10^{-3})}{2} = 25$$

É interessante notar que as tensões sobre o indutor e capacitor podem ser escritas em termos de  $Q$  como

$$|V_L| = \omega_0 L |I| = \frac{\omega_0 L}{R} V_s = Q V_s$$

e

$$|V_C| = \frac{|I|}{\omega_0 C} = \frac{1}{\omega_0 C R} V_s = Q V_s$$

Essa análise indica que para uma dada corrente existe um aumento da tensão ressonante (sobre o indutor e capacitor) igual ao produto entre  $Q$  e a tensão aplicada. ■

### Exercícios

**E14.11** Dada a rede da Figura E14.11, determine o valor de  $C$  que levará o circuito à ressonância em 1.800 rad/s.

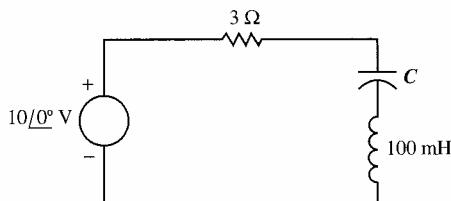


Figura E14.11

**Resp.:**  $C = 3,09 \mu\text{F}$ .

**E14.12** Dada a rede de E14.11, determine  $Q$  da rede e a magnitude da tensão sobre o capacitor.

**Resp.:**  $Q = 60$ ,  $|V_C| = 600 \text{ V}$ .

A impedância do circuito da Figura 14.12a é dada pela Equação 14.16, que pode ser expressa como uma admitância,

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{R[1 + j(1/R)(\omega L - 1/\omega C)]} \\ &= \frac{1}{R[1 + j(\omega L/R - 1/\omega CR)]} \\ &= \frac{1}{R[1 + jQ(\omega L/RQ - 1/\omega CRQ)]} \end{aligned} \quad (14.22)$$

Utilizando-se do fato que  $Q = \omega_0 L/R = 1/\omega_0 CR$ , a Equação 14.22 se torna

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R[1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]} \quad (14.23)$$

Uma vez que  $\mathbf{I} = \mathbf{YV}_1$  e a tensão sobre o resistor é  $\mathbf{V}_R = \mathbf{IR}$ , então

$$\frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{V}_1} = \mathbf{G}_v(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} \quad (14.24)$$

e a magnitude e fase são

$$M(\omega) = \frac{1}{[1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2]^{1/2}} \quad (14.25)$$

e

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (14.26)$$

Essas funções são mostradas na Figura 14.16. Repare que o circuito possui a forma de um filtro passa-faixa. A largura de faixa como mostrada é a diferença entre as duas frequências de meia-potência. Uma vez que a potência é proporcional ao quadrado da magnitude, essas duas frequências podem ser derivadas fazendo-se a magnitude  $M(\omega) = 1/\sqrt{2}$ ; isto é

$$\left| \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Portanto,

$$Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1 \quad (14.27)$$

Resolvendo essa equação, obtemos quatro frequências,

$$\omega = \pm \frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\left( \frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \quad (14.28)$$

Tomando somente os valores positivos, obtém-se

$$\begin{aligned} \omega_{LO} &= \omega_0 \left[ -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left( \frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \right] \\ \omega_{HI} &= \omega_0 \left[ \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left( \frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \right] \end{aligned} \quad (14.29)$$

Subtraindo essas duas equações, tem-se a largura de faixa como mostrado na Figura 14.16:

$$BW = \omega_{HI} - \omega_{LO} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (14.31)$$

e multiplicando-se as duas equações

$$\omega_0^2 = \omega_{LO} \omega_{HI} \quad (14.32)$$

que ilustra que a frequência de ressonância é a média geométrica de duas frequências de meia-potência. Note que as frequências de meia-potência são os pontos em que a curva de magnitude logarítmica está abaixo 3 dB de seu valor máximo. Portanto, a diferença entre tais frequências, que é obviamente a largura de faixa, é frequentemente chamada de largura de faixa de 3 dB.

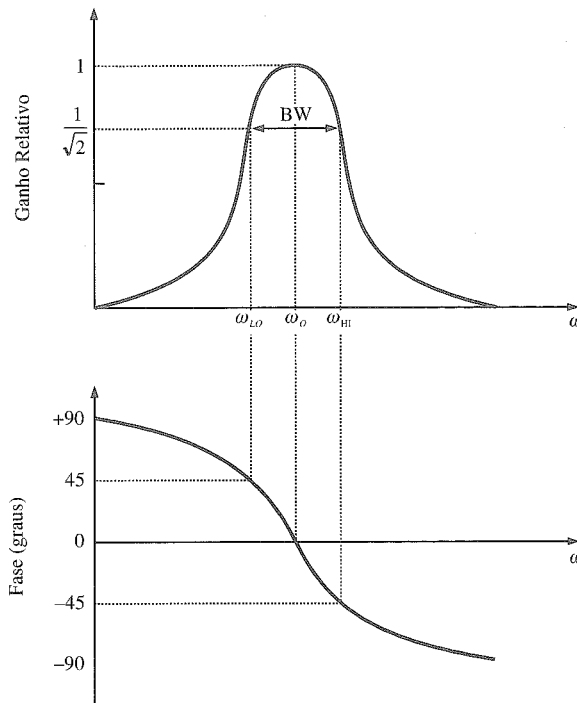


Figura 14.16 Curvas de magnitude e fase para a Equação 14.24.

### Exercício

**E14.13** Para a rede da Figura E14.11, calcule as frequências de meia-potência e a largura de faixa da rede.

**Resp.:**  $\omega_{HI} = 1.815 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{LO} = 1.785 \text{ rad/s}$ ,  $BW^1 = 30 \text{ rad/s}$ .

A Equação (14.21) indica a dependência de  $Q$  em relação a  $R$ . Um circuito em série com alto  $Q$  possui um valor pequeno de  $R$  e, como ilustraremos mais adiante, um circuito em paralelo com alto  $Q$  possui um valor relativamente elevado de  $R$ .

A Equação (14.31) ilustra que a largura de faixa é inversamente proporcional a  $Q$ . Logo, a seletividade do circuito é determinada pelo valor de  $Q$ . Um circuito com alto  $Q$  possui uma pequena largura de faixa, e portanto o circuito é muito seletivo. A maneira pela qual  $Q$  afeta a seletividade de frequências da rede está graficamente ilustrada na Figura 14.17. Desse modo, se passarmos um sinal com uma faixa de frequência larga através de um circuito com alto  $Q$ , somente os componentes de frequência dentro da faixa de passagem da rede não serão atenuados; isto é, a rede age como um filtro passa-faixa.

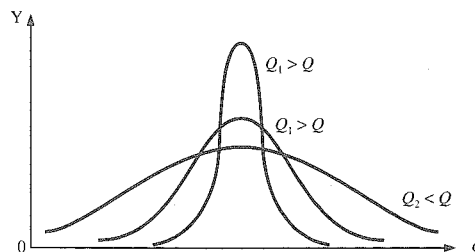


Figura 14.17 Resposta em frequência de rede como uma função de  $Q$ .

$Q$  possui um significado mais genérico que podemos explorar via uma análise de energia do circuito em série. Lembre-se do Capítulo 6 que um indutor armazena energia em seu campo magnético e um capacitor armazena energia no seu campo elétrico. Quando uma rede está em ressonância, existe uma troca contínua de energia entre o campo magnético do indutor e o campo elétrico do capacitor. Durante cada

<sup>1</sup> N.T.: BW indica *band width* que significa largura de faixa, em português.



meio-ciclo, a energia armazenada no campo magnético do indutor vai variar de zero a um valor máximo e de volta a zero novamente. O capacitor opera de maneira semelhante. A troca de energia se realiza do seguinte modo. Durante um quarto de ciclo, o capacitor consome energia tão rapidamente quanto o indutor a fornece, e durante o quarto de ciclo seguinte, o indutor consome energia à medida que ela é liberada pelo capacitor. Apesar de a energia armazenada em cada elemento estar continuamente variando, a energia total armazenada no circuito ressonante é constante e portanto invariável no tempo.

A fim de definirmos  $Q$  em termos de energia, suponhamos que a função de excitação tem frequência  $\omega_0$  e que

$$i(t) = I_M \cos \omega_0 t$$

A energia armazenada no indutor e capacitor são

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L I_M^2 \cos^2 \omega_0 t$$

e

$$w_C(t) = \frac{1}{2} \frac{I_M^2}{\omega_0^2 C} \sin^2 \omega_0 t$$

A energia total armazenada é então

$$\begin{aligned} w_s(t) &= w_L(t) + w_C(t) \\ &= \frac{1}{2} I_M^2 \left( L \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2 C} \sin^2 \omega_0 t \right) \end{aligned}$$

No entanto, uma vez que  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , a equação acima se reduz a

$$w_s(t) = \frac{1}{2} L I_M^2 = W_s \quad (14.33)$$

que é a energia máxima armazenada na ressonância.

A energia dissipada por ciclo pode ser derivada multiplicando-se a potência média consumida pelo resistor no período de um ciclo:

$$W_D = \left( \frac{1}{2} I_M^2 R \right) \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (14.34)$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{W_s}{W_D} &= \frac{\frac{1}{2} L I_M^2}{\frac{1}{2} I_M^2 R (2\pi/\omega_0)} \\ &= \frac{\omega_0 L}{R} \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \quad (14.35)$$

Usando-se a Equação 14.22, vemos que tal equação se torna

$$\frac{W_s}{W_D} = \frac{Q}{2\pi}$$

ou

$$Q = 2\pi \frac{W_s}{W_D} \quad (14.36)$$

onde  $W_s$  é a energia máxima armazenada em ressonância e  $W_D$  é a energia dissipada por ciclo. A importância dessa definição de  $Q$  se baseia no fato de que essa expressão é aplicável a sistemas acústicos, elétricos e mecânicos e, portanto, é geralmente considerada a definição básica de  $Q$ .

### Exemplo 14.9

Dado um circuito em série com  $R = 2 \, \Omega$ ,  $L = 2 \, \text{mH}$  e  $C = 5 \, \mu\text{F}$ , desejamos determinar a frequência de ressonância, o fator de qualidade e a largura de faixa para o circuito. Vamos então determinar a mudança em  $Q$  e na largura de faixa se  $R$  for mudado de 2 para  $0,2 \, \Omega$ .

Usando-se a Equação 14.18, temos

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{[(2)(10^{-3})(5)(10^{-6})]^{1/2}} \\ &= 10^4 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

e portanto a frequência de ressonância é  $10^4/2\pi = 1592 \text{ Hz}$ . O fator de qualidade é

$$\begin{aligned}Q &= \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(10^4)(2)(10^{-3})}{2} \\ &= 10\end{aligned}$$

e a largura de faixa é

$$\begin{aligned}\text{BW} &= \frac{\omega_0}{Q} = \frac{10^4}{10} \\ &= 10^3 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Se  $R$  for mudado para  $R = 0,2 \, \Omega$ , o novo valor de  $Q$  é 100, e portanto  $\text{BW} = 10^2 \text{ rad/s}$ . ■

### Exercícios

**E14.14** Um circuito em série é composto de  $R = 2 \, \Omega$ ,  $L = 40 \text{ mH}$  e  $C = 100 \, \mu\text{F}$ . Determine a largura de faixa desse circuito perto de sua frequência de ressonância.

*Resp.:*  $\text{BW} = 50 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_0 = 500 \text{ rad/s}$ .

**E14.15** Um circuito  $RLC$  em série possui as seguintes propriedades.  $R = 4 \, \Omega$ ,  $\omega_0 = 4.000 \text{ rad/s}$  e  $\text{BW} = 100 \text{ rad/s}$ . Determine os valores de  $C$  e  $L$ .

*Resp.:*  $C = 1,56 \, \mu\text{F}$ ,  $L = 40 \text{ mH}$ .

### Exemplo 14.10

Desejamos determinar os parâmetros  $R$ ,  $L$  e  $C$  para que o circuito na Figura 14.18 opere como um filtro passa-faixa com um  $\omega_0$  de  $1.000 \text{ rad/s}$  e uma largura de faixa de  $100 \text{ rad/s}$ .

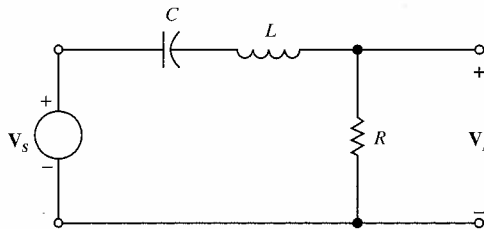


Figura 14.18 Circuito  $RLC$  em série.

O ganho de tensão para a rede é

$$\mathbf{G}_V(j\omega) = \frac{(R/L)j\omega}{(j\omega)^2 + (R/L)j\omega + 1/LC}$$

Dessa maneira,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e já que  $\omega_0 = 10^3$ ,

$$\frac{1}{LC} = 10^6$$

A largura de faixa é

$$\text{BW} = \frac{\omega_0}{Q}$$

Então

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{1.000}{100} = 10$$

No entanto,

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Portanto,

$$\frac{1.000L}{R} = 10$$

Note que temos duas equações nos três parâmetros do circuito  $R$ ,  $L$  e  $C$ . Dessa forma, se selecionarmos  $C = 1 \mu\text{F}$ , então

$$L = \frac{1}{10^6 C} = 1 \text{ H}$$

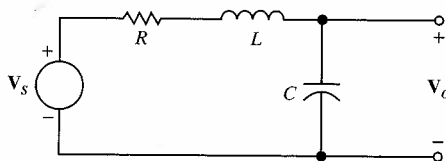
e

$$\frac{1.000(1)}{R} = 10$$

tem-se

$$R = 100 \Omega$$

Portanto, os parâmetros  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  e  $C = 1 \mu\text{F}$  produzirão as características apropriadas do filtro. ■



**Figura 14.19** Circuito em série ressonante.

No Exemplo 14.8, descobrimos que a tensão sobre o capacitor ou indutor no circuito ressonante em série poderia ser bastante alta. De fato, ela era igual a  $Q$  vezes a magnitude da fonte de tensão. Tendo isto em mente, vamos reexaminar essa rede como mostrado na Figura 14.19. A tensão de saída para a rede é

$$\mathbf{V}_o = \left( \frac{1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C} \right) \mathbf{V}_s$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{V}_s}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

A magnitude dessa tensão pode ser expressa como

$$|\mathbf{V}_o| = \frac{V_s}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \quad (14.37)$$

Em vista da discussão anterior, poderíamos assumir que o valor máximo da tensão de saída ocorreria na frequência de ressonância  $\omega_0$ . Vamos ver se esse pressuposto está correto. A frequência em que  $|\mathbf{V}_o|$  é máxima é o valor não-zero de  $\omega$ , que satisfaz a equação

$$\frac{d|\mathbf{V}_o|}{d\omega} = 0 \quad (14.38)$$

Se fizermos a operação indicada e resolvermos para  $\omega_{\max} \neq 0$ , obtemos

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} \right)^2} \quad (14.39)$$

Empregando-se as igualdades  $\omega_0^2 = 1/LC$  e  $Q = \omega_0 L/R$ , a expressão para  $\omega_{\max}$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\omega_{\max} &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{Q} \right)^2} \\ &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\end{aligned}\quad (14.40)$$

De modo claro,  $\omega_{\max} \neq \omega_0$ ; entretanto,  $\omega_0$  se aproxima muito de  $\omega_{\max}$  se  $Q$  for alto. Além disso, se substituirmos a Equação 14.40 na Equação 14.37 e usarmos os relacionamentos  $\omega_0^2 = 1/LC$  e  $\omega_0^2 R^2 C^2 = 1/Q^2$ , descobrimos que

$$|V_o|_{\max} = \frac{QV_s}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}} \quad (14.41)$$

Novamente, vemos que  $|V_o|_{\max} \approx QV_s$  se a rede possui um alto  $Q$ .

### Exemplo 14.11

Dada a rede da Figura 14.19, desejamos determinar  $\omega_0$  e  $\omega_{\max}$  para  $R = 50 \, \Omega$  e  $R = 1 \, \Omega$  caso  $L = 50 \, \text{mH}$  e  $C = 5 \, \mu\text{F}$ .

Os parâmetros da rede produzem

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(5)(10^{-2})(5)(10^{-6})}} \\ &= 2.000 \, \text{rad/s}\end{aligned}$$

Se  $R = 50 \, \Omega$ , então

$$\begin{aligned}Q &= \frac{\omega_0 L}{R} \\ &= \frac{(2.000)(0,05)}{50} \\ &= 2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\omega_{\max} &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\ &= 2.000 \sqrt{1 - \frac{1}{8}} \\ &= 1.871 \, \text{rad/s}\end{aligned}$$

Se  $R = 1 \, \Omega$ , então  $Q = 100$  e  $\omega_{\max} = 2.000 \, \text{rad/s}$ .

Um gráfico de  $|V_o|$  versus a frequência para a rede com  $R = 50 \, \Omega$  e  $R = 1 \, \Omega$  é mostrado na Figura 14.20a e b, respectivamente. Note que quando o  $Q$  da rede é pequeno, a resposta em frequência não é seletiva e  $\omega_0 \neq \omega_{\max}$ . No entanto, se  $Q$  for grande, a resposta em frequência será muito seletiva e  $\omega_0 \approx \omega_{\max}$ .

Até este ponto, focalizamos a maioria da discussão no circuito ressonante em série. Deveríamos lembrar, no entanto, que as equações para a impedância do circuito em série e a admitância do circuito em paralelo são semelhantes. Portanto, as redes possuem propriedades semelhantes, como vamos ilustrar nos exemplos a seguir.

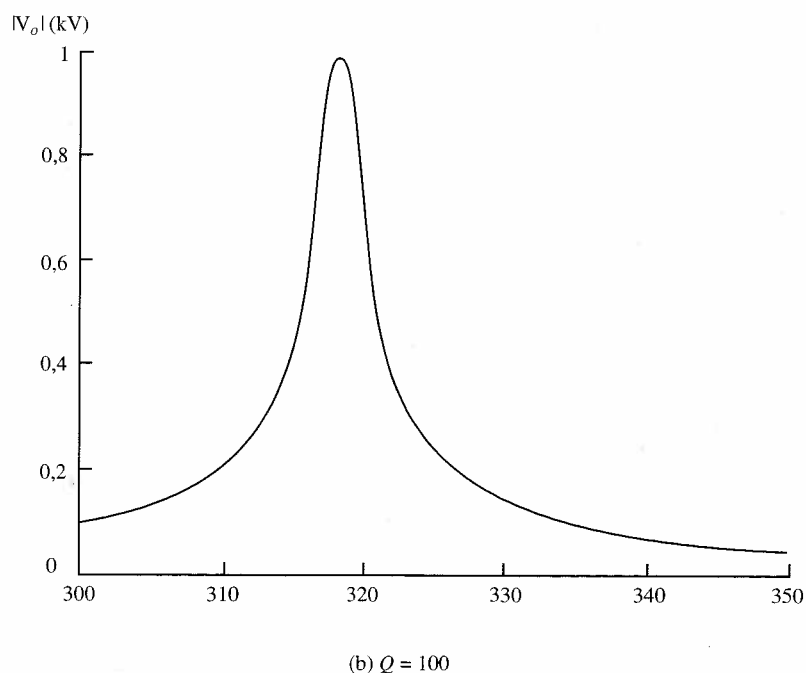
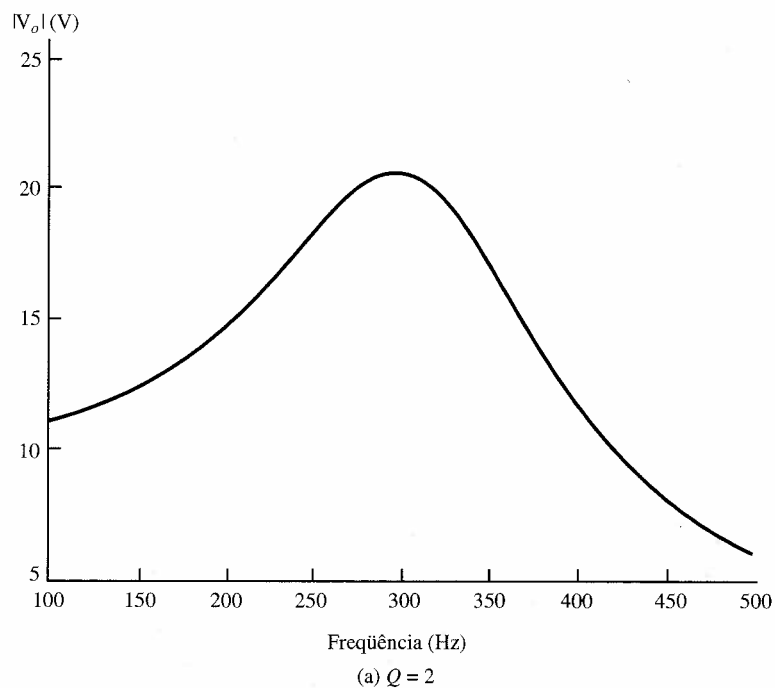
Considere a rede mostrada na Figura 14.21. A corrente de fonte  $I_s$  pode ser expressa como

$$\begin{aligned}I_s &= I_G + I_C + I_L \\ &= V_s G + j\omega C V_s + \frac{V_s}{j\omega L} \\ &= V_s \left[ G + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]\end{aligned}$$

Quando a rede está em ressonância,

$$\mathbf{I}_s = G\mathbf{V}_s$$

isto é, toda a corrente da fonte flui através da condutância  $G$ . Será que isto significa que não há corrente em  $L$  ou  $C$ ? Definitivamente não!  $\mathbf{I}_C$  e  $\mathbf{I}_L$  são iguais em magnitude, porém  $180^\circ$  fora de fase um com o outro. Logo,  $\mathbf{I}_x$ , como mostrado na Figura 14.21, é zero. Além disso, se  $G = 0$ , a corrente de fonte é zero. Na verdade, o que está acontecendo é uma troca de energia entre o campo elétrico do capacitor e o campo magnético do indutor. À medida que um aumenta, o outro diminui, e vice-versa.



**Figura 14.20** Diagramas de resposta em frequência para a rede da Figura 14.19 com (a)  $R = 50 \Omega$  e (b)  $R = 1 \Omega$ .

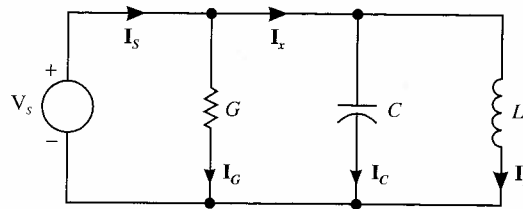


Figura 14.21 Circuito RLC em paralelo.

### Exemplo 14.12

A rede da Figura 14.21 possui os seguintes parâmetros:

$$V_s = 120\angle 0^\circ \text{ V}, G = 0,01 \text{ S}, C = 600 \mu\text{F} \text{ e } L = 120 \text{ mH}.$$

Se a fonte opera na frequência de ressonância da rede, calcule todas as correntes de ramos. A frequência de ressonância para a rede é

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(120)(10^{-3})(600)(10^{-6})}} \\ &= 117,85 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Nessa frequência

$$Y_C = j\omega_0 C = j7,07 \times 10^{-2} \text{ S}$$

e

$$Y_L = -j\left(\frac{1}{\omega_0 L}\right) = -j7,07 \times 10^{-2} \text{ S}$$

As correntes de ramo são então

$$I_G = GV_s = 1,2\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$I_C = Y_C V_s = 8,49\angle 90^\circ \text{ A}$$

$$I_L = Y_L V_s = 8,49\angle -90^\circ \text{ A}$$

e

$$I_s = I_G + I_C + I_L = I_G = 1,2\angle 0^\circ \text{ A}$$

Como a análise indica, a fonte fornece somente as perdas do elemento resistivo. Além disso, a tensão e a corrente da fonte estão em fase, e portanto o fator de potência é unitário. ■

### Exemplo 14.13

Dado o circuito RLC em paralelo da Figura 14.22,

(a) Derive a expressão para a frequência de ressonância, as frequências de meia-potência, a largura de faixa e o fator de qualidade para a impedância de transferência  $V_{\text{out}}/I_{\text{in}}$  em termos dos parâmetros do circuito  $R$ ,  $L$  e  $C$ .

(b) Calcule as grandezas do item (a) se  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$  e  $C = 100 \mu\text{F}$ .

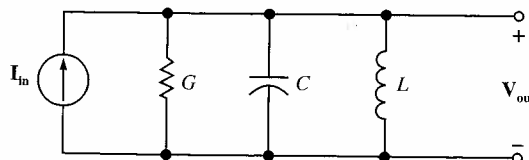


Figura 14.22 Circuito utilizado no Exemplo 14.13.

(a) A tensão de saída pode ser escrita como

$$\mathbf{V}_{\text{out}} = \frac{\mathbf{I}_{\text{in}}}{\mathbf{Y}_T}$$

e portanto a magnitude da característica da transferência pode ser expressa como

$$\left| \frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{I}_{\text{in}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1/R^2) + (\omega C - 1/\omega L)^2}}$$

A característica de transferência é um máximo na frequência de ressonância

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14.42)$$

e nessa frequência

$$\left| \frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{I}_{\text{in}}} \right|_{\text{max}} = R \quad (14.43)$$

Como demonstramos anteriormente, nas frequências de meia-potência a magnitude é igual a  $1/\sqrt{2}$  de seu valor máximo, e desse modo as frequências de meia-potência podem ser obtidas da expressão

$$\frac{1}{\sqrt{(1/R^2) + (\omega C - 1/\omega L)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Resolvendo-se essa equação e tomando somente os valores positivos de  $\omega$ , tem-se

$$\omega_{\text{LO}} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}} \quad (14.44)$$

e

$$\omega_{\text{HI}} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}} \quad (14.45)$$

Subtraindo-se essas duas frequências de meia potência, tem-se a largura de faixa

$$\begin{aligned} \text{BW} &= \omega_{\text{HI}} - \omega_{\text{LO}} \\ &= \frac{1}{RC} \end{aligned} \quad (14.46)$$

Portanto, o fator de qualidade é

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0}{\text{BW}} \\ &= \frac{RC}{\sqrt{LC}} \\ &= R\sqrt{\frac{C}{L}} \end{aligned} \quad (14.47)$$

Usando-se as equações 14.42, 14.46 e 14.47, podemos escrever as Equações 14.44 e 14.45 como

$$\omega_{\text{LO}} = \omega_0 \left[ \frac{-1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1} \right] \quad (14.48)$$

$$\omega_{\text{HI}} = \omega_0 \left[ \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1} \right] \quad (14.49)$$

(b) Usando-se os valores dados para os componentes do circuito, achamos que

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(10^{-2})(10^{-4})}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

As frequências de meia-potência são

$$\begin{aligned}\omega_{LO} &= \frac{-1}{(2)(10^3)(10^4)} + \sqrt{\frac{1}{(2)(10^{-1})} + 10^6} \\ &= 995 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

e

$$\omega_{HI} = 1.005 \text{ rad/s}$$

Logo, a largura de faixa é

$$BW = \omega_{HI} - \omega_{LO} = 10 \text{ rad/s}$$

e

$$\begin{aligned}Q &= 10^3 \sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-2}}} \\ &= 100\end{aligned}$$

### Exercícios

**E14.16** Um circuito *RLC* em paralelo possui os seguintes parâmetros:  $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 20 \text{ mH}$  e  $C = 150 \text{ }\mu\text{F}$ . Determine a frequência de ressonância, o  $Q$ , e a largura de faixa do circuito.

*Resp.:*  $\omega_0 = 577 \text{ rad/s}$ ,  $Q = 173$  e  $BW = 3,33 \text{ rad/s}$ .

**E14.17** Um circuito *RLC* em paralelo possui os seguintes parâmetros:  $R = 6 \text{ k}\Omega$ ,  $BW = 1.000 \text{ rad/s}$  e  $Q = 120$ . Determine os valores de  $L$ ,  $C$  e  $\omega_0$ .

*Resp.:*  $L = 417,5 \text{ }\mu\text{H}$ ,  $C = 0,167 \text{ }\mu\text{F}$  e  $\omega_0 = 119,760 \text{ rad/s}$ .

### Exemplo 14.14

Um rádio estéreo está ajustado para 98 MHz na faixa FM. O botão de ajuste controla um capacitor variável em um circuito paralelo ressonante. Se a indutância do circuito for  $0,1 \text{ }\mu\text{H}$  e  $Q = 120$ , determine os valores de  $C$  e  $G$ .

Usando-se a expressão para a frequência de ressonância, obtemos

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{\omega_0^2 L} \\ &= \frac{1}{(2\pi \times 98 \times 10^6)^2 (0,1 \times 10^{-6})} \\ &= 26,4 \text{ pF}\end{aligned}$$

A condutância é

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{\omega_0 LQ} \\ &= \frac{1}{(2\pi \times 98 \times 10^6)^2 (10^{-7})(120)} \\ &= 135 \text{ }\mu\text{S}\end{aligned}$$



**Exemplo 14.15**

Considerando-se os dados do Exemplo 14.14, suponhamos que outra estação de rádio FM na vizinhança esteja transmitindo a 98,1 MHz. Vamos determinar o valor relativo da tensão sobre o circuito ressonante nessa frequência comparado ao 98 MHz, assumindo-se que a corrente produzida por ambos os sinais tem a mesma amplitude.

Na frequência de ressonância de 98 MHz, a tensão sobre o circuito é

$$V = \frac{I}{Y} = \frac{I}{(135)(10^{-6})} = 7.407I$$

Na 98,1 MHz, a tensão é

$$V = \frac{I}{\sqrt{G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}}$$

onde

$$G = 135\mu S$$

$$\omega C = (2\pi \times 98,1 \times 10^6)(26,4 \times 10^{-12}) = 16.272 \times 10^{-6} S$$

$$\omega L = (2\pi \times 98,1 \times 10^6)(10^{-7}) = 61,6381 \Omega$$

e portanto

$$\frac{1}{\omega L} = 16.224 \times 10^{-6} S$$

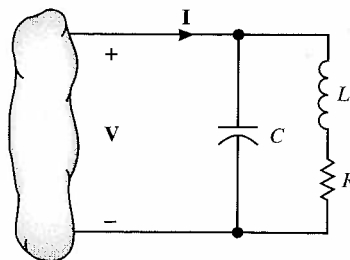
Dessa forma

$$V = \frac{I}{(14.650)(10^{-6})} = 6.979I$$

Essa análise indica que a magnitude da tensão sobre o circuito ressonante produzida pelo sinal 98 MHz é quase idêntica à produzida pelo sinal 98,1 MHz. Portanto, a rede não é muito seletiva. ■

De um modo geral, a resistência do enrolamento de um indutor não pode ser ignorada, e dessa maneira um circuito em paralelo ressonante mais prático é mostrado na Figura 14.23. A admitância de entrada do circuito é

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} \\ &= j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ &= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) \end{aligned}$$



**Figura 14.23** Um circuito em paralelo ressonante.

A frequência de ressonância em que a admitância é puramente real é

$$\omega_r C - \frac{\omega_r L}{R^2 + \omega_r^2 L^2} = 0 \quad (14.50)$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

**Exemplo 14.16**

Dado o circuito tanque da Figura 14.24, vamos determinar  $\omega_0$  e  $\omega_r$  para  $R = 50 \, \Omega$  e  $R = 5 \, \Omega$ .

Usando-se os valores dos parâmetros da rede, obtemos

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(0,05)(5)(10^{-6})}} \\ &= 2.000 \text{ rad / s} \\ &= 318,3 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Se  $R = 50 \, \Omega$ , então

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(0,05)(5)(10^{-6})} - \left(\frac{50}{0,05}\right)^2} \\ &= 1.732 \text{ rad / s} \\ &= 275,7 \text{ Hz} \end{aligned}$$

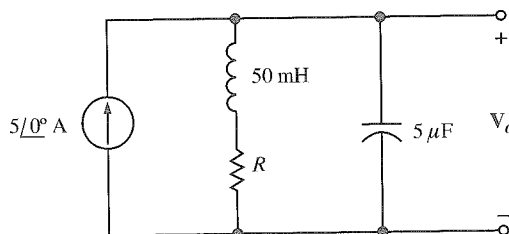


Figura 14.24 Circuito tanque usado no Exemplo 14.16.

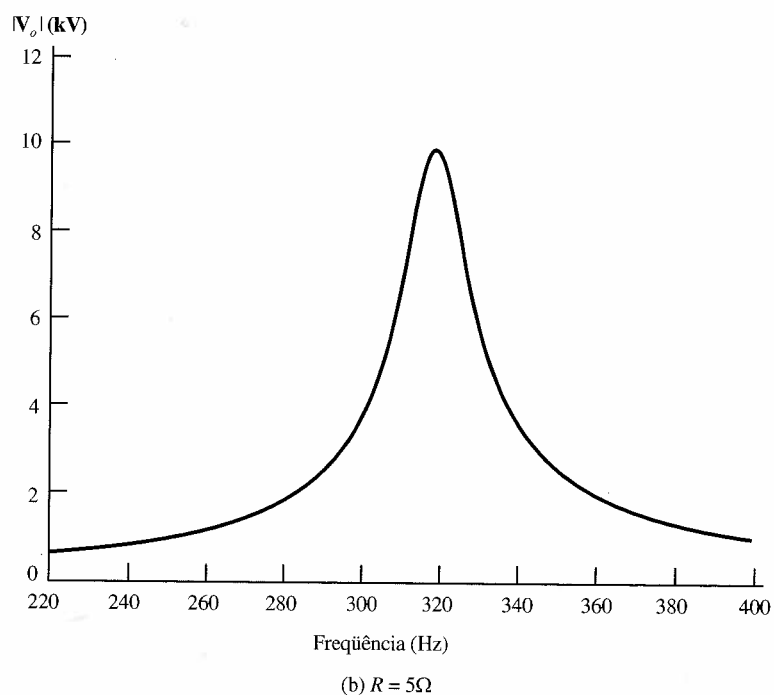
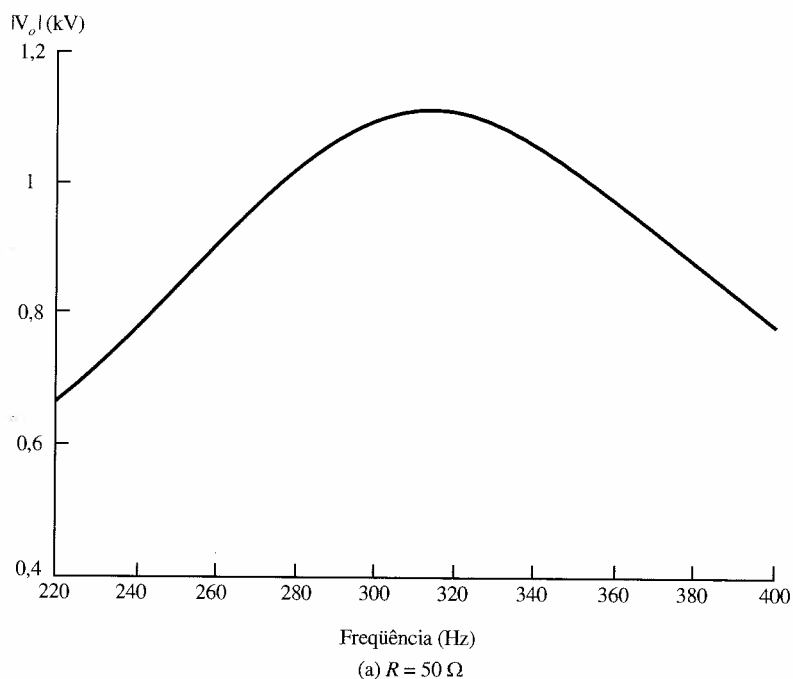
Se  $R = 5 \, \Omega$ , então

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\frac{1}{(0,05)(5)(10^{-6})} - \left(\frac{5}{0,05}\right)^2} \\ &= 1.997 \text{ rad / s} \\ &= 317,9 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Repare que quando  $R \rightarrow 0$ ,  $\omega_r \rightarrow \omega_0$ . Esse fato é também ilustrado nas curvas de resposta em frequência na Figura 14.25a e b, onde temos traçado  $|V_o|$  versus frequência para  $R = 50 \, \Omega$  e  $R = 5 \, \Omega$ , respectivamente. ■

Vamos agora tentar relacionar o assunto exposto a respeito de ressonância e os diagramas de Bode que apresentamos anteriormente. A admitância para o circuito ressonante em série é

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{R + j\omega L + 1/j\omega C} \\ &= \frac{j\omega C}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1} \end{aligned} \quad (14.51)$$



**Figura 14.25** Curvas de resposta em frequência para o Exemplo 14.16.

A forma padrão para o fator quadrático é

$$(j\omega\tau)^2 + 2\xi\omega\tau j + 1$$

onde  $t = 1/\omega_0$ , e desse modo em geral o fator quadrático pode ser escrito como

$$\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi\omega}{\omega_0} j + 1 \quad (14.52)$$

Se compararmos agora essa forma do fator quadrático com o denominador de  $Y(j\omega)$ , achamos que

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_0} = CR$$

e portanto

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Entretanto, da Equação 14.21,

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

e dessa forma

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \quad (14.53)$$

Para ilustrar o significado dessa equação, considere o diagrama de Bode para a função  $Y(j\omega)$ . O diagrama possui uma inclinação inicial de +20 dB/década devido ao zero na origem. Se  $\zeta > 1$ , os pólos representados pelo fator quadrático no denominador serão responsáveis pela atenuação em altas frequências onde a inclinação da característica será -20 dB/década. Repare na Equação 14.53 que se  $\zeta > 1$ , o  $Q$  do circuito é muito pequeno. No entanto, se  $0 < \zeta < 1$ , a resposta em frequência terá um pico como mostrado na Figura 14.6a, e o formato do pico será controlado por  $\zeta$ . Se  $\zeta$  for muito pequeno, o pico da resposta em frequência é muito estreito, o  $Q$  do circuito é muito grande e o circuito é muito seletivo na filtragem do sinal de entrada. A Equação 14.53 juntamente com a Figura 14.17 ilustram as conexões entre a resposta em frequência, o  $Q$  e o  $\zeta$  de uma rede.

## 14.4 Mudança de Escala

No decorrer deste livro empregamos um número considerável de exemplos para ilustrar os conceitos discutidos. Em muitos casos, os valores dos parâmetros não foram realísticos, entretanto foram escolhidos para simplificar a apresentação. Nesta seção vamos ilustrar como mudar a *escala* dos circuitos para torná-los mais realísticos.

Existem duas maneiras de se mudar a escala de um circuito: *mudança de escala por magnitude ou impedância* e *mudança de escala por frequência*. Para se mudar a escala de um circuito por magnitude, simplesmente multiplicamos a impedância de cada elemento por um fator de escala  $K_M$ . Portanto, um resistor  $R$  se torna  $K_MR$ . Multiplicando-se a impedância de um indutor  $j\omega L$  por  $K_M$ , obtém-se um novo indutor  $K_M L$ , e multiplicando-se a impedância de um capacitor  $1/j\omega C$  por  $K_M$ , obtém-se um novo capacitor  $C/K_M$ . Portanto, na mudança de escala por magnitude,

$$\begin{aligned} R' &\rightarrow K_M R \\ L' &\rightarrow K_M L \\ C' &\rightarrow \frac{C}{K_M} \end{aligned} \quad (14.54)$$

uma vez que

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{K_M LC/K_M}} = \omega_0$$

e  $Q'$  é

$$Q' = \frac{\omega'_0 L'}{R'} = \frac{\omega_0 K_M L}{K_M R} = Q$$

A frequência de ressonância, o fator de qualidade e, portanto, a largura de faixa ficam inalteradas pela mudança de escala.

Na mudança de escala por frequência, o fator de escala é denominado  $K_F$ . O resistor é independente da frequência e, portanto, fica inalterado nessa mudança de escala. O novo indutor  $L'$ , que possui a mesma impedância na nova escala de frequência  $\omega_1'$ , deve satisfazer a equação

$$j\omega_1 L = j\omega_1' L'$$

onde  $\omega_1' = K_F \omega_1$ . Logo,

$$j\omega_1 L = jK_F \omega_1 L'$$

Desse modo, o novo indutor é

$$L' = \frac{L}{K_F}$$

Usando-se uma argumentação semelhante, achamos que

$$C' = \frac{C}{K_F}$$

Portanto, para se mudar a escala por frequência de um fator  $K_F$ ,

$$R' \rightarrow R$$

$$L' \rightarrow \frac{L}{K_F}$$

$$C' \rightarrow \frac{C}{K_F}$$

(14.55)

Note que

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{(L/K_F)(C/K_F)}} = K_F \omega_0$$

e

$$Q' = \frac{K_F \omega_0 L}{RK_F} = Q$$

e portanto

$$BW' = K_F (BW)$$

Dessa forma, a frequência de ressonância e a largura de faixa são afetadas pela mudança de escala.

#### Exemplo 14.17

Se os valores dos parâmetros do circuito da Figura 14.23 forem  $R = 2 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  e  $C = \frac{1}{2} \text{ F}$ , vamos determinar os valores dos elementos, caso o circuito seja mudado de escala por magnitude de um fator  $K_M = 10^2$  e mudado de escala por frequência de um fator  $K_F = 10^6$ .

A mudança de escala por magnitude produz

$$R' = 2K_M = 200 \Omega$$

$$L' = (1)K_M = 100 \text{ H}$$

$$C' = \frac{1}{2} \frac{1}{K_M} = \frac{1}{200} \text{ F}$$

Aplicando-se a mudança de escala por frequência a esses valores, obtém-se os seguintes resultados:

$$R'' = 200 \, \Omega$$

$$L'' = \frac{100}{K_F} = 100 \, \mu\text{H}$$

$$C'' = \frac{1}{200} \frac{1}{K_F} = 0,005 \, \mu\text{F}$$

### Exercício

**E14.18** Uma rede  $RLC$  possui os seguintes parâmetros:  $R = 10 \, \Omega$ ,  $L = 1 \, \text{H}$  e  $C = 2 \, \text{F}$ . Determine os valores dos elementos do circuito, caso o circuito seja mudado de escala por magnitude de um fator de 100 e mudado de escala por um fator de 10.000.

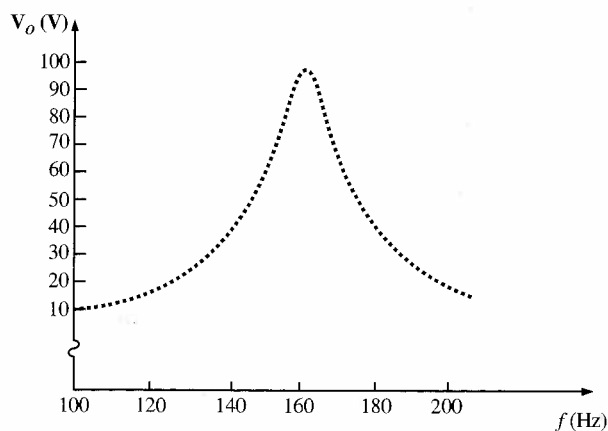
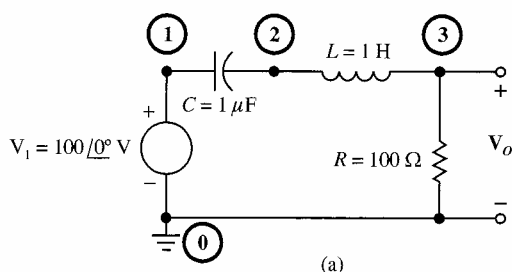
**Resp.:**  $R = 1 \, \text{k}\Omega$ ,  $L = 10 \, \text{mH}$  e  $C = 2 \, \mu\text{F}$ .

## 14.5 Resposta em Frequência Usando PSPICE

O programa de análise de circuitos PSPICE pode ser usado para calcular a resposta em frequência de redes e representá-las mediante rotinas gráficas. Os exemplos a seguir ilustram seu uso.

### Exemplo 14.18

Vamos examinar a rede da Figura 14.26a, que está preparada para análise PSPICE. Desejamos escrever o programa PSPICE que trace o gráfico para a tensão de saída usando 20 pontos sobre o intervalo de frequência de 100 a 200 Hz.



**Figura 14.26** Análise PSPICE de um circuito  $RLC$  em série.

O programa PSPICE está listado abaixo.

EXAMPLE 14.18

```
V1 1 0 AC 100 0
C 1 2 1UF
R 3 0 100
L 2 3 1H
.AC LIN 20 100 200
.PROBE
.END
```

O gráfico de saída está na Figura 14.26b. Note que a frequência de ressonância do circuito, calculada como sendo 160 Hz, é mostrada no gráfico. ■

### Exemplo 14.19

Considere a rede mostrada na Figura 14.27 que foi preparada para uma análise PSPICE. Desejamos escrever um programa PSPICE para traçar a tensão de saída sobre o intervalo de frequência de 1 Hz a 10 MHz usando cinco pontos por década.

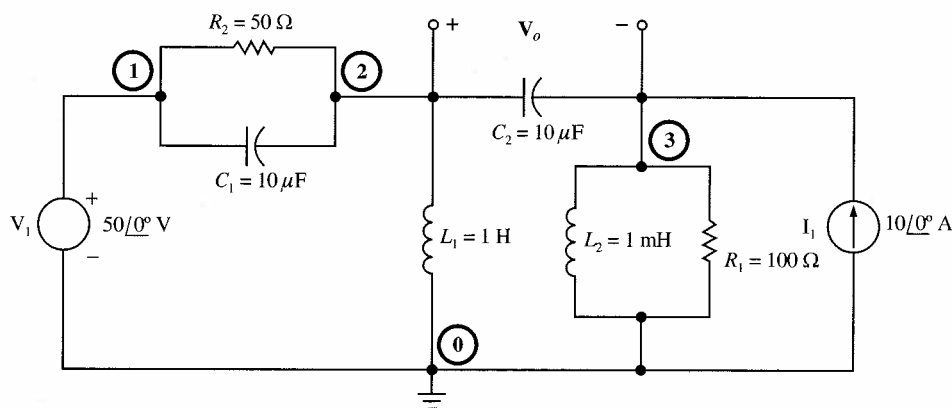


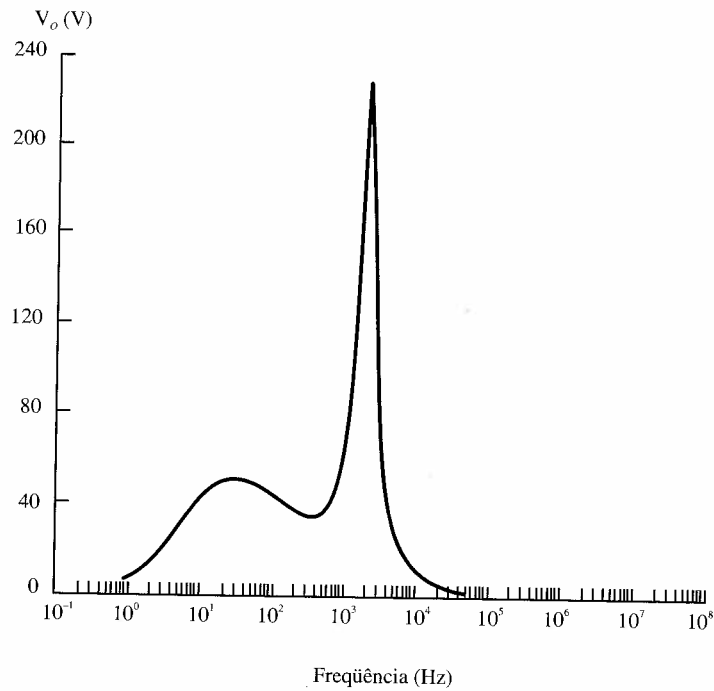
Figura 14.27 Rede utilizada no Exemplo 14.19.

O programa PSPICE está listado abaixo.

EXAMPLE 14.19

```
*INDEPENDENT VOLTAGE SOURCE
V1 1 0 AC 50 0
*INDEPENDENT CURRENT SOURCE
I1 0 3 AC 10 0
*RESISTOR VALUES
R1 3 0 100
R2 1 2 50
*CAPACITOR VALUES
C1 1 2 10U
C2 2 3 10U
*INDUCTOR VALUES
L1 2 0 1
L2 3 0 1M
.AC DEC 5 1 10MEG
.PROBE
.END
```

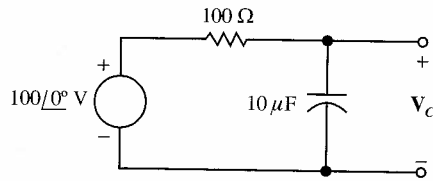
O gráfico da resposta em frequência é mostrado na Figura 14.28. Note que apesar de a rede exibir uma frequência de ressonância dominante, a resposta em frequência tem mais de um máximo por causa dos diversos capacitores e indutores. ■



**Figura 14.28** Gráfico de resposta em frequência para a rede do Exemplo 14.19.

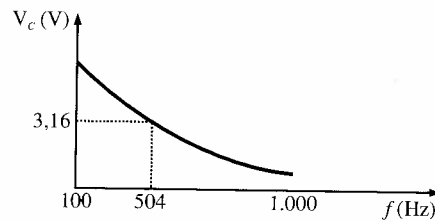
### Exercícios

**E14.19** Escreva um programa PSPICE que trace a resposta em frequência da tensão  $V_C$  na rede da Figura E14.19 sobre um intervalo de frequência de 100 a 1.000 Hz usando 50 pontos.

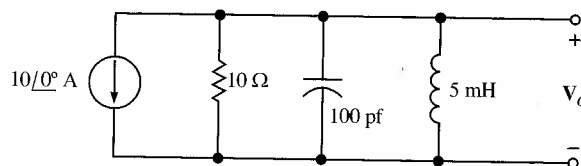


**Figura E14.19**

**Resp.:**



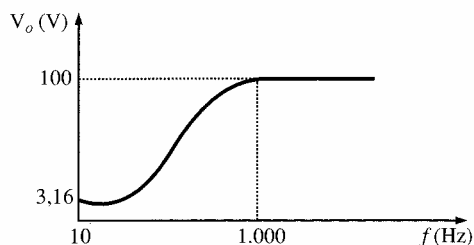
**E14.20** Escreva um programa PSPICE que trace a resposta em frequência de  $V_o$  na rede da Figura E14.20 usando 10 pontos por década sobre um intervalo de 10 Hz a 10 kHz.



**Figura E14.20**



Resp.:



**E14.21** Escreva um programa PSPICE que trace a tensão sobre o resistor de  $1\ \Omega$  na rede da Figura E14.21 usando 2 pontos por oitava sobre um intervalo de 1 Hz a 400 kHz.

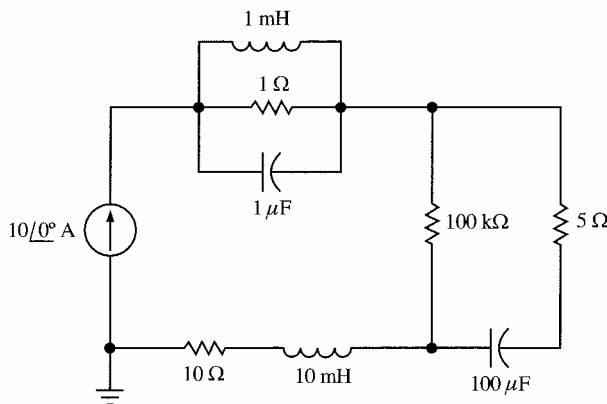
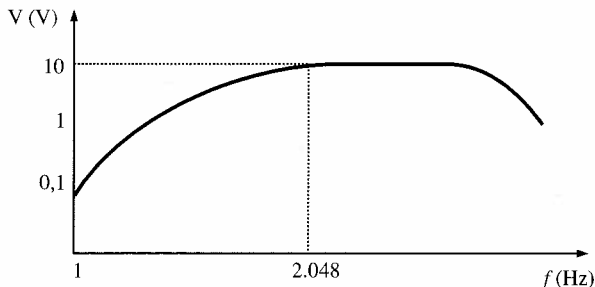


Figura E14.21

Resp.:



## 14.6 Filtros

### Filtros Passivos

Um filtro é geralmente projetado para passar sinais dentro de um intervalo específico de frequência e rejeitar ou atenuar sinais cujo espectro de frequência está fora dessa faixa aceitável. Os filtros mais comuns são os filtros *passa-baixas*, que passam baixas frequências e rejeitam altas frequências; *filtros passa-altas*, que passam altas frequências e bloqueiam as baixas; *filtros passa-faixa*, que passam alguma faixa de frequência em particular e rejeitam todas as frequências fora do intervalo; e *filtros rejeita-faixa*, que são especificamente projetados para rejeitar uma faixa em particular e passar todas as outras frequências.

A característica ideal de frequência para um filtro passa-baixas é mostrada na Figura 14.29a. Uma característica típica ou fisicamente realizável é também mostrada. Idealmente falando, gostaríamos que o filtro passa-baixas deixasse passar todas as frequências para alguma frequência  $\omega_0$  e não passasse nenhuma fre-

quência acima de tal valor; no entanto, não é possível projetar tal filtro com elementos lineares de circuito. Desse modo, devemos nos contentar com filtros que têm respostas em frequência que não são ideais.

Um filtro passa-baixas simples é mostrado na Figura 14.29b. O ganho de tensão para a rede é

$$\mathbf{G}_v(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (14.56)$$

que pode ser escrito como

$$\mathbf{G}_v(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad (14.57)$$

onde  $\tau = RC$ , a constante de tempo. A característica da amplitude é

$$M(\omega) = \frac{1}{[1 + (\omega\tau)^2]^{1/2}} \quad (14.58)$$

e a característica de fase é

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau \quad (14.59)$$

Note que na frequência de corte,  $\omega = 1/\tau$  e a amplitude é

$$M\left(\omega = \frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (14.60)$$

A frequência de corte é também normalmente chamada de *frequência de meia-potência*. Esse nome é devido ao fato de que se a tensão ou corrente é  $1/\sqrt{2}$  de seu valor máximo, então a potência, que é proporcional ao quadrado da tensão ou corrente, é metade de seu valor máximo.

As curvas de magnitude, em decibéis, e de fase para esse circuito passa-baixas são mostradas na Figura 14.29c. Note que a curva de magnitude é plana para baixas frequências e decresce nas altas frequências. A fase se desloca de  $0^\circ$  nas baixas frequências para  $-90^\circ$  nas altas frequências.

A característica de frequência ideal para um filtro passa-altas é mostrada na Figura 14.30a, juntamente com uma característica típica que poderíamos conseguir com componentes lineares de circuito. Idealmente falando, o filtro passa-altas deixa passar todas as frequências acima de alguma frequência  $\omega_0$  e nenhuma frequência abaixo desse valor.

Um filtro passa-altas é mostrado na Figura 14.30b. Esta é a mesma rede que a mostrada na Figura 14.29b, com exceção de que a tensão de saída é tomada sobre o resistor. O ganho de tensão para essa rede é

$$\mathbf{G}_v(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad (14.61)$$

onde, mais uma vez,  $\tau = RC$ . A magnitude dessa função é

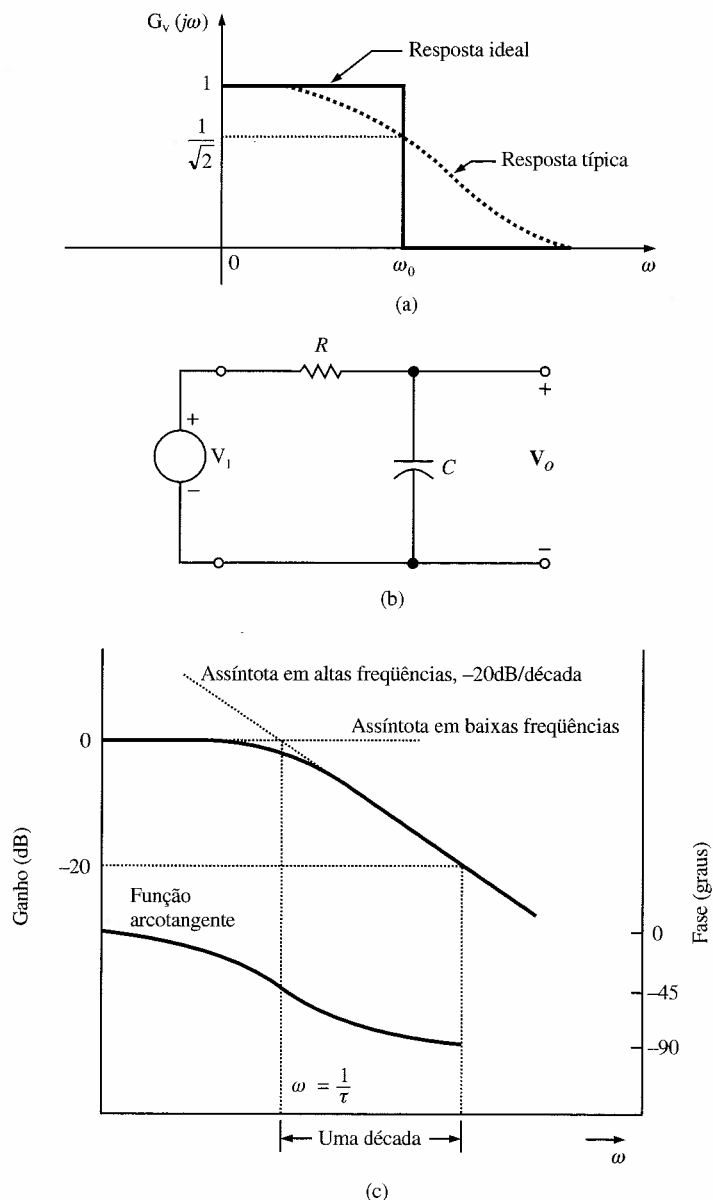
$$M(\omega) = \frac{\omega\tau}{[1 + (\omega\tau)^2]^{1/2}} \quad (14.62)$$

e a fase é

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \omega\tau \quad (14.63)$$

A frequência de meia-potência é  $\omega = 1/\tau$ , e a fase nessa frequência é  $45^\circ$ .

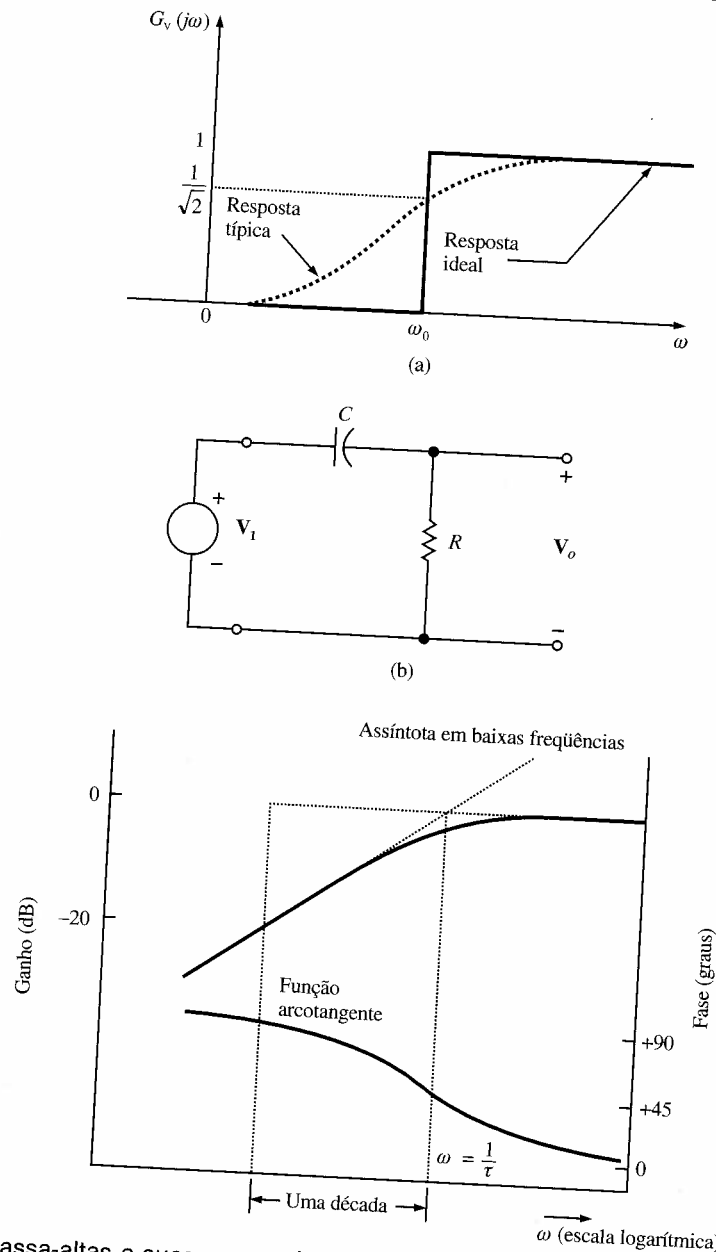
As curvas de magnitude e fase para esse filtro passa-altas são mostradas na Figura 14.30c. Nas baixas frequências, a curva de magnitude tem uma inclinação de  $+20$  dB/década devido ao termo  $\omega\tau$  no numerador da Equação 14.62. Então na frequência de corte a curva começa a se tornar plana. A curva de fase é obtida a partir da Equação 14.63.



**Figura 14.29** Filtro passa-baixas e suas características de frequência.

Características de amplitude ideal e típica para filtros passa-faixa e rejeita-faixa são mostradas na Figura 14.31a e b, respectivamente. Redes simples que são capazes de reproduzir as características típicas de cada filtro são mostradas abaixo das respectivas características na Figura 14.31c e d.  $\omega_0$  é a frequência de centro da faixa de passagem ou atenuação e a frequência em que a amplitude máxima ou mínima ocorrem.  $\omega_{LO}$  e  $\omega_{HI}$  são, respectivamente, as frequências de corte mais baixas e mais altas, onde a amplitude é  $1/\sqrt{2}$  de seu valor máximo. A largura da faixa de passagem ou de atenuação é chamada de *largura de faixa*, e desse modo

$$BW = \omega_{HI} - \omega_{LO} \quad (14.64)$$



**Figura 14.30** Filtro passa-altas e suas características de frequência.

Para ilustrar tais pontos, vamos considerar o filtro passa-faixa. A função de transferência é

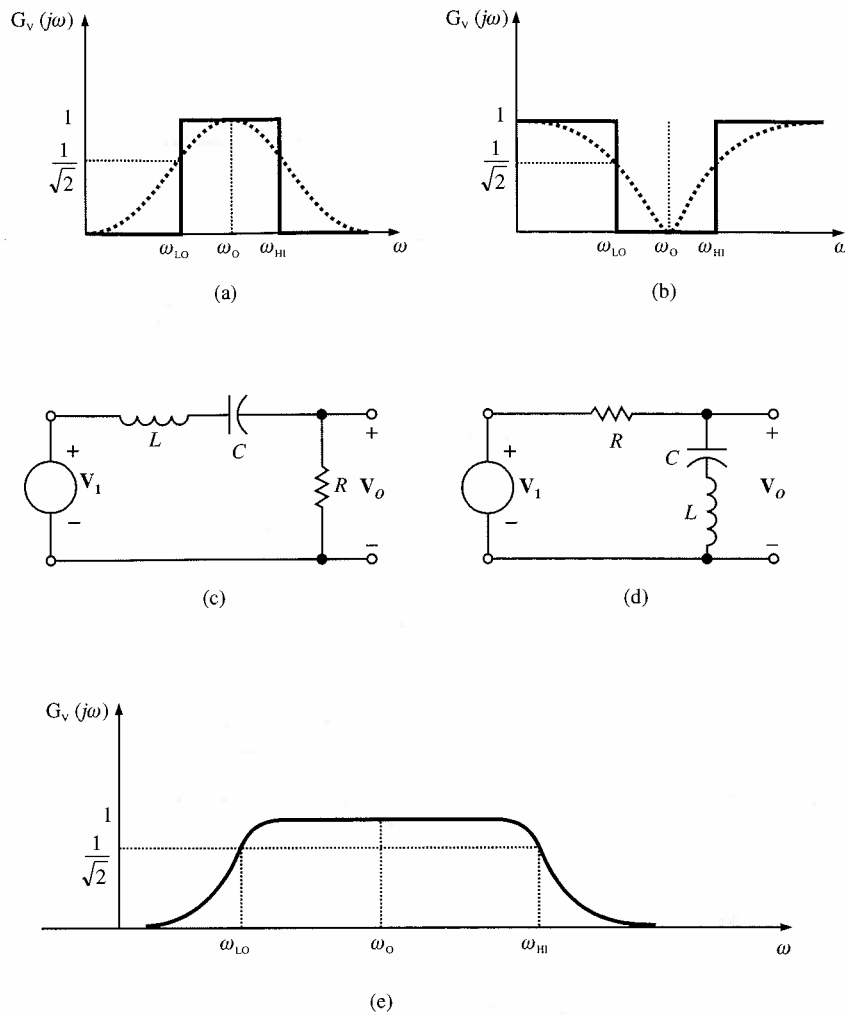
$$G_v(j\omega) = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

e, portanto, a amplitude é

$$M(\omega) = \frac{RC\omega}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

Nas baixas frequências

$$M(\omega) \approx \frac{RC\omega}{1} \approx 0$$



**Figura 14.31** Filtros passa-faixa e rejeita-faixa e suas respectivas características.

Nas altas frequências

$$M(\omega) \approx \frac{RC\omega}{\omega^2 LC} \approx \frac{R}{\omega L} \approx 0$$

No intervalo de frequência média  $(RC\omega)^2 \gg (\omega^2 LC - 1)^2$ , e dessa forma  $M(\omega) \approx 1$ . Portanto, a característica de frequência para esse filtro é mostrada na Figura 14.31e. A frequência de centro é  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Na frequência de corte mais baixa

$$\omega^2 LC - 1 = -RC\omega$$

ou

$$\omega^2 + \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0$$

Resolvendo-se essa expressão para  $\omega_{LO}$ , obtemos

$$\omega_{LO} = \frac{-(R/L) + \sqrt{(R/L)^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

Na frequência de corte mais alta

$$\omega^2 LC - 1 = +RC\omega$$

ou

$$\omega^2 - \frac{R}{L}\omega - \omega_0^2 = 0$$

Resolvendo essa expressão para  $\omega_{HI}$ , obtém-se

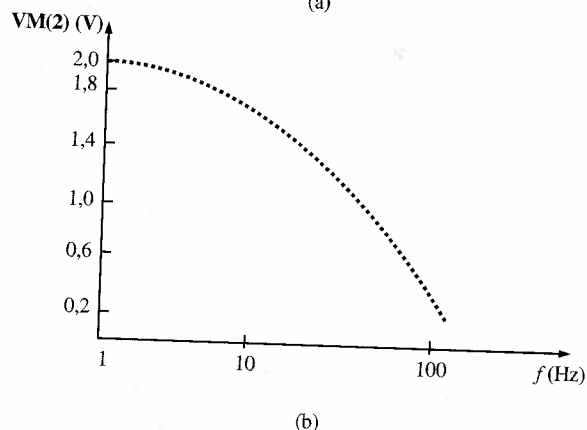
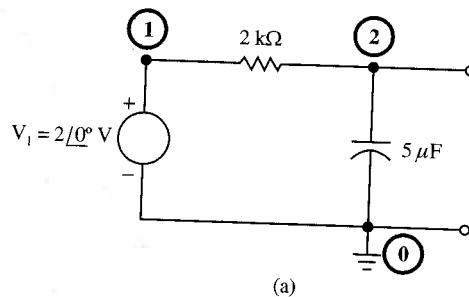
$$\omega_{HI} = \frac{+(R/L) + \sqrt{(R/L)^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

Portanto, a largura de faixa do filtro é

$$BW = \omega_{HI} - \omega_{LO} = \frac{R}{L}$$

### Exemplo 14.20

Considere a rede da Figura 14.32a, que é um filtro passa-baixas preparado para análise PSPICE. Vamos escrever um programa PSPICE para traçar a tensão de saída usando 10 pontos por década sobre o intervalo de frequência de 1 Hz a 1 kHz.



**Figura 14.32** Análise PSPICE de um filtro passa-baixas.

O programa está listado abaixo.

```
EXAMPLE 14.20
V1 1 0 AC 2 0
R 1 2 2K
C 2 0 5UF
.AC DEC 10 1 1000
.PROBE
.END
```

O gráfico de saída do programa é mostrado na Figura 14.32b.

## Exercícios

**E14.22** Dado o filtro mostrado na Figura E14.22, esboce a curva da magnitude do diagrama de Bode para  $G_V(j\omega)$ .

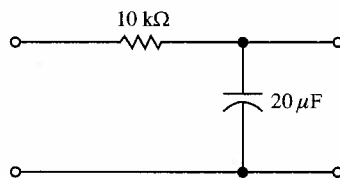
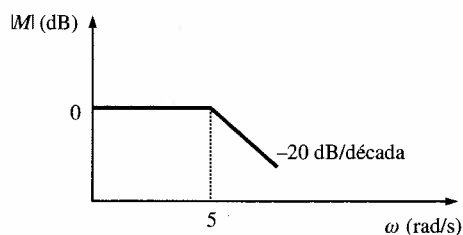


Figura E14.22

**Resp.:**



**E14.23** Dado o filtro mostrado na Figura E14.23, esboce a curva da magnitude do diagrama de Bode para  $G_V(j\omega)$ .

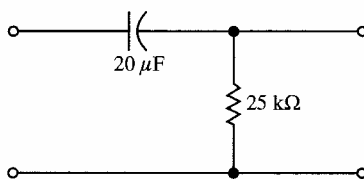
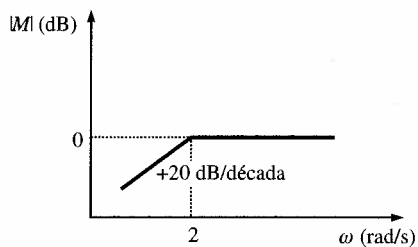


Figura E14.23

**Resp.:**



**E14.24** Um filtro passa-faixa é mostrado na Figura E14.24. Esboce a curva da magnitude do diagrama de Bode para  $G_V(j\omega)$ .

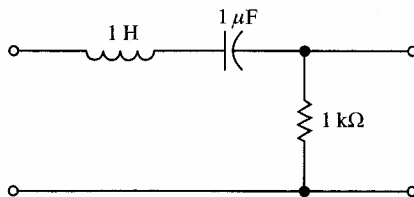
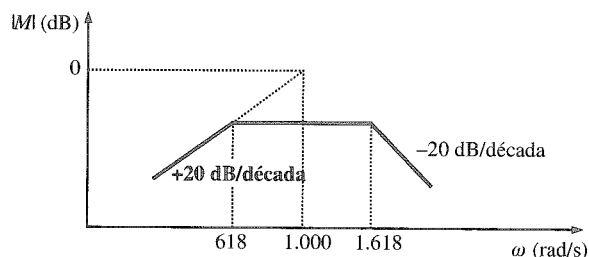


Figura E14.24

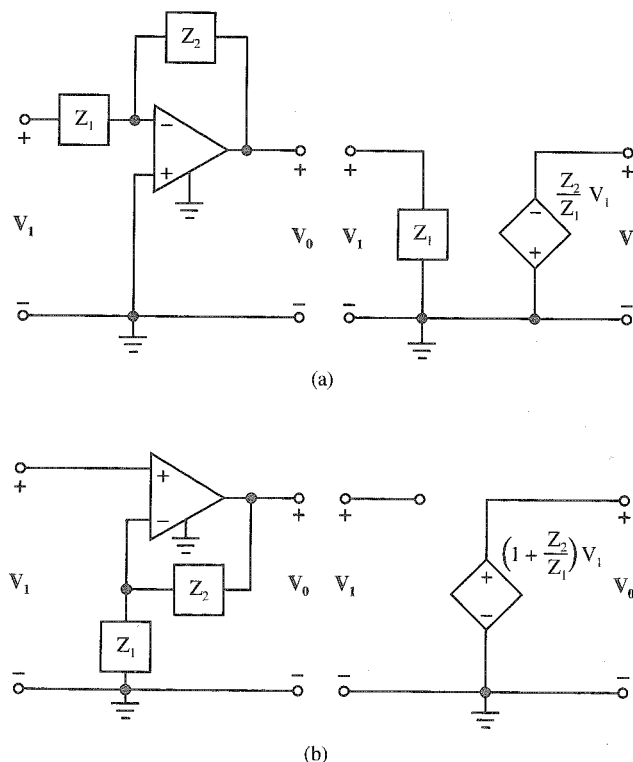
**Resp.:**



## Filtros Ativos

Na seção anterior, vimos que as maiores classes de filtros (passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa) são realizáveis com elementos passivos de circuito. No entanto, filtros passivos possuem sérias desvantagens. Um problema óbvio é a impossibilidade de se gerar uma rede com um ganho  $> 1$ , uma vez que uma rede passiva não pode adicionar energia a um sinal. Outra desvantagem séria dos filtros passivos é a necessidade em várias topologias por indutores que são geralmente caros e normalmente não têm boa precisão. Além disso, indutores normalmente vêm em formatos tais como toróides, bobinas, núcleos em E etc. que não são de fácil manuseio para as máquinas montadoras de placas de circuitos impressos. Aplicando-se amplificadores operacionais em circuitos lineares realimentados, podem ser implementados todos os tipos básicos de filtros utilizando somente resistores, capacitores e os próprios amp-op's. As únicas exceções são as aplicações que envolvem altíssimas frequências e/ou alta potência.

Os circuitos equivalentes para os amplificadores operacionais derivados no Capítulo 3 são também válidos em regime permanente senoidal, quando substituímos os resistores por impedâncias. Os circuitos equivalentes para circuitos amp-op básicos inversores e não-inversores são mostrados na Figura 14.33a e b, respectivamente. Características particulares de filtros são obtidas selecionando-se cuidadosamente as impedâncias  $Z_1$  e  $Z_2$ .

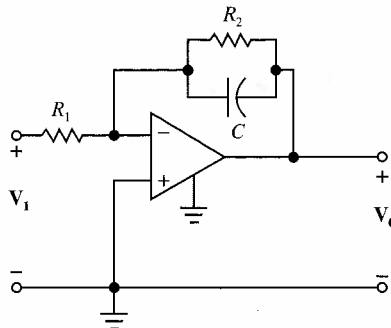


**Figura 14.33** Circuitos equivalentes para circuitos amplificadores operacionais (a) inversor e (b) não-inversor.



**Exemplo 14.21**

Vamos determinar as características do filtro mostrado na Figura 14.34.



**Figura 14.34** Filtro com amplificador operacional.

As impedâncias, como ilustradas na Figura 14.33<sup>a</sup>, são

$$Z_1 = R_1$$

e

$$Z_2 = \frac{R_2 / j\omega C}{R_2 + 1 / j\omega C} = \frac{R_2}{j\omega R_2 C + 1}$$

Portanto, o ganho de tensão da rede é

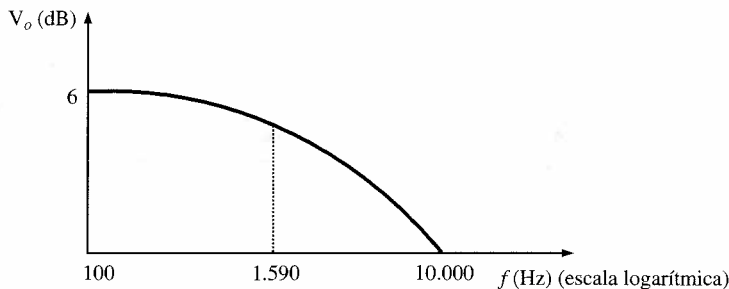
$$G_v(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{-R_2 / R_1}{j\omega R_2 C + 1}$$

Note que a função de transferência é aquela do filtro passa-baixas. ■

**Exercício**

**E14.25** Use o PSPICE para gerar o diagrama de Bode para a rede da Figura 14.34 sobre o intervalo de frequência de 100 Hz a 10 kHz. Os valores dos parâmetros são  $R_1 = 500 \, \Omega$ ,  $R_2 = 1 \, \text{k}\Omega$  e  $C_1 = 0,1 \, \mu\text{F}$ , e os parâmetros do amp-op são  $R_i = \infty$ ,  $R_o = 0$  e  $A = 10^5$ . Além disso, determine a frequência de corte.

**Resp.:**

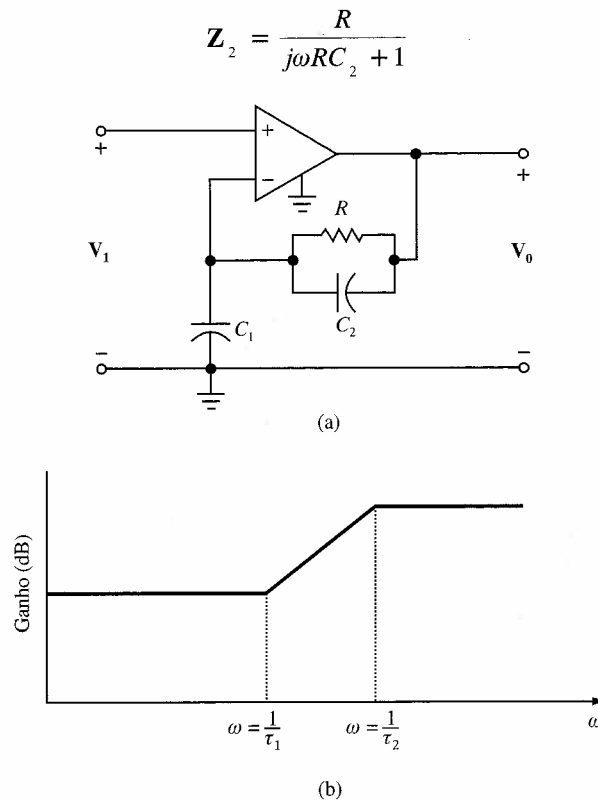
**Exemplo 14.22**

Mostraremos que a característica da amplitude para o filtro da Figura 14.35a é como mostrada na Figura 14.35b.

Comparando essa rede com a da Figura 14.33b, vemos que

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$$

e



**Figura 14.35** Circuito com amplificador operacional e sua característica de amplitude.

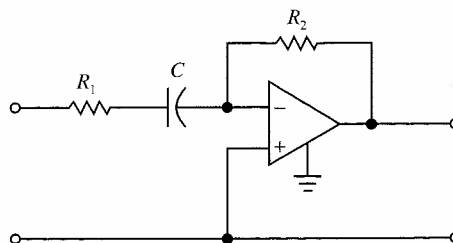
Portanto, o ganho de tensão para a rede em função da frequência é

$$\begin{aligned} G_V(j\omega) &= \frac{V_o(j\omega)}{V_1(j\omega)} = 1 + \frac{R/(j\omega RC_2 + 1)}{1/j\omega C_1} \\ &= \frac{j\omega(RC_1 + RC_2) + 1}{j\omega RC_2 + 1} \\ &= \frac{j\omega\tau_1 + 1}{j\omega\tau_2 + 1} \end{aligned}$$

onde  $\tau_1 = R(C_1 + C_2)$  e  $\tau_2 = RC_2$ . Uma vez que  $\tau_1 > \tau_2$ , o diagrama de amplitude é conforme mostrado na Figura 14.35b. Note que, em baixas frequências, o filtro tem um ganho de 1; no entanto, as altas frequências são amplificadas. O nível de amplificação é determinado por meio dos parâmetros do circuito. ■

### Exercício

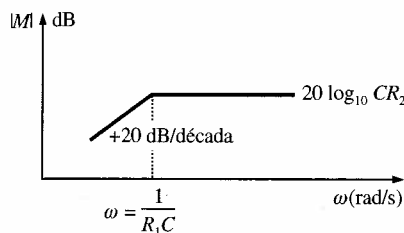
**E14.26** Dado o filtro mostrado na Figura E14.26, determine a função de transferência  $G_V(j\omega)$ , esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para  $G_V(j\omega)$  e identifique as características do filtro.



**Figura E14.26**

$$\text{Resp.: } G_v(j\omega) = \frac{-j\omega CR_2}{1 + j\omega CR_1};$$

Este é um filtro passa-altas.



Todos os circuitos considerados até aqui nesta seção foram de primeira ordem. Em outras palavras, todos eles tinham não mais que um pólo e/ou zero. Em muitas aplicações, é desejável gerar um circuito com mais seletividade de frequência maior do que circuitos de primeira ordem. O próximo passo é considerar a classe de filtros de segunda ordem. Na maioria das aplicações de filtros ativos, se uma ordem acima de dois é desejada, normalmente dois ou mais filtros ativos são conectados em série de forma a resultar na resposta desejada. Isto é feito porque filtros de primeira e segunda ordem são de fácil entendimento e simples de implementar com os amp-op's.

Em geral, filtros de segunda ordem terão uma função de transferência com um denominador contendo pólos quadráticos da forma  $s^2 + As + B$ . Para circuitos passa-altas e passa-baixas,  $B = \omega_c^2$  e  $A = 2\zeta\omega_c$ . Para esses circuitos,  $\omega_c$  é a frequência de corte e  $\zeta$  é o quociente de amortecimento já discutido anteriormente. Usando o operador de saída VDB com a porção da análise ac do PSPICE, pode-se facilmente determinar a frequência de corte determinando-se o deslocamento apropriado na resposta de ganho.

Para circuitos passa-faixa,  $B = \omega_0^2$  e  $A = \omega_0/Q$ , onde  $\omega_0$  é a frequência de centro e  $Q$  é o fator de qualidade para o circuito. Repare que  $Q = 1/2\zeta$ .  $Q$  é uma medida de seletividade desses circuitos. A largura de faixa é  $\omega_0/Q$ , como mencionado anteriormente.

A função de transferência do filtro ativo passa-baixas de segunda ordem pode geralmente ser escrita como

$$H(s) = \frac{H_0 \omega_c^2}{s^2 + 2\zeta\omega_c s + \omega_c^2} \quad (14.65)$$

onde  $H_0$  é o ganho dc. Um circuito que exibe essa função de transferência é ilustrado na Figura 14.36, e tem a seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{-\left(\frac{R_3}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_3 R_2 C_1 C_2}\right)}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1}\right) + \frac{1}{R_3 R_2 C_1 C_2}} \quad (14.66)$$

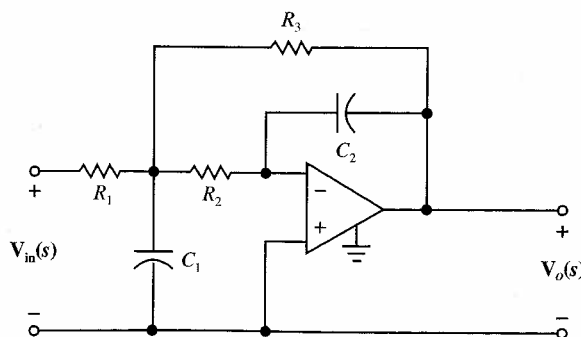


Figura 14.36 Filtro passa-baixas de segunda ordem.

**Exemplo 14.23**

Desejamos determinar o quociente de amortecimento, a frequência de corte, e o ganho de  $H_0$  para a rede da Figura 14.36 caso  $R_1 = R_2 = R_3 = 5 \text{ k}\Omega$  e  $C_1 = C_2 = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$ .

Comparando-se as equações 14.65 e 14.66, achamos que

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$2\xi\omega_c = \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

e portanto

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \sqrt{R_2 R_3}}$$

Além disso, notamos que

$$H_o = -\frac{R_3}{R_1}$$

Substituindo os valores dados dos parâmetros na equação acima, tem-se

$$\omega_c = 2000 \text{ rad/s} = 318 \text{ Hz}$$

$$\xi = 1,5$$

e

$$H_o = -1$$

**Exemplo 14.24**

Desejamos variar os capacitores  $C_1$  e  $C_2$  do Exemplo 14.23 para conseguir quocientes de amortecimento de 1,0; 0,75; 0,50 e 0,25 enquanto  $\omega_c$  é mantida constante em 200 rad/s.

Como mostrado na equação da frequência de corte no Exemplo 14.23, para que  $\omega_c$  permaneça constante em 200 rad/s, o produto de  $C_1$  e  $C_2$  deve permanecer constante. Usando-se os valores de capacitância do Exemplo 14.23, tem-se

$$C_1 C_2 = (10)^{-14}$$

ou

$$C_2 = \frac{(10)^{-14}}{C_1}$$

Substituindo-se essa expressão na equação para o quociente de amortecimento, tem-se

$$\xi = \frac{\sqrt{10^{-14}}}{\sqrt{C_1} \sqrt{C_1}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right] \sqrt{R_2 R_3}$$

$$= \frac{(0,15)(10^{-6})}{C_1}$$

ou

$$C_1 = \frac{(0,15)(10^{-6})}{\xi}$$

Portanto, para  $\xi = 1,0; 0,75; 0,50$  e  $0,25$ , os valores correspondentes para  $C_1$  são 0,15; 0,20; 0,30 e 0,6  $\mu\text{F}$ , respectivamente. Os valores de  $C_2$  que correspondem a esses valores de  $C_1$  são 67, 50, 33 e 17 nF, respectivamente.

Esse exemplo ilustra que podemos ajustar os parâmetros da rede para conseguir uma resposta transiente específica enquanto mantemos a frequência de corte do filtro constante. Na verdade, como regra geral projetamos filtros com características específicas por meio de manipulação apropriada dos parâmetros da rede.

### Exemplo 14.25

Usaremos agora PSPICE para demonstrar que a resposta transiente de circuitos gerados no Exemplo 14.24 exibirá sobre-sinal e oscilações quando  $\zeta$  diminui. Aplicaremos um degrau de  $-1\text{ V}$  na entrada da rede e empregaremos o modelo amp-op com  $R_i = \infty\ \Omega$ ,  $R_o = 0\ \Omega$  e  $A = 10^5$ .

O programa PSPICE a seguir produzirá a resposta transiente para os quatro casos de amortecimento. Os valores para  $C_1$  e  $C_2$  são dados para um quociente de amortecimento de 0,5.

```

TRANSIENT RESPONSE FOR EXAMPLE 14.24
R1  1 2 5K
R2  2 3 5K
R3  2 4 5K
*Change these two values to set  $\zeta$ 
C1  2 0 2.3UF
C2  3 4 33NF
VIN 1 0 PWL(0 0 1MS 0 1.001MS -1V 50MS -1V)
*Op=Amp dependent generator A=1E5
EOUT 4 0 3 0 -1E5
.TRAN 0.2MS 10MS
.PROBE
.END

```

Os resultados são mostrados na Figura 14.37. As curvas indicam que um  $\zeta = 0,75$  poderia ser um valor de compromisso razoável entre velocidade de resposta e sobre-sinal mínimo.

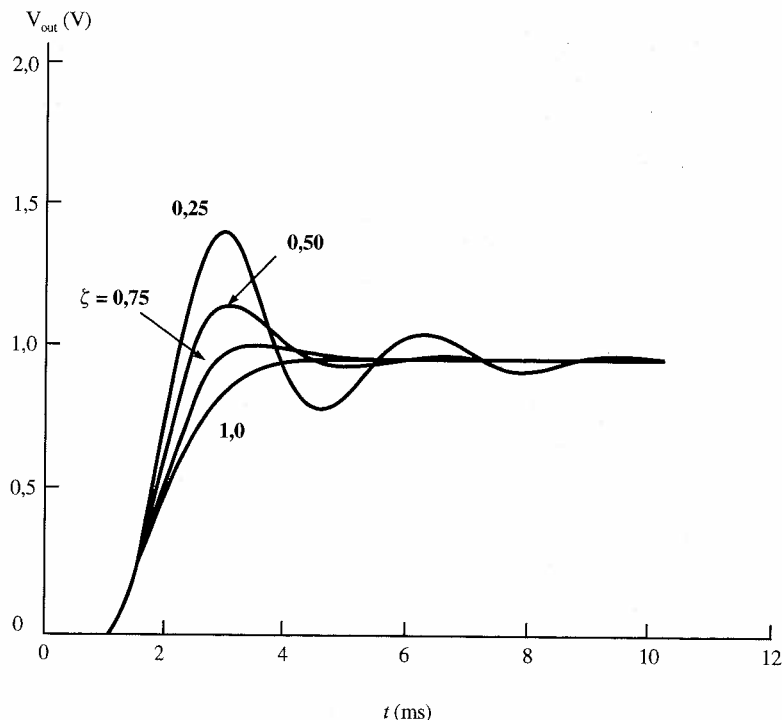


Figura 14.37 Análise transiente do Exemplo 14.24.

**Exercício**

**E14.27** Certifique-se que a Equação 14.66 é de fato a função de transferência para a rede da Figura 14.36.

Quando um circuito ou componente em particular é empregado várias vezes dentro de um circuito global, é conveniente defini-lo como um *subcircuito* no PSPICE. O subcircuito, que define um grupo de elementos do circuito, é automaticamente inserido onde quer que o subcircuito seja referenciado. Subcircuitos podem conter qualquer número de elementos, até mesmo outros subcircuitos. A forma geral para os comandos de subcircuito é

```
.SUBCKT SUBNAM N1 <N2 N3 ...>
```

```
.  
.  
.  
.  
.  
.
```

```
.ENDS <SUBNAM>
```

onde SUBNAM é o nome do subcircuito e  $N_1, N_2, N_3, \dots$  são os nós usados para conectar o subcircuito à rede. O comando .ENDS <SUBNAM> é o último comando no subcircuito, e <SUBNAM> é necessário somente quando subcircuitos estão aninhados. Os elementos que definem os subcircuitos são listados entre os comandos .SUBCKT e .ENDS.

Subcircuitos são chamados pelo comando

```
XXXXXXXX N1 < N2 N3 ... > SUBNAM
```

onde  $N_1, N_2, N_3, \dots$  definem os nós na rede à qual o subcircuito está conectado. Note que os nós referenciados no comando .SUBCKT não são necessariamente numerados como aqueles definidos na chamada do subcircuito. Ao contrário dos nós *locais* usados para definir o subcircuito, os nós usados no subcircuito são *globais*, exceto em casos onde os subcircuitos estão aninhados. O nó de referência é sempre global e não precisa ser definido no comando .SUBCKT.

**Exemplo 14.26**

Um filtro passa-baixas é mostrado na Figura 14.38a. Vamos usar o PSPICE para traçar a resposta em frequência do filtro em um intervalo de 1 a 10.000 Hz usando 10 pontos por década.

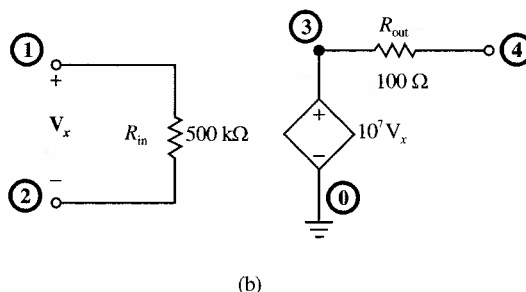
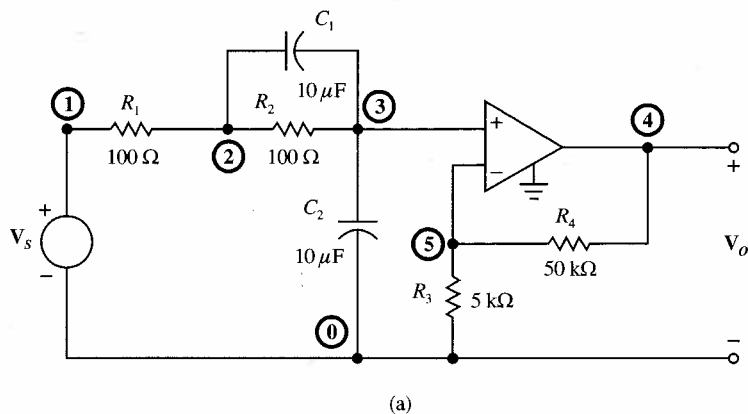
Usaremos um subcircuito para definir o amp-op usando o modelo mostrado na Figura 14.38b. Os nós locais usados para o subcircuito são também mostrados na Figura 14.38b. Os nós globais usados para a rede original são mostrados na Figura 14.38a. O programa PSPICE usado para traçar a resposta em frequência está listado abaixo.

```
EXAMPLE 14.26
VS 1 0 AC 12 0
R1 1 2 100
R2 2 3 100
R3 5 0 5K
R4 4 5 50K
C1 2 3 10U
C2 3 0 10U
X1 3 5 4 OPAMP
*ANALYSIS
.AC DEC 10 1 10K
.PROBE
* OPAMP SUBCIRCUIT
.SUBCKT OPAMP 1 2 4
```

```

RIN      1 2 500K
ROUT     3 4 100
EOUT     3 0 1 2 1E7
.ENDS
*
.END

```



**Figura 14.38** Circuitos usados no Exemplo 14.26: (a) filtro passa-baixas; (b) subcircuito amp-op.

O gráfico da resposta em frequência é mostrado na Figura 14.39.

### Exemplo 14.27

Um filtro passa-altas é mostrado na Figura 14.40a. Vamos usar PSPICE para traçar a resposta em frequência do filtro em um intervalo de 1 a 100 kHz usando 10 pontos por década.

O subcircuito para o amp-op é mostrado na Figura 14.40b, e o programa PSPICE usado para traçar a resposta em frequência está listado a seguir.

```

EXAMPLE 14.27
VS      1  0  AC      12      0
R1       1  2    100
R2       2  3    100
R3       2  5    100
R4       4  5    100
C1       2  3   50U
C2       3  4   100U
X1       2  3  OPAMP
X2       4  5  OPAMP
*ANALYSIS
.AC DEC 10 1 100K
.PROBE
* OPAMP

```

```
.SUBCKT OPAMP 1 3
RIN 1 0 500K
ROUT 2 3 100
EOUT 2 0 1 0-1E7
.ENDS
*
.END
```

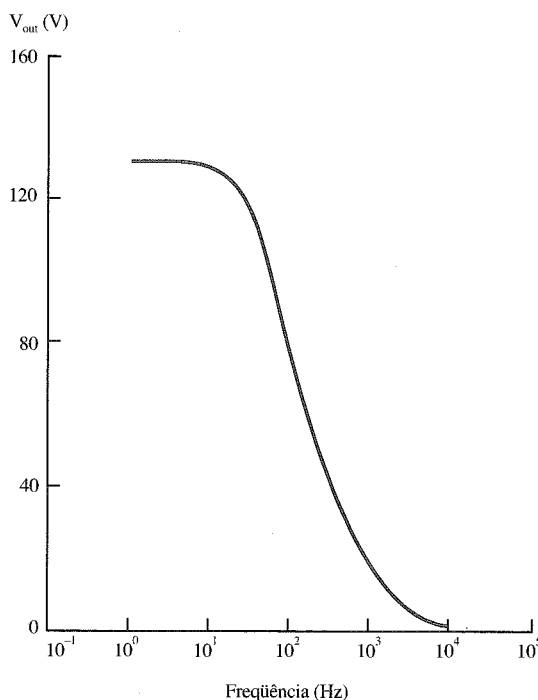


Figura 14.39 Resposta em frequência da rede do Exemplo 14.26.

A resposta em frequência é mostrada na Figura 14.41. ■

A função de transferência geral para o filtro passa-faixa de segunda ordem é

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{sH_o}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \quad (14.67)$$

Como já mencionado,  $\omega_o$  é a frequência de centro da faixa de passagem e  $Q$  é o fator de qualidade. Lembre-se que para filtros passa-baixas,  $H_o$  era o ganho da faixa de passagem ou o ganho dc. Para um filtro passa-faixa, o ganho é máximo na frequência de centro,  $\omega_o$ . Para se encontrar esse ganho máximo, substituímos  $s = j\omega_o$  na expressão acima para obtermos

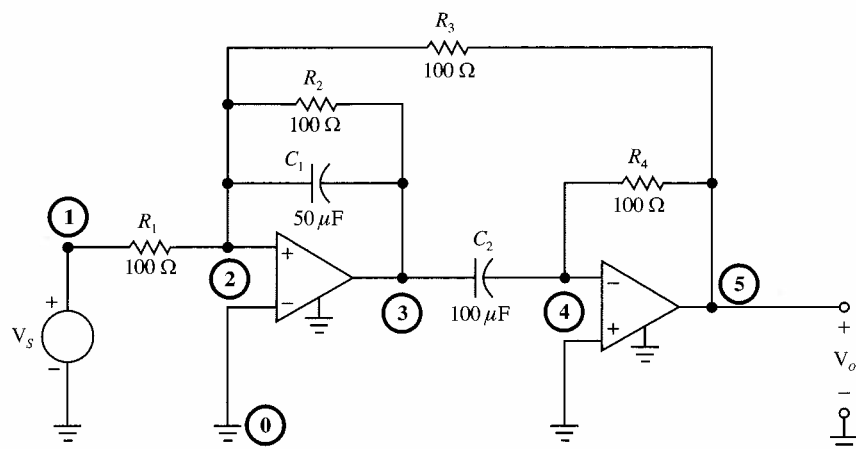
$$\begin{aligned} \frac{V_o(j\omega_o)}{V_s(j\omega_o)} &= \frac{j\omega_o H_o}{-\omega_o^2 + j\omega_o(\omega_o 0/Q) + \omega_o^2} \\ &= \frac{QH_o}{\omega_o} \end{aligned} \quad (14.68)$$

Além disso, a diferença entre a alta e baixa frequências de meia-potência (ou seja,  $\omega_{HI} - \omega_{LO}$ ) é, obviamente, a largura de faixa

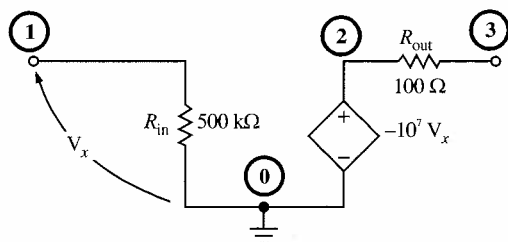
$$\omega_{HI} - \omega_{LO} = BW = \frac{\omega_o}{Q} \quad (14.69)$$

$Q$  é a medida de seletividade do filtro passa-faixa e, como a equação indica, uma vez que  $Q$  está aumentando, a largura de faixa está diminuindo.



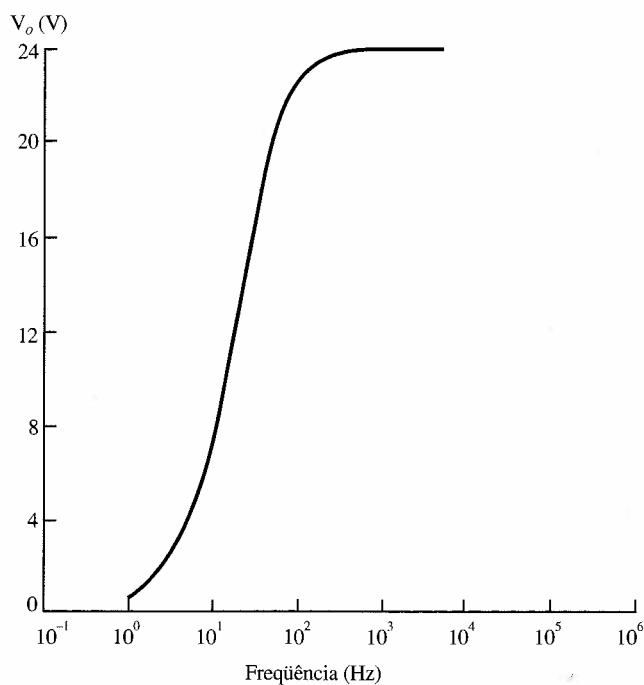


(a)

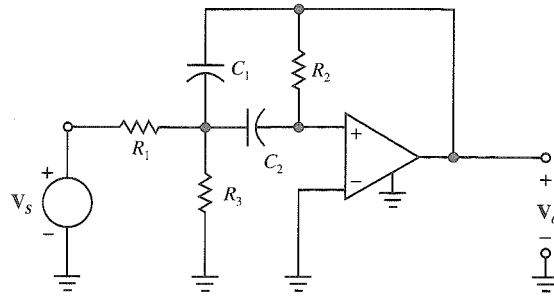


(b)

**Figura 14.40** Circuitos usados no Exemplo 14.27: (a) filtro passa-baixas; (b) subcircuito amp-op.



**Figura 14.41** Resposta em frequência da rede do Exemplo 14.27.



**Figura 14.42** Filtro passa-faixa de segunda ordem.

Uma implementação de um filtro passa-faixa é mostrada na Figura 14.42. A função de transferência para essa rede é

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{-\left(\frac{1}{R_1 C_1}\right)s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}\right)s + \frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (14.70)$$

Comparando essa expressão com uma expressão mais geral para o filtro passa-faixa, produz-se as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \left( \frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right)^{1/2} \\ \frac{Q}{\omega_0} &= \frac{R_2 C_1 C_2}{C_1 + C_2} \\ \frac{Q}{\omega_0} \omega_0 &= \frac{R_2 C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left( \frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (14.71)$$

Essas expressões podem ser simplificadas para se ter

$$Q = \frac{(1 + R_1/R_3)^{1/2}}{1 + C_1/C_2} \left( \frac{R_2 C_1}{R_1 C_2} \right)^{1/2} \quad (14.72)$$

$$BW = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (14.73)$$

e

$$\left. \frac{V_o}{V_s} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{QH_0}{\omega_0} = -\frac{R_2}{R_1} \left( \frac{1}{1 + C_1/C_2} \right) \quad (14.74)$$

### Exemplo 14.28

Desejamos achar uma nova expressão para as equações 14.71 a 14.74 sob a condição que  $C_1 = C_2 = C$ .

Usando-se tal condição, as equações se reduzem a

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2}} \\ Q &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_3}} \\ BW &= \frac{2}{R_2 C} \end{aligned}$$

e

$$\left. \frac{V_o}{V_s} \right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{R_2}{2R_1}$$

**Exemplo 14.29**

Vamos usar as equações do Exemplo 14.28 para projetar um filtro passa-faixa da forma mostrada na Figura 14.42 com um  $BW = 2.000 \text{ rad/s}$ ,  $(V_o/V_s)(\omega_0) = -5$  e  $Q = 3$ . Utilize  $C = 0,1 \mu\text{F}$  e determine a frequência de centro do filtro.

Usando-se as equações do filtro, temos que

$$BW = \frac{2}{R_2 C}$$

$$2.000 = \frac{2}{R_2 (10)^{-7}}$$

$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$\left. \frac{V_o}{V_s} \right|_{\omega_0} = -\frac{R_2}{2R_1}$$

$$-5 = -\frac{10.000}{2R_1}$$

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

e

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_3}}$$

$$3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10.000}{1.000}} \sqrt{1 + \frac{1.000}{R_3}}$$

ou

$$R_3 = 385 \Omega$$

Portanto,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 385 \Omega$  e  $C = 0,1 \mu\text{F}$  definem por completo o filtro passa-faixa mostrado na Figura 14.42. A frequência de centro do filtro é

$$\omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2}}$$

$$= \frac{1}{10^{-7}} \sqrt{\frac{1 + (1.000/385)}{(1.000)(10.000)}}$$

$$= 6.000 \text{ rad/s}$$

**Exemplo 14.30**

Desejamos usar o PSPICE para traçar o diagrama de Bode para o filtro projetado no Exemplo 14.29. Empregaremos o modelo de amp-op, em que  $R_i = \infty$ ,  $R_o = 0$  e  $A = 10^5$ . Desejamos investigar o intervalo de frequência de 600 a 60 kHz usando 30 pontos por década.

O circuito equivalente para o filtro é mostrado na Figura 14.43a. O programa PSPICE está listado abaixo.

```
SECOND-ORDER BAND-PASS FILTER EXAMPLE
VIN 1 0 AC 1 0
R1 1 2 1K
C1 2 4 0.1UF
```

```

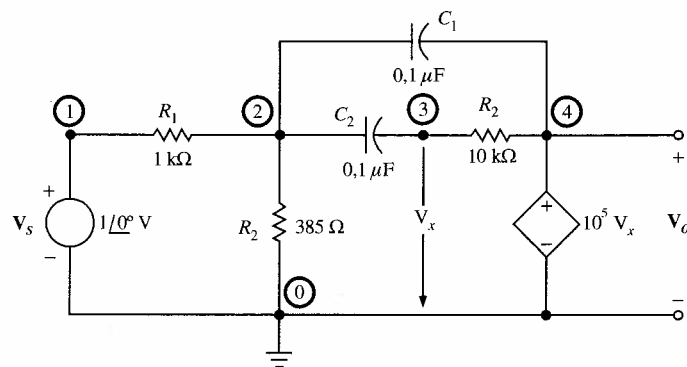
C2 2 3 0.1UF
R2 3 4 10K
R3 2 0 385
E1 4 0 0 3 1E5
.AC DEC 30 600 60K
.PROBE
.END

```

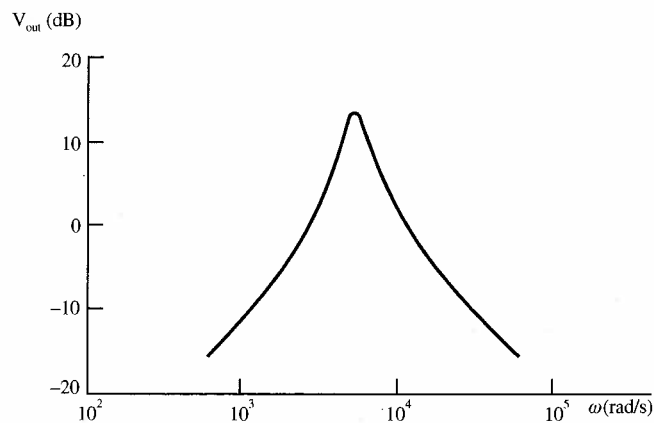
O diagrama de Bode é mostrado na Figura 14.43b. Como pode ser visto a partir do diagrama, a frequência de centro é 6 krad/s e BW = 2 krad/s.

### Exercício

**E14.28** Verifique se a Equação 14.70 é a função de transferência para o filtro passa-faixa da Figura 14.42.



(a)



(b)

**Figura 14.43** Figuras empregadas no Exemplo 14.30: (a) circuito equivalente de filtro de passa-faixa; (b) diagrama de Bode.

É conveniente examinar as limitações da resposta em frequência de um amp-op. Até agora, nossa modelagem do amp-op tem se limitado a ganho finito, resistência de entrada e resistência de saída. O leitor deve ter notado que esse modelo tem resposta em frequência infinita (ou seja, não há pólos ou zeros). Deveríamos ser céticos com relação a sistemas físicos reais com resposta em frequência infinita. É claro que amplificadores operacionais reais têm uma resposta em frequência finita, e seu ganho é mais realístico representado como

$$A(j\omega) = \frac{A_o [1 + j(f/f_{z_1})][1 + j(f/f_{z_2})] \cdots}{[1 + j(f/f_{p_1})][1 + j(f/f_{p_2})] \cdots}$$

onde  $1 + j(f/f_p) = 1 + j\omega\tau_p$ , onde  $\omega = 2\pi f$  e  $\tau_p = 1/2\pi f_p$ .

Existe, porém, uma grande classe de amp-op's que são projetados especificamente para ter uma resposta de ganho de pólo único, que assegura a operação estável e confiável numa ampla gama de aplicações. O ganho de pólo único do amplificador pode ser escrito como

$$A = \frac{A}{1 + j(f/f_p)}$$

Valores típicos para  $f_p$  estão no intervalo de 5 a 30 Hz. Esses dados nos incitam a perguntar se um pólo de baixa frequência não limita seriamente a utilidade do amplificador. O exemplo a seguir vai ilustrar que a resposta em frequência é, na realidade, limitada pelo fator conhecido como produto de ganho pela largura de faixa, GBW, que para um amp-op de pólo único é  $GBW = A_o f_p$ .

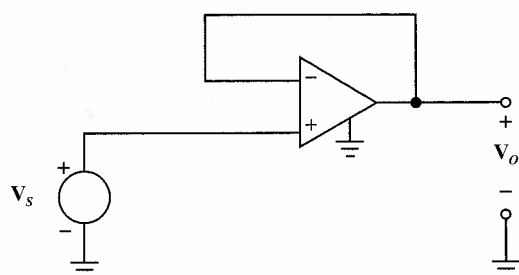
### Exemplo 14.31

Considere o circuito amp-op *buffer* de ganho unitário mostrado na Figura 14.44a. O circuito equivalente para o amplificador é mostrado na Figura 14.44b, onde temos assegurado que  $R_i = \infty$ ,  $R_o = 0$  e  $A = A_o/[1 + j(f/f_p)]$ . A LKT produz

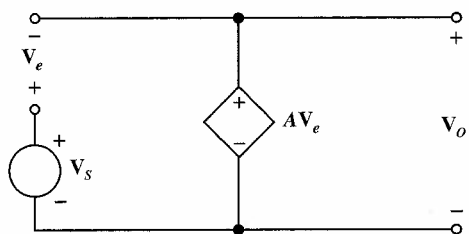
$$V_e = V_s - AV_e$$

ou

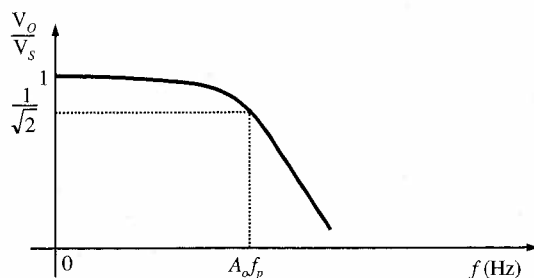
$$(A + 1)V_e = V_s$$



(a)



(b)



(c)

**Figura 14.44** Figuras usadas no Exemplo 14.31: (a) amplificador *buffer*; (b) circuito equivalente do amplificador *buffer*; (c) resposta em frequência do amplificador *buffer* com ganho unitário.

Entretanto,

$$V_e = V_s - V_o$$

e portanto

$$(A + 1)V_o = AV_s$$

e

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{A}{1 + A}$$

Substituindo  $A$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_s} &= \frac{A_o/[1 + j(f/f_p)]}{1 + A_o/[1 + j(f/f_p)]} \\ &= \frac{A_o}{1 + j(f/f_p)A_o} \end{aligned}$$

Uma vez que  $f_p$  é pequeno, assumimos que  $ff_p \gg 1$ , e portanto

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_s} &\approx \frac{A_o}{A_o + j(f/f_p)} \\ &\approx \frac{1}{1 + j(f/f_p A_o)} \end{aligned}$$

Assim, em baixas frequências,  $V_o/V_s = 1$  e, em frequências muito altas, ( $f \gg A_o f_p$ ), o ganho é  $V_o/V_s = 1/j(ff_p A_o) = -j(A_o f_p / f)$ . Portanto, o amp-op parece um filtro passa-baixas com frequência de corte igual a  $f_c = A_o f_p$  (ou seja,  $\omega_c = 2\pi A_o f_p$ ), como mostrado na Figura 14.44c. ■

O circuito equivalente para um amp-op de pólo único é mostrado na Figura 14.45. O pólo de baixa frequência está ajustado em  $f_p = 1/2\pi RC$ . Por exemplo, se  $R = 100 \text{ k}\Omega$  e  $C = 159 \text{ nF}$ , o amp-op teria um pólo em 10 Hz. Na rede equivalente, a primeira fonte dependente modela o ganho dc. A segunda fonte dependente “isola” (através de um buffer) a saída, para que a frequência do pólo não seja afetada pela impedância de saída da carga.

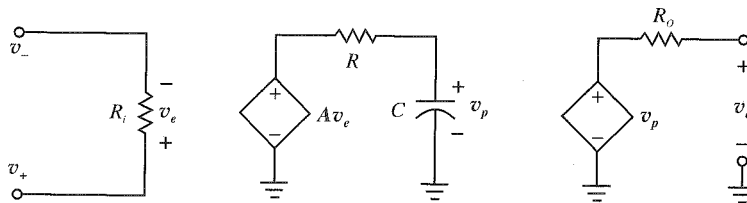


Figura 14.45 Circuito equivalente amp-op de pólo único.

### Exemplo 14.32

Dado o filtro passa-altas mostrado na Figura E14.26 com  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1,59 \text{ nF}$ , desejamos determinar a frequência de corte  $f_c$ , e usar o PSPICE para gerar o diagrama de Bode para os modelos simples e de pólo único. Vamos usar  $A = (2)10^5$ ,  $R_i = \infty$  e  $R_o = 0$  para o modelo amp-op simples. Para o modelo de pólo único, vamos usar  $f_p = 5 \text{ Hz}$ .

A função de transferência para o filtro é

$$\frac{V_o}{V_s}(s) = \frac{R_2 C s}{R_1 C s + 1}$$

Portanto

$$\omega_c = \frac{1}{R_1 C}$$

ou

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

$$= \frac{1}{2\pi(10)^3(1,59)(10)^{-9}}$$

$$= 100 \text{ kHz}$$

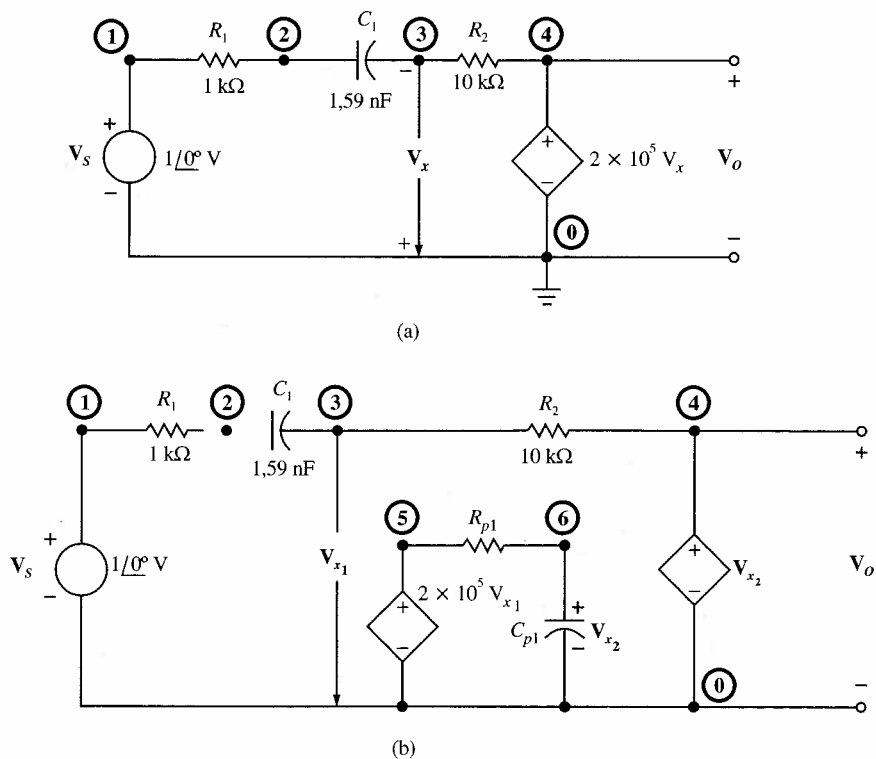
O circuito equivalente PSPICE para o filtro usando o modelo amp-op simples é mostrado na Figura 14.46a. Um programa PSPICE, que produz um diagrama de Bode no intervalo de frequência de 1 kHz a 1 MHz usando 20 pontos por década, está listado a seguir.

```

HIGH-PASS FILTER WITH SIMPLE OP-AMP MODEL
VIN 1 0 AC 1 0
R1 1 2 1K
C1 2 3 1.59NF
R2 3 4 10K
E1 4 0 0 3 2E5
.AC DEC 20 1K 1000K
.PROBE
.END

```

O circuito equivalente PSPICE para o filtro com o modelo amp-op de pólo único é mostrado na Figura 14.46b, onde usamos  $R_p = 100 \text{ k}\Omega$  e  $C_{p1} = 318,3 \text{ nF}$  para satisfazer a condição  $f_p = 5 \text{ Hz}$ . O programa PSPICE que gera o diagrama de Bode para essa rede está listado abaixo.



**Figura 14.46** Circuitos usados no Exemplo 14.32: (a) filtro passa-altas com modelo amp-op simples; (b) filtro passa-altas com modelo amp-op de pólo único.

```

HIGH-PASS FILTER WITH SIMPLE-POLE OP-AMP MODEL
VIN 1 0 AC 1 0
R1 1 2 1K
C1 2 3 1.59NF
R2 3 4 10K
E1 5 0 0 3 2E5
RP1 5 6 100K
CP1 6 0 318.3NF
E2 4 0 6 0 1
.AC DEC 20 1K 1000K
.PROBE
.END

```

Os diagramas de Bode para o filtro com ambos os modelos do amp-op são mostrados na Figura 14.47. Note que o amp-op com um pólo interno único atenua as altas frequências, resultando numa resposta em frequência composta semelhante àquela do filtro passa-faixa. ■

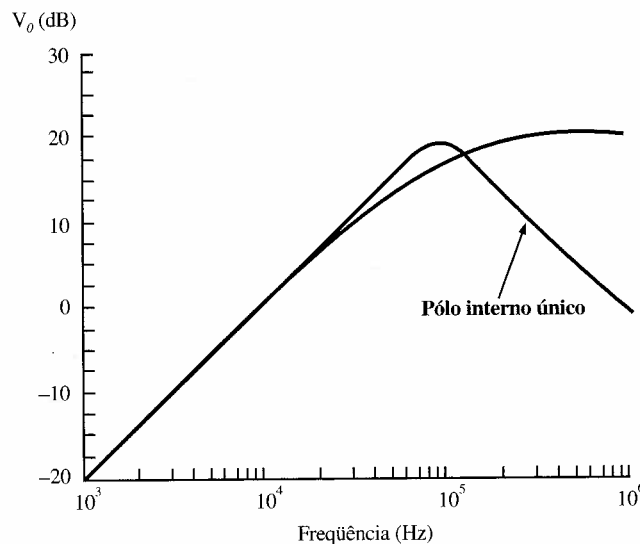


Figura 14.47 Diagramas de Bode para um filtro passa-altas usando diferentes modelos amp-op.

## 14.7 Resumo

Examinamos neste capítulo a resposta em frequência de redes. A função de transferência foi introduzida e a resposta em frequência da rede foi analisada usando-se pólo-zero e diagramas de Bode. Esses diagramas são muito importantes porque indicam o comportamento da rede em função da frequência.

Circuitos ressonantes foram apresentados e discutidos. Na ressonância, a tensão de saída e a corrente de uma rede estão em fase e o fator de potência é unitário. Largura de faixa, frequência de meia-potência e fator de qualidade para circuitos ressonantes foram introduzidos e a mudança de escala foi apresentada como um apoio ao projeto de redes com valores práticos dos elementos de circuito.

Filtros passivos e ativos foram introduzidos. Filtros passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa foram examinados. Procedimentos para análise e projeto de filtros ativos foram apresentados e discutidos.

Finalmente, o PSPICE foi usado para analisar filtros e traçar sua resposta em frequência e resposta transiente.

### Pontos-Chave

- Existem quatro funções comuns de transferência para redes elétricas:  $Z(j\omega)$  é a razão da tensão de saída pela corrente de entrada,  $Y(j\omega)$  é a razão da corrente de saída pela tensão de entrada,



$G_V(j\omega)$  é a razão da tensão de saída pela tensão de entrada e  $G_I(j\omega)$  é a razão da corrente de saída pela corrente de entrada.

- Valores da variável geral de frequência “ $s$ ” que anulam a magnitude da função de transferência são chamados de “zeros” da função; do mesmo modo, valores de “ $s$ ” que levam a magnitude ao infinito são chamados de “pólos”.
- Diagramas de Bode são gráficos semilogarítmicos da magnitude e fase das funções de transferência como uma função da frequência.
- Aproximações por assíntotas podem ser usadas para esboçar rapidamente as características da magnitude de um diagrama de Bode. O erro entre a curva real e a aproximação por assíntotas pode ser calculado, se necessário.
- A frequência ressonante é definida como a frequência em que a impedância de um circuito  $RLC$  em série ou a admitância de um circuito  $RLC$  em paralelo é puramente real.
- O fator de qualidade,  $Q$ , é uma medida da agudeza do pico de ressonância. Quanto maior o  $Q$ , mais agudo é o pico.
- As frequências de corte, de quebra, ou meia-potência são frequências em que a característica da magnitude de um filtro é  $1/\sqrt{2}$  de seu valor máximo.
- Valores irreais de parâmetros de elementos de circuito passivos podem ser mudados de escala por magnitude ou frequência para se produzir valores reais para elementos de circuito.
- Os quatro tipos mais comuns de filtros são passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa.
- A largura de faixa dos filtros passa-faixa ou rejeita-faixa é definida como a diferença da frequência entre pontos de meia-potência.
- O projeto de certos filtros, por exemplo, passa-baixas, passa-altas e assim por diante, com características específicas pode ser rapidamente realizado a partir do conhecimento das funções de transferência.

## Problemas

14.1 Determine a impedância de transferência  $V_o(s)/I_s(s)$  para a rede mostrada na Figura P14.1.

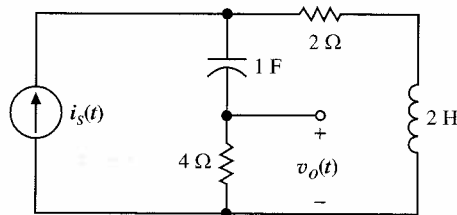


Figura P14.1

14.2 Determine a função de transferência da tensão  $V_o(s)/V_i(s)$  para a rede mostrada na Figura P14.2.

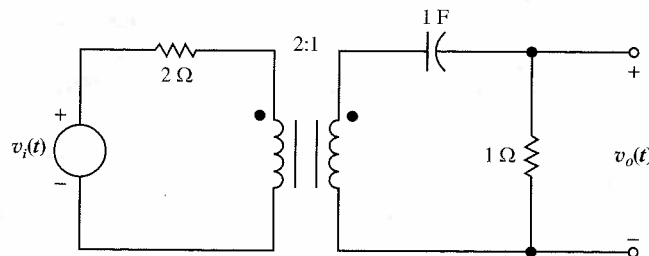


Figura P14.2

- 14.3 Determine a impedância de entrada como uma função de  $s$  para a rede mostrada na Figura P14.3.

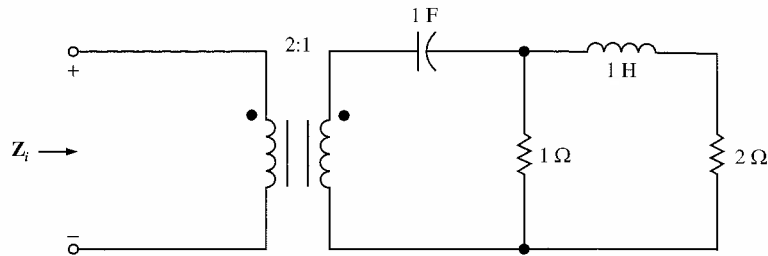


Figura P14.3

- 14.4 Determine o ganho de corrente  $I_o(s)/I_S(s)$  para o circuito mostrado na Figura P14.4.

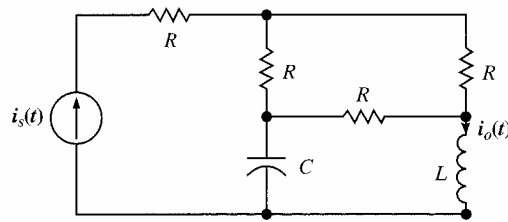


Figura P14.4

- 14.5 Determine a impedância de entrada nos terminais de entrada do circuito da Figura P14.5.

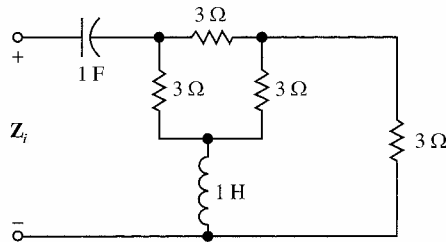


Figura P14.5

- 14.6 Trace o diagrama de Bode para a função de transferência

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{j\omega 2 + 1}{j\omega 10 + 1}$$

- 14.7 Trace o diagrama de Bode para a função de transferência

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{10(10j\omega + 1)}{(100j\omega + 1)(j\omega + 1)}$$

- 14.8 Trace o diagrama de Bode para a função de transferência

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega + 1)(0,1j\omega + 1)}$$

- 14.9 Esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para a função de transferência

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{10}{j\omega(0,1j\omega + 1)}$$

- 14.10 Esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para a função de transferência

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{20(j\omega + 1)}{j\omega(0,1j\omega + 1)(0,01j\omega + 1)}$$

- 14.11 Esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para a função de transferência

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{640(j\omega + 1)(0,02j\omega + 1)}{(j\omega)^2(j\omega + 10)}$$

**14.12** Esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para a função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{400(j\omega + 2)(j\omega + 50)}{-\omega^2(j\omega + 200)^2}$$

**14.13** Esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para a função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{100(j\omega)}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)(j\omega + 50)}$$

**14.14** Esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para a função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{10^5(5j\omega + 1)^2}{(j\omega)^2(j\omega + 10)(j\omega + 50)^2}$$

**14.15** Esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para a função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{10^2(j\omega)^2}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)(j\omega + 100)}$$

**14.16** Esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para a função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{-\omega^2}{(j\omega + 1)^3}$$

**14.17** Esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para a função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 10^4}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 10)(j\omega + 100)^2}$$

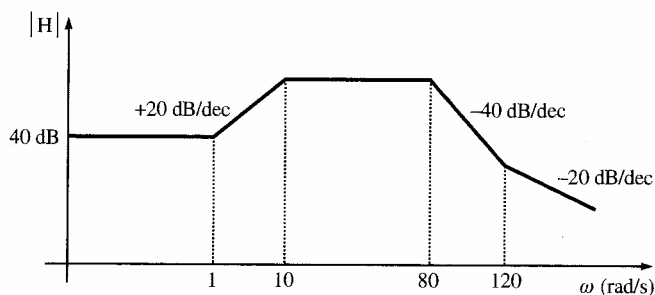
**14.18** Esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para a função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{81(j\omega + 0,1)}{(j\omega)(-\omega^2 + 3,6j\omega + 81)}$$

**14.19** Esboce a curva de ganho do diagrama de Bode para a função de transferência

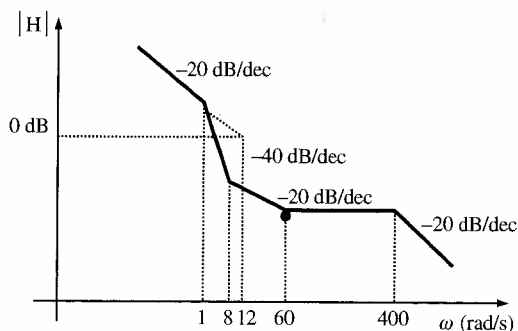
$$H(j\omega) = \frac{6,4(j\omega)}{(j\omega + 1)(-\omega^2 + 8j\omega + 64)}$$

**14.20** Determine  $H(j\omega)$  caso seu diagrama de ganho seja o mostrado na Figura P14.20.



**Figura P14.20**

**14.21** Determine  $H(j\omega)$  caso seu diagrama de ganho seja o mostrado na Figura P14.21.



**Figura P14.21**

14.22 Determine  $H(j\omega)$  caso seu diagrama de ganho seja o mostrado na Figura P14.22.

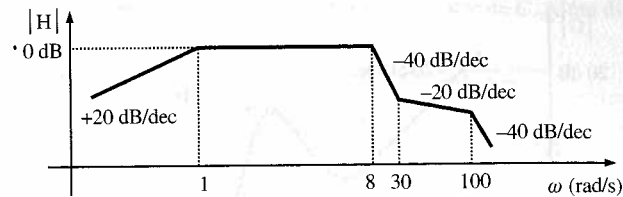


Figura P14.22

14.23 Determine  $H(j\omega)$  caso seu diagrama de ganho seja o mostrado na Figura P14.23.

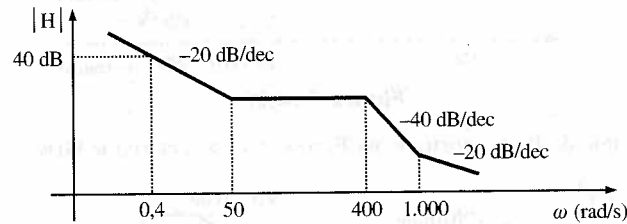


Figura P14.23

14.24 Determine  $H(j\omega)$  caso seu diagrama de ganho seja o mostrado na Figura P14.24.

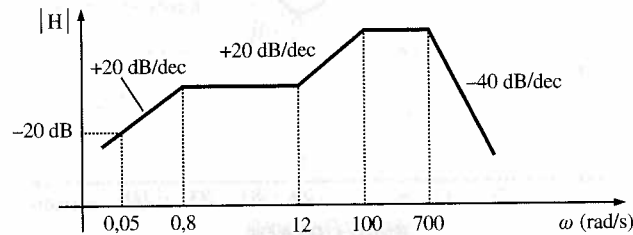


Figura P14.24

14.25 Dado o diagrama de ganho da Figura P14.25, determine  $H(j\omega)$ .

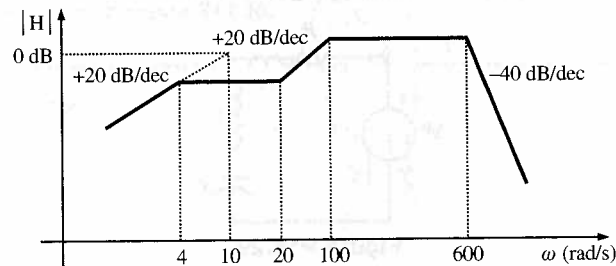


Figura P14.25

14.26 Dada a característica da magnitude da Figura P14.26, determine  $G(j\omega)$ .

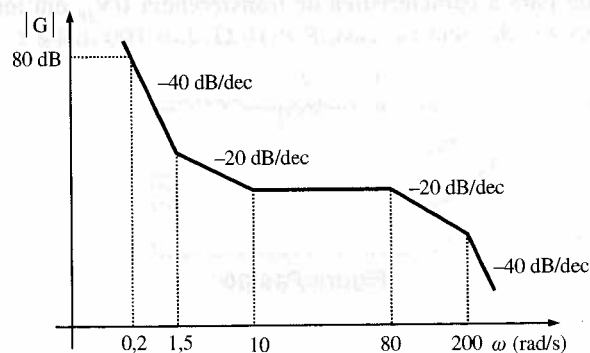
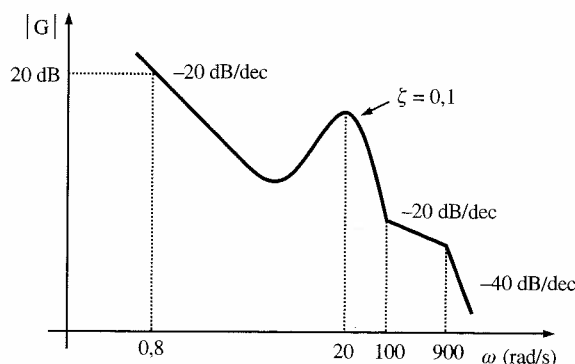


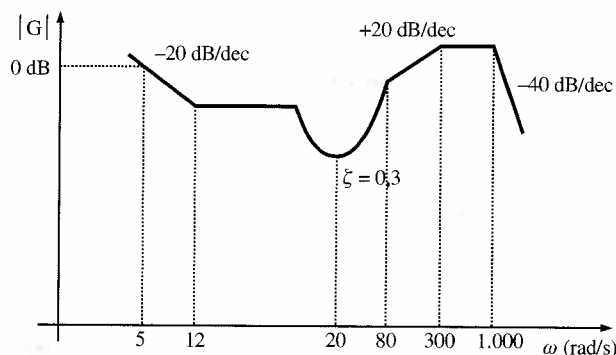
Figura P14.26

**14.27** Determine  $G(j\omega)$  caso o diagrama de amplitude ou ganho seja o mostrado na Figura P14.27.



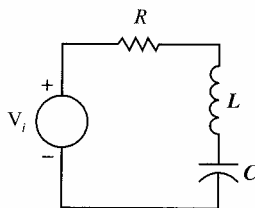
**Figura P14.27**

**14.28** Dado o ganho do diagrama de Bode mostrado na Figura P14.28, determine  $G(j\omega)$ .



**Figura P14.28**

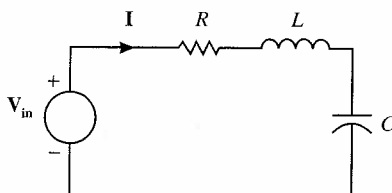
**14.29** Dado o circuito  $RLC$  em série da Figura P14.29, caso  $R = 10 \, \Omega$ , determine os valores de  $L$  e  $C$  tais que a frequência ressonante seja de 100 kHz e a largura de faixa seja igual a 1 kHz.



**Figura P14.29**

**14.30** Dado o circuito  $RLC$  em série da Figura P14.30,

- Determine a expressão para as frequências de meia-potência, a frequência ressonante, a largura de faixa e o fator de qualidade para a característica de transferência  $I/V_{in}$  em termos de  $R$ ,  $L$  e  $C$ .
- Calcule as grandezas do item (a) caso  $R = 10 \, \Omega$ ,  $L = 100 \, \text{mH}$  e  $C = 10 \, \mu\text{F}$ .



**Figura P14.30**

- 14.31** O circuito  $RLC$  em série da Figura P14.31 é alimentado por uma fonte de frequência variável. Se a frequência ressonante da rede for selecionada como  $\omega_0 = 1200$  rad/s, determine o valor de  $C$ . Além disso, calcule a corrente de ressonância e em  $\omega_0/4$  e  $4\omega_0$ .

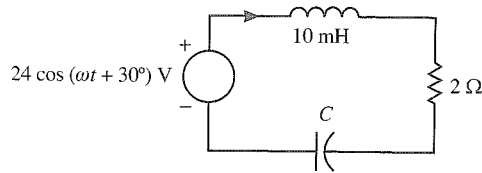


Figura P14.31

- 14.32** Dada a rede da Figura P14.32, determine  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $\omega_{\max}$  e  $|V_o|_{\max}$ .

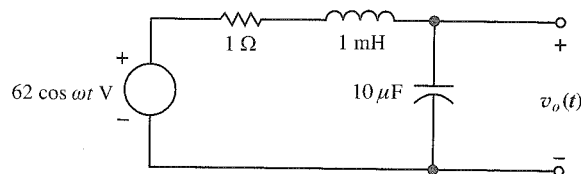


Figura P14.32

- 14.33** Repita o Problema 14.32, caso o valor de  $R$  seja mudado para  $0,1 \Omega$ .

- 14.34** Dada a rede da Figura P14.34, determine  $|V_o|_{\max}$ .

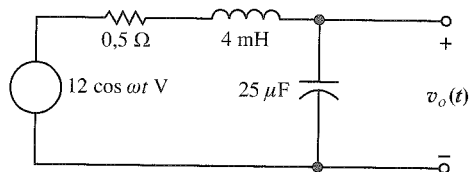


Figura P14.34

- 14.35** No Problema 14.34, se a resistência for mudada para  $1 \Omega$  e a capacitância para  $50 \mu\text{F}$ , calcule  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $\omega_{\max}$  e  $|V_o|_{\max}$ .

- 14.36** Determine  $\omega_0$  e  $Q$  para a rede da Figura P14.36.

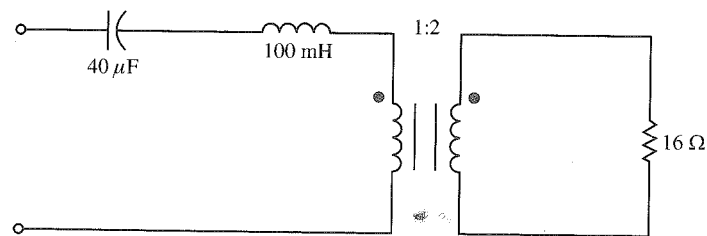


Figura P14.36

- 14.37** Determine o valor de  $n$  no circuito da Figura P14.37 para se obter um  $Q$  de 50.

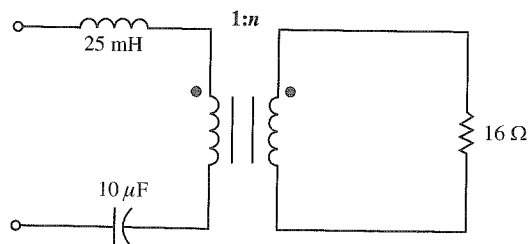
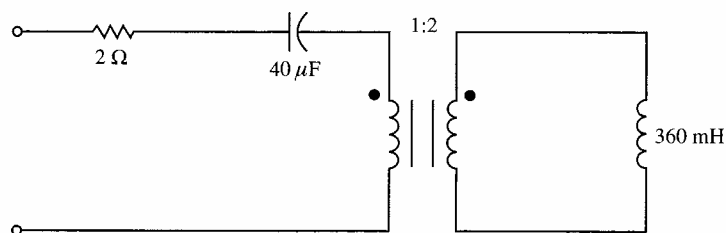


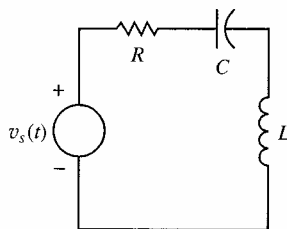
Figura P14.37

**14.38** Determine  $\omega_0$  e  $Q$  para o circuito da Figura P14.38.



**Figura P14.38**

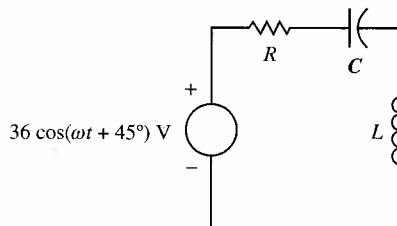
**14.39** Na rede da Figura P14.39,  $\omega_0 = 1.000 \text{ rad/s}$  e nessa frequência a impedância vista pela fonte é  $4 \Omega$ . Caso  $L = 20 \text{ mH}$ , determine o  $Q$  da rede e a largura de faixa.



**Figura P14.39**

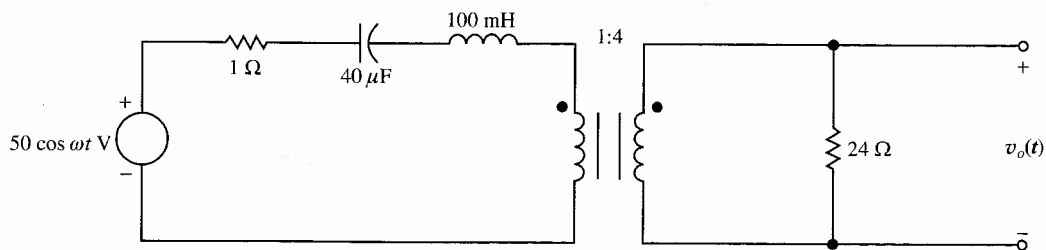
**14.40** Um circuito  $RLC$  em série é excitado usando-se um gerador de sinal. A frequência ressonante da rede é  $1600 \text{ rad/s}$ , e nessa frequência a impedância vista pelo gerador de sinal é  $3 \Omega$ . Caso  $C = 20 \mu\text{F}$ , determine  $L$ ,  $Q$ , e a largura de faixa.

**14.41** Na rede da Figura P14.41, o valor do indutor é  $30 \text{ mH}$ , e o circuito é excitado por uma fonte de frequência variável. Se a amplitude da corrente na ressonância é  $12 \text{ A}$ ,  $\omega_0 = 1.000 \text{ rad/s}$  e  $L = 10 \text{ mH}$ , determine  $C$ ,  $Q$  e a largura de faixa do circuito.



**Figura P14.41**

**14.42** Na rede da Figura P14.42, a fonte opera na frequência ressonante da rede. Determine  $\omega_0$  e  $Q$  para o circuito e a tensão de saída  $V_o$ .



**Figura P14.42**

- 14.43 Uma fonte de tensão de frequência variável alimenta a rede da Figura P14.43. Determine a frequência ressonante,  $Q$ , BW e a potência média dissipada pela rede quando estiver em ressonância.

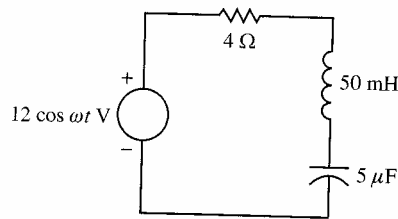


Figura P14.43

- 14.44 A frequência ressonante da rede da Figura P14.44 é 10.000 rad/s, e BW = 1000 rad/s. O valor do indutor é 20 mH, e sua resistência interna é 4 Ω. Determine os valores de  $R$  e  $C$  e a potência média dissipada pela rede quando a fonte é ajustada na frequência ressonante.

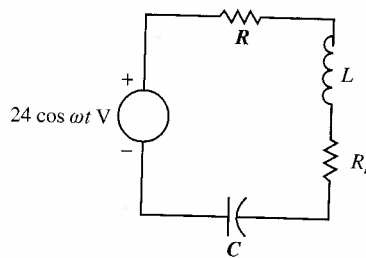


Figura P14.44

- 14.45 Considere a rede da Figura P14.45. Se  $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 20 \text{ mH}$ ,  $C = 50 \text{ }\mu\text{F}$  e  $R_S = \infty$ , determine a frequência ressonante  $\omega_0$ ,  $Q$  da rede e a largura de faixa da rede. Qual o impacto que uma  $R_S$  de 10 kΩ tem sobre os valores determinados?

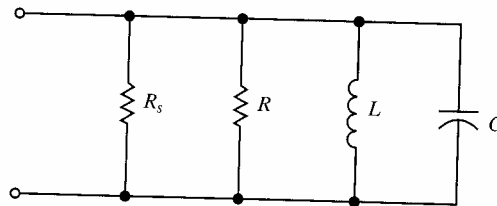


Figura P14.45

- 14.46 A fonte da rede da Figura P14.46 é  $i_S(t) = \cos 1.000t + \cos 1.500t \text{ A}$ .  $R = 200 \text{ }\Omega$  e  $C = 500 \text{ }\mu\text{F}$ . Se  $\omega_0 = 1.000 \text{ rad/s}$ , determine  $L$ ,  $Q$  e a BW. Calcule a tensão de saída  $v_o(t)$  e discorra sobre a magnitude da tensão de saída nas duas frequências de entrada.

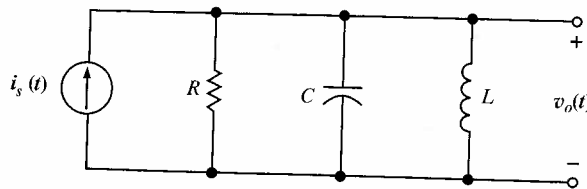


Figura P14.46

- 14.47 Determine a frequência ressonante e o fator de qualidade para a rede da Figura P14.47.

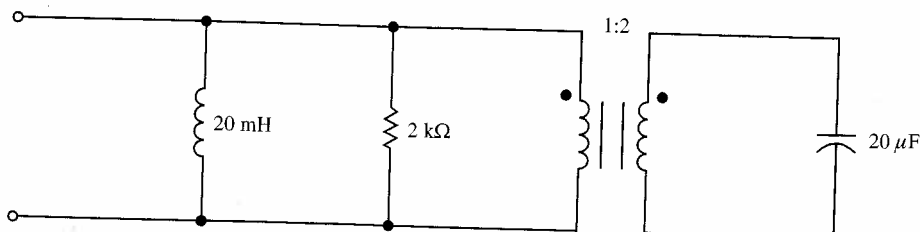


Figura P14.47



- 14.48** Um circuito  $RLC$  em paralelo, que é alimentado por uma fonte de corrente de frequência variável de 2 A, possui os seguintes valores:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 100 \text{ mH}$  e  $C = 10 \mu\text{F}$ . Determine a largura de faixa da rede, as frequências de meia-potência e a tensão sobre a rede nas frequências de meia-potência.
- 14.49** Determine os parâmetros de um circuito em paralelo ressonante com as seguintes propriedades:  $\omega_0 = 2 \text{ Mrad/s}$ ,  $BW = 20 \text{ krad/s}$  e uma impedância de ressonância igual a  $2.000 \Omega$ .
- 14.50** Um circuito  $RLC$  em paralelo, alimentado por uma fonte de frequência variável de 10 A, possui os seguintes parâmetros:  $R = 500 \Omega$ ,  $L = 0,5 \text{ mH}$  e  $C = 20 \mu\text{F}$ . Determine a frequência ressonante,  $Q$ , a potência média dissipada na frequência ressonante, a  $BW$  e a potência média dissipada nas frequências de meia-potência.
- 14.51** Dado o circuito da Figura P14.51, calcule  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $BW$  e a tensão de saída quando a frequência da fonte é a frequência ressonante da rede.

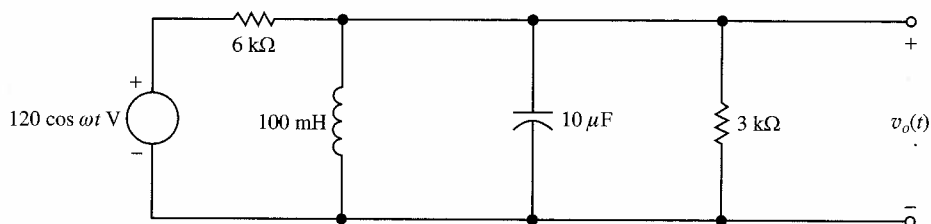


Figura P14.51

- 14.52** Determine a expressão para a frequência ressonante da rede mostrada na Figura P14.52.

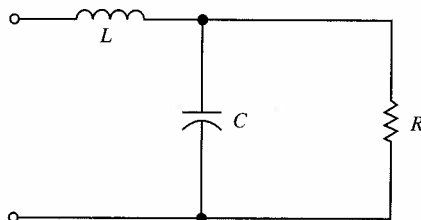


Figura P14.52

- 14.53** Dada a rede da Figura P14.53, determine o valor mínimo de  $Z_1$  que levará o circuito à ressonância.

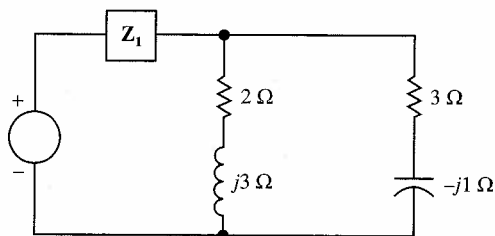


Figura P14.53

- 14.54** Trace o gráfico de  $I_x$  na rede da Figura P14.54 usando PSPICE. Use cinco pontos por década no intervalo de frequência de 0,1 a 10 MHz.

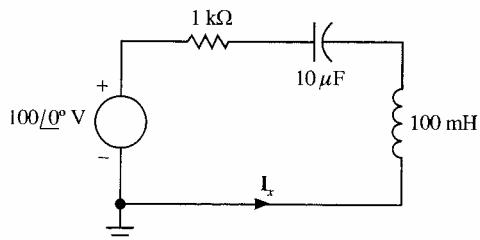


Figura P14.54

- 14.55 Dada a rede da Figura P14.55, use cinco pontos por década para traçar o gráfico da resposta em frequência de  $V$  no intervalo de frequência de 0,1 Hz a 1 MHz usando PSPICE.

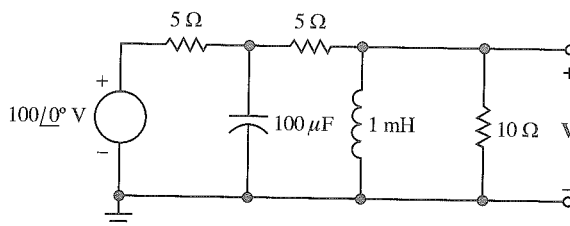


Figura P14.55

- 14.56 Dada a rede da Figura P14.56, trace o gráfico de  $V_o$  usando PSPICE. Use cinco pontos por década no intervalo de 0,1 Hz a 1 MHz.

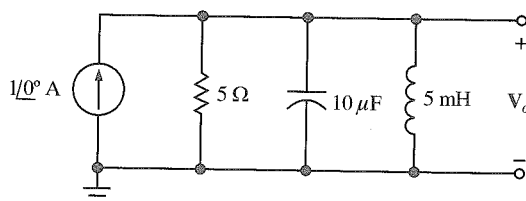


Figura P14.56

- 14.57 Repita o Problema 14.56 com  $C = 100 \mu\text{F}$ .

- 14.58 Determine os novos parâmetros da rede mostrada na Figura P14.58, caso  $Z_{\text{new}} = 1.000Z_{\text{old}}$ .

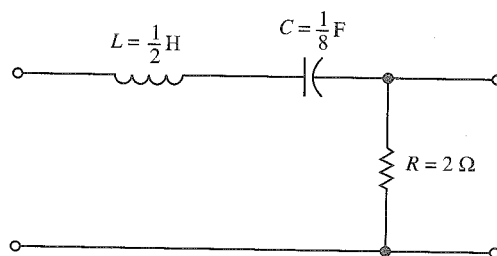


Figura P14.58

- 14.59 Determine os novos parâmetros da rede do Problema 14.58 caso  $\omega_{\text{new}} = 10^5 \omega_{\text{old}}$ .

- 14.60 Determine que tipo de filtro é a rede mostrada na Figura P14.60, determinando a função de transferência da tensão.

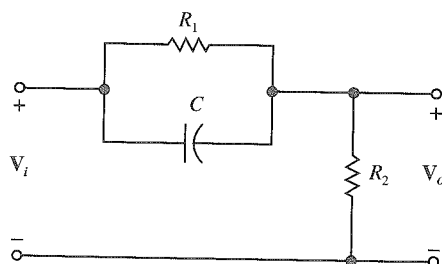
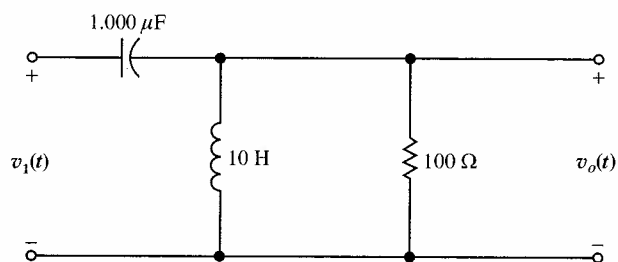


Figura P14.60

**14.61** Dada a rede da Figura P14.61, esboce o diagrama de ganho da função de transferência

$$G_v(j\omega) = \frac{V_o}{V_i}(j\omega)$$

Identifique o tipo de filtro.

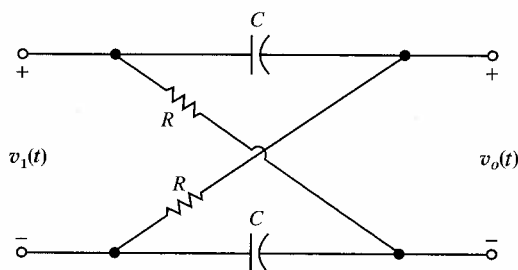


**Figura P14.61**

**14.62** Determine a função de transferência para a tensão

$$\frac{V_o}{V_i}(j\omega)$$

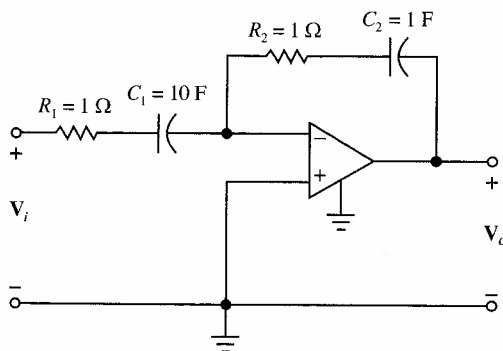
para a rede mostrada na Figura P14.62. Que tipo de filtro é este?



**Figura P14.62**

**14.63** Dada a rede da Figura P14.63,

- Determine a função de transferência para a tensão.
- Determine que tipo de filtro a rede representa.



**Figura P14.63**

- 14.64 Determine a função de transferência para a tensão e o diagrama de ganho para a rede mostrada na Figura P14.64 e identifique as propriedades do filtro.

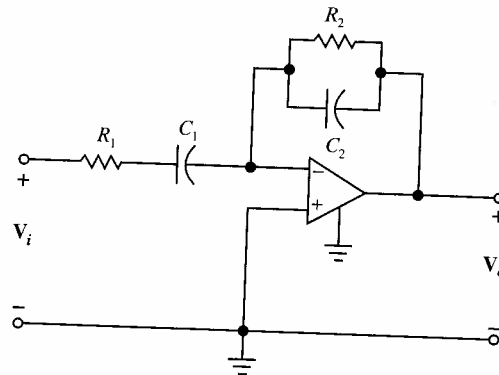


Figura P14.64

- 14.65 Dada a rede da Figura P14.65, determine a função de transferência

$$\frac{V_o}{V_i}(j\omega)$$

e determine que tipo de filtro a rede representa.

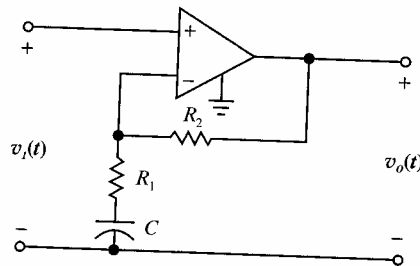


Figura P14.65

- 14.66 Dada a rede da Figura P14.66 e empregando-se o seguidor de tensão analisado no Capítulo 3, determine a função de transferência e sua característica de magnitude. Que tipo de filtro essa rede representa?

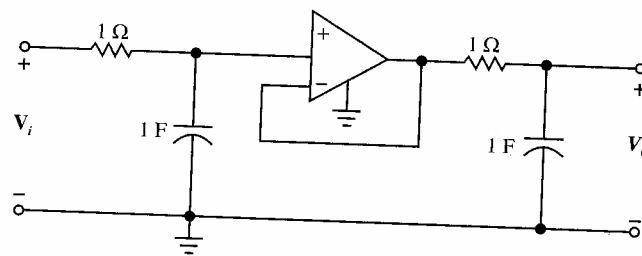


Figura P14.66

- 14.67** Use o PSPICE para traçar a resposta em frequência do filtro ativo mostrado na Figura P14.67. Trace sobre um intervalo de 1 Hz a 10 kHz utilizando 10 pontos por década. Para o modelo amp-op, use  $R_{in} = 500 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{out} = 100 \Omega$  e  $A = 10^7$ . Que tipo de filtro é este?

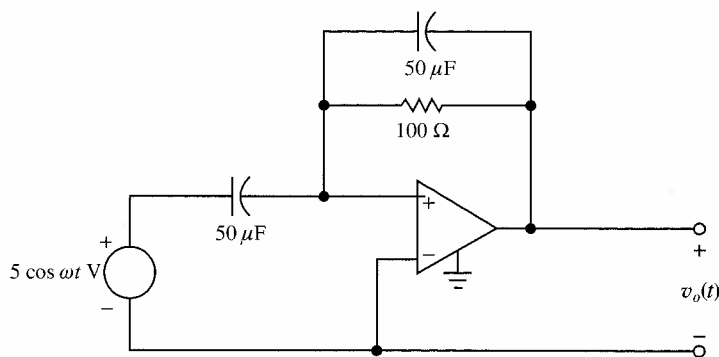


Figura P14.67

- 14.68** Use o PSPICE para traçar a resposta em frequência do filtro ativo mostrado na Figura P14.68. Trace os gráficos no intervalo de 1 Hz a 100 kHz utilizando 10 pontos por década. Ao modelar os amp-op's, use  $R_{in} = 500 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{out} = 100 \Omega$  e  $A = 10^7$ . Que tipo de filtro é este?

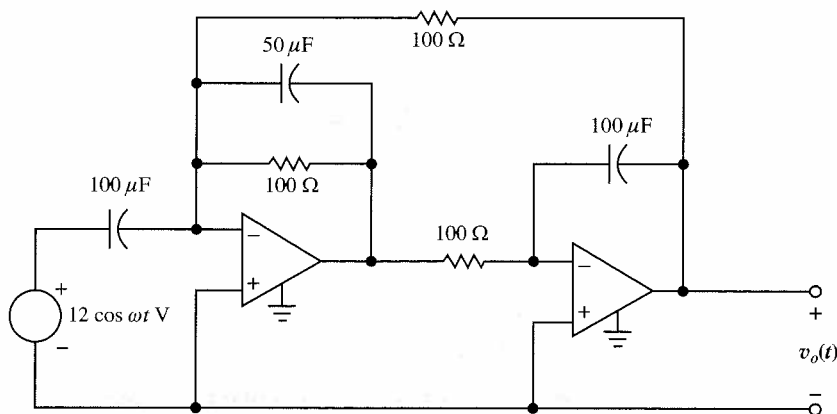


Figura P14.68

- 14.69** Se os dois filtros passa-baixas de primeira ordem forem conectados em série, o resultado é um filtro de segunda ordem. Encontre  $H_o$ ,  $\zeta$  e  $\omega_c$  para a rede na Figura P14.69.

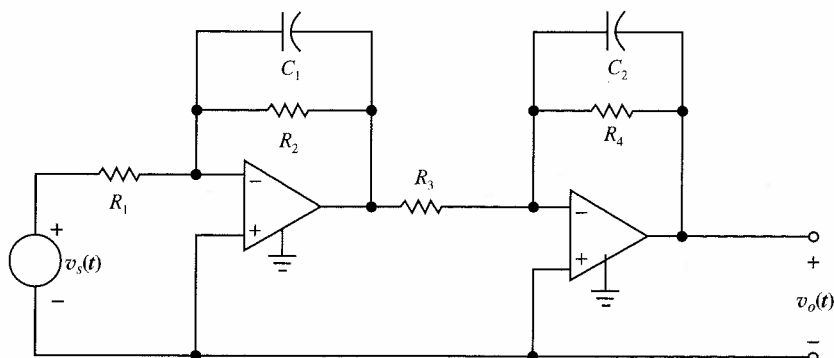


Figura P14.69

- 14.70** Dado o filtro passa-baixas de segunda ordem da Figura P14.69, projete um filtro que tenha  $H_o = 100$  e  $f_c = 5$  kHz. Ajuste  $R_1 = R_3 = 1$  k $\Omega$ , e seja  $R_2 = R_4$  e  $C_1 = C_2$ . Verifique os resultados com o PSPICE, gerando o diagrama de Bode para o filtro na faixa entre 500 Hz a 50 kHz usando 20 pontos por década. Use um modelo de amp-op com  $R_1 = \infty$ ,  $R_o = 0$  e  $A = (2)10^5$ .
- 14.71** O filtro passa-baixas de segunda ordem mostrado na Figura P14.71 possui a função de transferência

$$\frac{V_o}{V_1}(s) = \frac{-\frac{R_3}{R_1} \left( \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \right)}{s^2 + \frac{s}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Projete um filtro com  $H_o = -10$  e  $f_c = 5$  kHz, assumindo que  $C_1 = C_2 = 10$  nF e  $R_1 = 1$  k $\Omega$ .

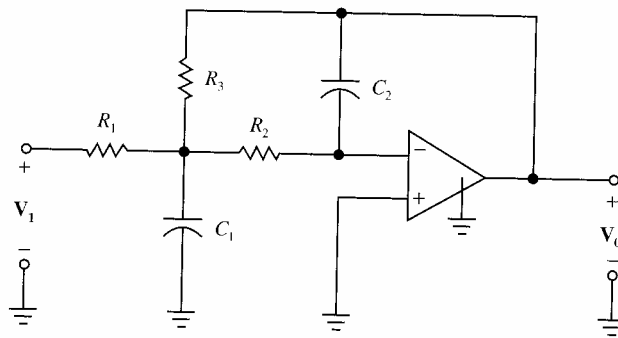


Figura P14.71

- 14.72** Projete um filtro ativo passa-altas de segunda ordem com  $\omega_c = 10$  krad/s,  $H_o = -5$  e  $\zeta = 1$ . Ajuste  $C_2 = C_3 = C$  e  $R_1 = 1$  k $\Omega$ .
- 14.73** Usando-se as equações para um filtro passa-faixa geral de segunda ordem, projete um filtro com um ganho na frequência de centro de  $-5$ ,  $\omega_0 = 50$  krad/s e  $BW = 10$  krad/s. Seja  $C_1 = C_2 = C$  e  $R_1 = 1$  k $\Omega$ . Qual é o  $Q$  do circuito? Use o PSPICE para gerar o diagrama de Bode do circuito na faixa entre 100 Hz a 100 kHz usando 30 pontos por década. Use um modelo de amp-op com  $R_1 = \infty$ ,  $R_o = 0$  e  $A = (2)10^5$ .

# Quadripolos

A rede linear da Figura 15.1a possui uma única *porta*, isto é, um único par de terminais. Essa porta *A-B* poderia representar os terminais de um único elemento (por exemplo, *R*, *L* ou *C*) ou poderia ser alguma interconexão entre esses elementos. A rede linear da Figura 15.1b é chamada de quadripolo. Como regra geral, os terminais *A-B* representam a porta de entrada e os terminais *C-D* representam a porta de saída.

Temos várias razões para estudar quadripolos e os parâmetros que os descrevem. Por exemplo, a maioria dos circuitos ou sistemas possuem pelo menos duas portas. Podemos colocar um sinal de entrada em uma porta e obter um sinal de saída de outra. Os parâmetros de duas portas descrevem completamente seu comportamento em termos da tensão e corrente de cada porta. Assim, o conhecimento dos parâmetros das redes de duas portas nos permite descrever sua operação em sua conexão a uma rede maior. Redes de duas portas são também importantes na modelagem de recursos eletrônicos e componentes de sistemas. Por exemplo, em eletrônica, redes de duas portas são empregadas para modelar componentes tais como transistores e amp-ops. Outros exemplos de componentes elétricos modelados por duas portas são transformadores e linhas de transmissão.

Em geral, descrevemos duas portas como uma rede consistindo de elementos *R*, *L* e *C*, transformadores, amp-ops, fontes dependentes, porém nenhuma fonte independente. A rede tem uma porta de entrada e uma de saída, e como acontece com o amp-op, um terminal pode ser comum a ambas as partes.

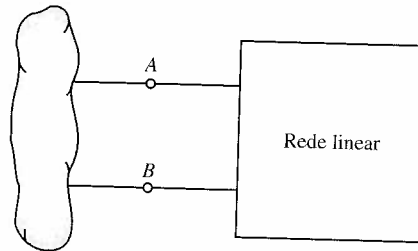
Neste capítulo, serão examinados quatro tipos de parâmetros de quadripolos: parâmetros de admitância, de impedância, híbridos e de transmissão. Demonstraremos a utilidade de cada conjunto de parâmetros, mostraremos como estão relacionados entre si e, finalmente, ilustraremos como redes de duas portas podem ser interconectadas em paralelo, em série ou em cascata.

## 15.1 Parâmetros de Admitância

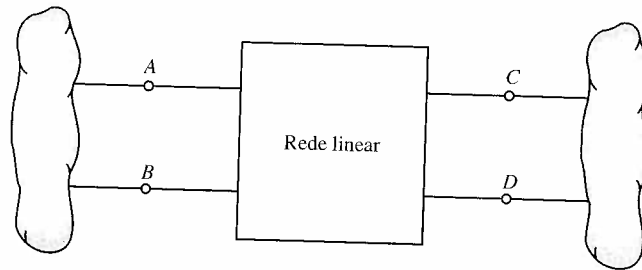
No quadripolo mostrado na Figura 15.2, é costume identificar e marcar as tensões e correntes como mostrado; isto é, os terminais superiores são positivos em relação aos terminais inferiores e as correntes entram na rede nos terminais superiores. Uma vez que a LKC deve ser satisfeita tanto na porta de entrada quanto na de saída, a corrente sai do quadripolo pelos terminais inferiores. Uma vez que a rede é linear e não contém fontes independentes, o princípio de superposição pode ser aplicado para determinar a corrente  $I_1$ , que pode ser

escrita como a soma de dois componentes, um devido a  $V_1$  e outro devido a  $V_2$ . Usando-se esse princípio, podemos escrever

$$I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2$$

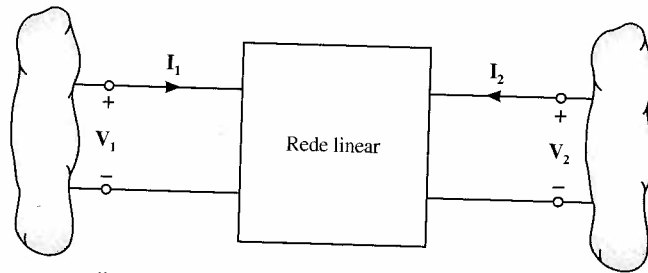


(a)



(b)

**Figura 15.1** (a) Rede de porta única; (b) quadripolo.



**Figura 15.2** Quadripolo generalizado.

onde  $y_{11}$  e  $y_{12}$  são constantes de proporcionalidade cujas unidades são siemens. De modo semelhante,  $I_2$  pode ser escrita como

$$I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2$$

Portanto, as duas equações que descrevem o quadripolo são

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 &= y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{aligned} \quad (15.1)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Note que o índice 1 se refere à porta de entrada e o índice 2 se refere à porta de saída, e as equações descrevem o que chamaremos de *parâmetros Y* para a rede. Se tais parâmetros  $y_{11}$ ,  $y_{12}$ ,  $y_{21}$  e  $y_{22}$  forem conhecidos, a operação entrada/saída do quadripolo estará completamente definida.

A partir da Equação 15.1, podemos determinar os parâmetros da maneira que se segue. Note que, nas equações que  $y_{11}$  é igual a  $I_1$  dividido por  $V_1$  com a saída curto-circuitada (ou seja,  $V_2 = 0$ ).

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad (15.2)$$



Uma vez que  $y_{11}$  é uma admitância na entrada medida em siemens com a saída curto-circuitada, ela é chamada de *admitância de entrada de curto-circuito*. As equações indicam que os outros parâmetros  $Y$  podem ser determinados de modo semelhante:

$$\begin{aligned} y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\ y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \\ y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \end{aligned} \quad (15.3)$$

$y_{12}$  e  $y_{21}$  são chamados de *admitâncias de transferência de curto-circuito* e  $y_{22}$  é chamado de *admitância de saída de curto-circuito*. O conjunto de parâmetros  $Y$  é referido como os *parâmetros de admitância de curto-circuito*. Repare que aplicando-se as definições acima, esses parâmetros poderiam ser determinados experimentalmente para um quadripolo cuja configuração real fosse desconhecida.

### Exemplo 15.1

Vamos determinar os parâmetros  $Y$  para a rede mostrada na Figura 15.3a.

A partir de nossas definições, a admitância  $y_{11}$  é igual a  $I_1$  dividido por  $V_1$ , com  $V_2 = 0$ , como mostrado na Figura 15.3b. Portanto, com a saída curto-circuitada, os dois resistores de  $6 \Omega$  estão em paralelo e  $V_1 = 6I_1$ ; desse modo

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{I_1}{6I_1} = \frac{1}{6} S$$

O parâmetro  $y_{12}$  é conseguido usando-se o circuito da Figura 15.3c.

$$I_2 = \frac{V_2}{6 + \frac{(3)(6)}{3+6}}$$

Empregando-se divisão de corrente, obtemos

$$-I_1 = I_2 \left( \frac{6}{3+6} \right)$$

Dessa forma

$$y_{12} = \frac{1}{12} S$$

De forma similar,  $y_{21}$  pode ser determinado da Figura 15.3b.

$$I_1 = \frac{V_1}{3 + \frac{(6)(6)}{6+6}}$$

e

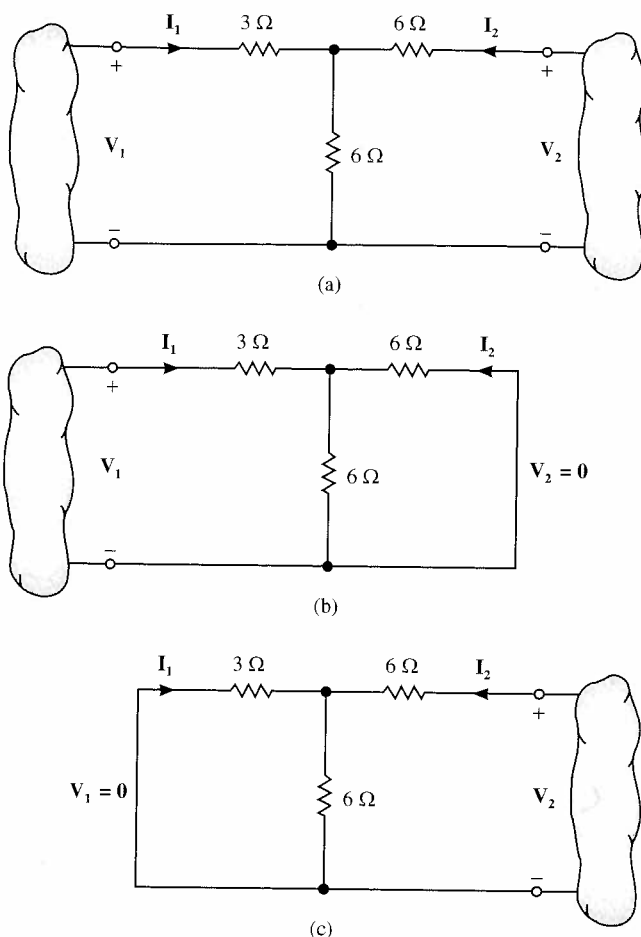
$$-I_2 = I_1 \left( \frac{6}{6+6} \right)$$

Logo,

$$y_{21} = \frac{1}{12} S$$

Finalmente,  $y_{22}$  é obtido da Figura 15.3c como

$$I_2 = \frac{V_2}{6 + \frac{(6)(3)}{6+3}}$$



**Figura 15.3** Quadripolo e configurações usadas para se calcular os parâmetros  $Y$ . e dessa forma

$$y_{22} = \frac{1}{8} \text{ S}$$

Dos valores determinados acima, descobrimos que as equações que descrevem a operação do quadripolo e os parâmetros de admitância são

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{6} V_1 - \frac{1}{12} V_2 \\ I_2 &= -\frac{1}{12} V_1 + \frac{1}{8} V_2 \end{aligned}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

### Exemplo 15.2

Desejamos determinar os parâmetros  $Y$  para o quadripolo mostrado na Figura 15.4a. Uma vez que esses parâmetros são conhecidos, vamos determinar a corrente em uma carga de  $4 \Omega$  que está conectada à porta de saída quando uma fonte de corrente de  $2 \text{ A}$  é aplicada à porta de entrada.

Da Figura 15.4b, notamos que

$$I_1 = V_1 \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right)$$

Portanto,

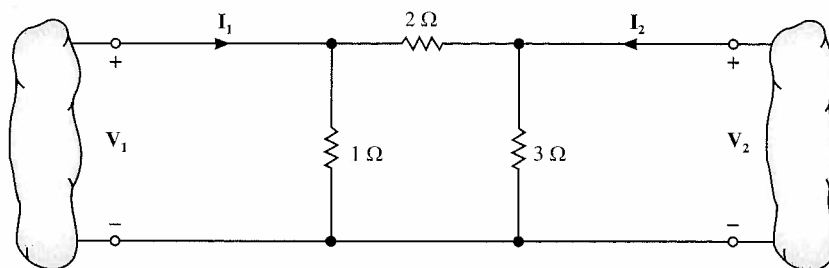
$$y_{11} = \frac{3}{2} \text{ S}$$

Como mostrado na Figura 15.4c,

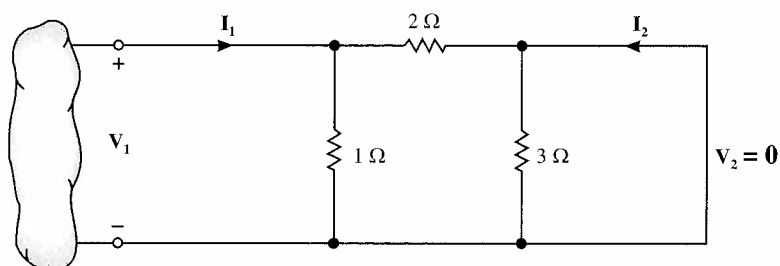
$$\mathbf{I}_1 = -\frac{\mathbf{V}_2}{2}$$

e dessa forma

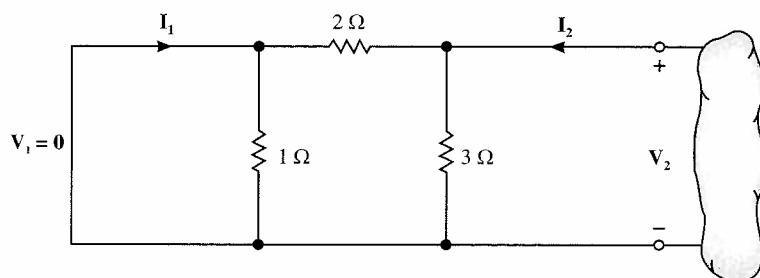
$$\mathbf{y}_{12} = -\frac{1}{2} \text{ S}$$



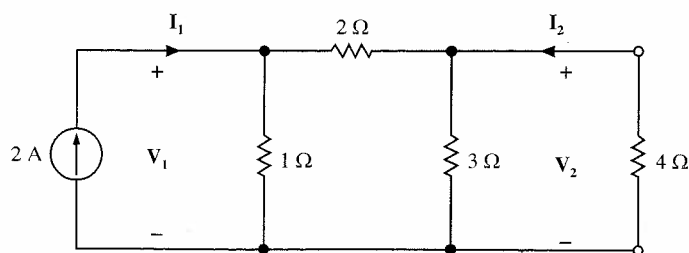
(a)



(b)



(c)



(d)

**Figura 15.4** Redes empregadas no Exemplo 15.2.

Além disso,  $\mathbf{y}_{21}$  é calculado da Figura 15.4b usando-se a equação

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{V}_1}{2}$$

e assim

$$\mathbf{y}_{21} = -\frac{1}{2} \text{ S}$$

Finalmente,  $y_{22}$  pode ser obtido a partir da Figura 15.4c usando-se

$$I_2 = V_2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

e

$$y_{22} = \frac{5}{6} \text{ S}$$

Desse modo, as equações que descrevem o quadripolo são

$$I_1 = \frac{3}{2} V_1 - \frac{1}{2} V_2$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} V_1 + \frac{5}{6} V_2$$

Essas equações podem agora ser empregadas para determinar a operação do quadripolo para algum dado conjunto de condições dos terminais. As condições dos terminais que examinaremos são mostradas na Figura 15.4d. Dessa figura, notamos que

$$I_1 = 2 \text{ A e } V_2 = -4I_2$$

Combinando-se essas duas equações quadripolares acima, obtém-se

$$2 = \frac{3}{2} V_1 - \frac{1}{2} V_2$$

$$0 = -\frac{1}{2} V_1 + \frac{13}{12} V_2$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que essas equações são simplesmente as equações nodais para a rede da Figura 15.4d. Resolvendo-se as equações, obtemos  $V_2 = 8/11 \text{ V}$  e portanto  $I_2 = -2/11 \text{ A}$ .

## Exercícios

**E15.1** Determine os parâmetros do quadripolo mostrado na Figura E15.1.

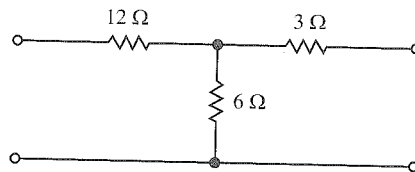


Figura E15.1

*Resp.:  $y_{11} = \frac{1}{14} \text{ S}$ ,  $y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{21} \text{ S}$ ,  $y_{22} = \frac{1}{7} \text{ S}$ .*

**E15.2** Determine os parâmetros para o quadripolo mostrado na Figura E15.2.

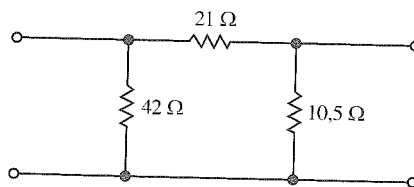


Figura E15.2

*Resp.:  $y_{11} = \frac{1}{14} \text{ S}$ ,  $y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{21} \text{ S}$ ,  $y_{22} = \frac{1}{7} \text{ S}$ .*

**E15.3** Se uma fonte de  $10 \text{ A}$  for conectada à entrada do quadripolo da Figura E15.2, determine a corrente no resistor de  $5 \Omega$  conectado à porta de saída.

*Resp.:  $I_2 = -4,29 \text{ A}$ .*

## 15.2 Parâmetros de Impedância

Se assumirmos mais uma vez que o quadripolo é uma rede linear que não contém fontes independentes, então, por meio de superposição, podemos escrever as tensões de entrada e saída como a soma dos dois componentes, um devido a  $\mathbf{I}_1$  e outro devido a  $\mathbf{I}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{z}_{11} \mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{z}_{21} \mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22} \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (15.4)$$

Essas equações, que descrevem o quadripolo, podem também ser escritas em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (15.5)$$

Tal como os parâmetros Y, esses parâmetros Z podem ser derivados como a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{11} &= \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \bigg|_{\mathbf{I}_2=0} \\ \mathbf{z}_{12} &= \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} \bigg|_{\mathbf{I}_1=0} \\ \mathbf{z}_{21} &= \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} \bigg|_{\mathbf{I}_2=0} \\ \mathbf{z}_{22} &= \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} \bigg|_{\mathbf{I}_1=0} \end{aligned} \quad (15.6)$$

Nessas equações, atribuir  $\mathbf{I}_1$  ou  $\mathbf{I}_2 = 0$  é equivalente a se abrir a porta de entrada ou saída do circuito. Portanto, os parâmetros Z podem ser chamados de *parâmetros de impedância de circuito aberto*.  $\mathbf{z}_{11}$  é chamado de *impedância de entrada de circuito aberto*,  $\mathbf{z}_{22}$  é chamado de *impedância de saída de circuito aberto* e  $\mathbf{z}_{12}$  e  $\mathbf{z}_{21}$  são chamados de *impedâncias de transferência de circuito aberto*.

### Exemplo 15.3

Desejamos determinar os parâmetros Z da rede da Figura 15.5a. Uma vez que os parâmetros são conhecidos, vamos usá-los para achar a corrente no resistor de  $4 \Omega$  que está conectado aos terminais de saída quando uma fonte  $12 \angle 0^\circ$  V com uma impedância interna de  $1 + j0 \Omega$  é conectado à entrada.

A partir da Figura 15.5a, notamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{11} &= 2 - j4 \Omega \\ \mathbf{z}_{12} &= -j4 \Omega \\ \mathbf{z}_{21} &= -j4 \Omega \\ \mathbf{z}_{22} &= -j4 + j2 = -j2 \Omega \end{aligned}$$

As equações para o quadripolo são, portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= (2 - j4)\mathbf{I}_1 - j4\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= -j4\mathbf{I}_1 - j2\mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

As condições dos terminais para a rede mostrada na Figura 15.5b são

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= 12 \angle 0^\circ - (1)\mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 &= -4\mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

Combinando essas duas equações de quadripolo, temos

$$\begin{aligned} 12 \angle 0^\circ &= (3 - j4)\mathbf{I}_1 - j4\mathbf{I}_2 \\ 0 &= -j4\mathbf{I}_1 + (4 - j2)\mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

É interessante notar que essas equações são as equações de malha para a rede. Se resolvermos as equações para  $I_2$ , obtemos  $I_2 = 1,61 \angle 137,73^\circ$  A, que é a corrente na carga de  $4 \Omega$ .

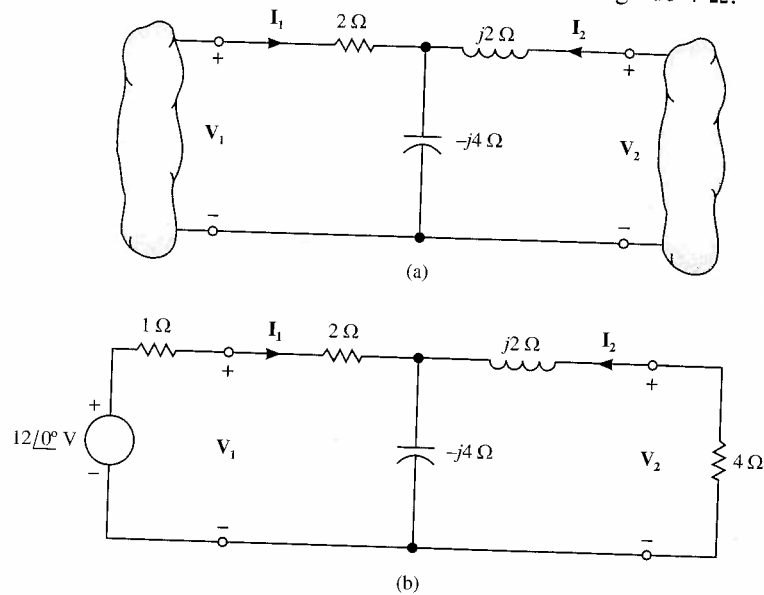


Figura 15.5 Circuitos empregados no Exemplo 15.3.

#### Exemplo 15.4

Vamos determinar os parâmetros Z para o quadripolo mostrado na Figura 15.6a.

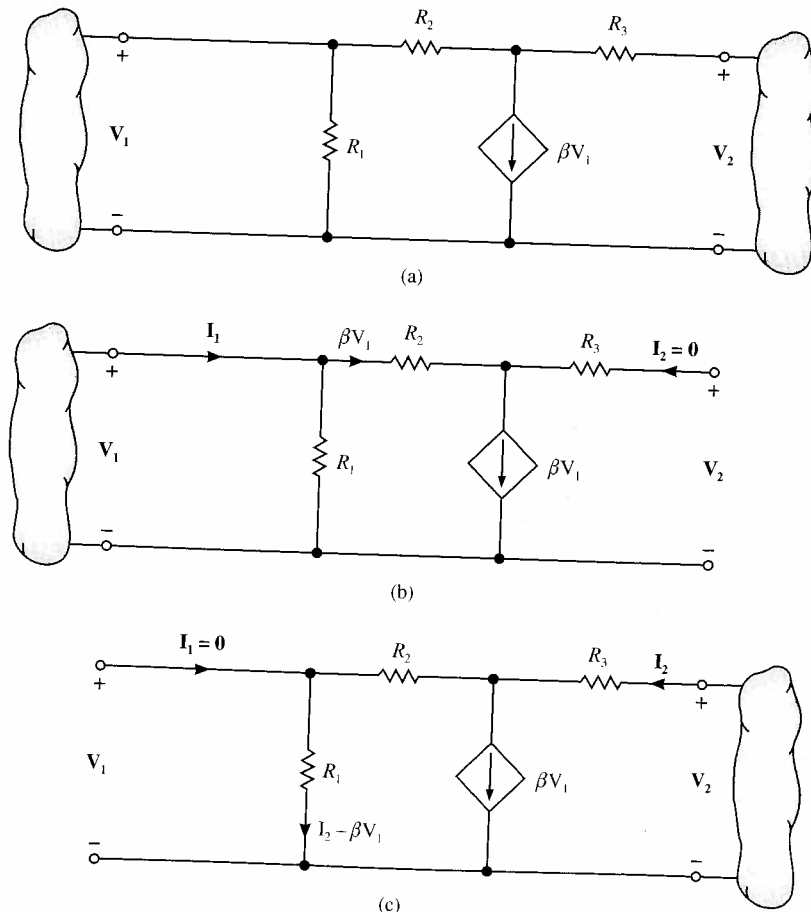


Figura 15.6 Circuitos empregados no Exemplo 15.4.

$z_{11}$  é obtido a partir da Figura 15.6b por meio da equação

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} + \beta V_1$$

e dessa maneira

$$z_{11} = \frac{R_1}{1 + \beta R_1}$$

$z_{12}$  é obtido a partir da Figura 15.6c. Note que com  $I_1 = 0$ , a corrente nos resistores  $R_1$  e  $R_2$  é  $I_2 - \beta V_1$ . Portanto,

$$V_1 = R_1 (I_2 - \beta V_1)$$

e dessa forma

$$z_{12} = \frac{R_1}{1 + \beta R_1}$$

O parâmetro  $z_{21}$  é derivado da Figura 15.6b. Já que  $I_2 = 0$ ,

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} + \beta V_1$$

Além disso, a LKT implica que

$$V_1 - \beta V_1 R_2 = V_2$$

A partir dessas duas equações, obtemos

$$z_{21} = \frac{R_1 (1 - \beta R_2)}{1 + \beta R_1}$$

Então  $z_{22}$  pode ser obtido da Figura 15.6c. Note que a LKT ao longo do laço externo é

$$V_2 = I_2 R_3 + (I_2 - \beta V_1) R_2 + V_1$$

porém

$$V_1 = R_1 (I_2 - \beta V_1)$$

Resolvendo-se as duas equações, tem-se

$$z_{22} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + \beta R_1 R_3}{1 + \beta R_1}$$

Logo, as equações de quadripolo para a rede são

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{R_1}{1 + \beta R_1} I_1 + \frac{R_1}{1 + \beta R_1} I_2 \\ V_2 &= \frac{R_1 (1 - \beta R_2)}{1 + \beta R_1} I_1 + \frac{R_1 + R_2 + R_3 + \beta R_1 R_3}{1 + \beta R_1} I_2 \end{aligned}$$

A esta altura, é importante notar que para todos os quadripolos, a aplicação da LKT e LKC produzirá as equações necessárias para determinar os parâmetros.

## Exercícios

**E15.4** Determine os parâmetros Z para a rede da Figura E15.1. Então calcule a corrente na carga de  $4 \Omega$ , caso uma fonte de  $24 \angle 0^\circ$  V seja conectada na porta de entrada.

*Resp.:  $I_2 = -0,73 \angle 0^\circ$  A.*

**E15.5** Determine os parâmetros Z para o quadripolo da Figura E15.5.

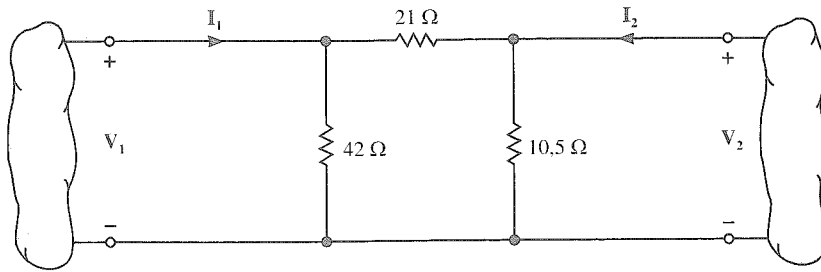


Figura E15.5

Resp.:  $z_{11} = 18 \Omega$ ,  $z_{12} = z_{21} = 6 \Omega$ ,  $z_{22} = 9 \Omega$ .

### 15.3 Parâmetros Híbridos

Fazendo as mesmas considerações feitas para determinar os parâmetros Y e Z, podemos obter o que normalmente é chamado de *parâmetro híbrido*. No par de equações que definem esses parâmetros,  $V_1$  e  $I_2$  são variáveis independentes. Portanto, as equações de quadripolo em termos de parâmetros híbridos são

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned} \quad (15.7)$$

em forma matricial

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (15.8)$$

Esses parâmetros são especialmente importantes na análise de circuitos com transistores. Os parâmetros são determinados por meio das seguintes equações:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} \\ h_{12} &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \\ h_{21} &= \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} \\ h_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} \end{aligned} \quad (15.9)$$

Os parâmetros  $h_{11}$ ,  $h_{12}$ ,  $h_{21}$  e  $h_{22}$  representam a *impedância de entrada de curto-circuito*, o *ganho da tensão reversa de circuito aberto*, o *ganho da corrente direta de curto-circuito*, e a *admitância de saída de circuito aberto*, respectivamente. Por causa dessa mistura de parâmetros, eles são chamados de parâmetros híbridos. Na análise de circuitos transistores, os parâmetros  $h_{11}$ ,  $h_{12}$ ,  $h_{21}$  e  $h_{22}$  são normalmente indicados como  $h_i$ ,  $h_r$ ,  $h_f$  e  $h_o$ .

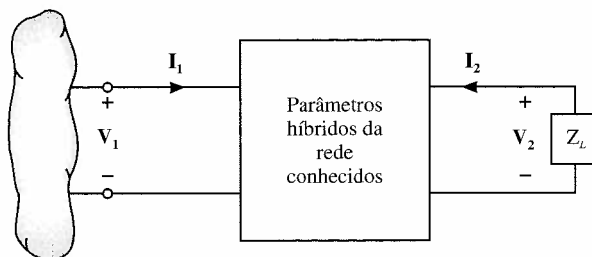
#### Exemplo 15.5

Sendo os parâmetros híbridos para o quadripolo mostrado na Figura 15.7 conhecidos, desejamos achar a expressão para a impedância de entrada  $Z_{in}$  da rede.

As equações para o quadripolo são

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned}$$





**Figura 15.7** Rede usada no Exemplo 15.5.

No entanto,

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 \mathbf{Z}_L$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{h}_{11} \mathbf{I}_1 - \mathbf{h}_{12} \mathbf{Z}_L \mathbf{I}_2 \\ 0 &= \mathbf{h}_{21} \mathbf{I}_1 - (1 + \mathbf{h}_{22} \mathbf{Z}_L) \mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

Resolvendo-se essas duas equações para  $\mathbf{I}_1$  e então formando a razão  $\mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1$ , tem-se

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{h}_{11} - \frac{\mathbf{h}_{12} \mathbf{h}_{21} \mathbf{Z}_L}{1 + \mathbf{h}_{22} \mathbf{Z}_L}$$

### Exemplo 15.6

Vamos determinar os parâmetros híbridos para a rede mostrada na Figura 15.8a.

$\mathbf{h}_{11}$  é determinado usando-se a Figura 15.8b. Da LKT

$$\mathbf{V}_1 - \mathbf{I}_1 \mathbf{R}_1 = \mathbf{V}$$

e usando-se a LKC, podemos escrever

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{R}_2} + j\omega \mathbf{C} \mathbf{V} + \alpha \mathbf{I}_1$$

Resolvendo-se essas duas equações, obtém-se

$$\mathbf{h}_{11} = \mathbf{R}_1 + \frac{1 - \alpha}{1/\mathbf{R}_2 + j\omega \mathbf{C}}$$

O parâmetro  $\mathbf{h}_{12}$  é derivado da Figura 15.8c. Uma vez que  $\mathbf{I}_1 = 0$ , a tensão sobre  $\mathbf{R}_2$  é  $\mathbf{V}_1$ , e portanto

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{R}_2 + 1/j\omega \mathbf{C}} \mathbf{R}_2$$

da qual chegamos a

$$\mathbf{h}_{12} = \frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_2 + 1/j\omega \mathbf{C}}$$

A Figura 15.8b é usada para calcular  $\mathbf{h}_{21}$ . As duas equações LKC para essa rede são

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{R}_2} + j\omega \mathbf{C} \mathbf{V} + \alpha \mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{I}_2 = -(j\omega \mathbf{C} \mathbf{V} + \alpha \mathbf{I}_1)$$

Resolvendo-se essas equações, podemos mostrar que

$$\mathbf{h}_{21} = -\frac{\alpha + j\omega \mathbf{C} \mathbf{R}_2}{1 + j\omega \mathbf{C} \mathbf{R}_2}$$

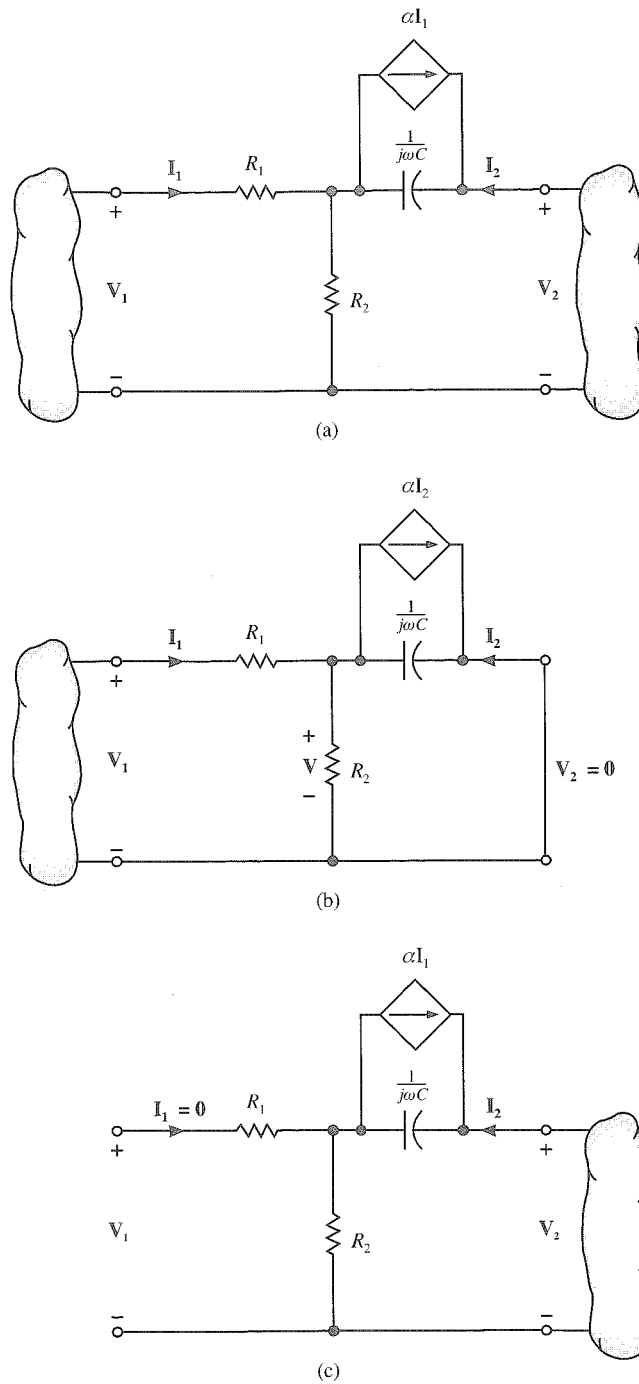


Figura 15.8 Circuitos empregados no Exemplo 15.6.

Finalmente,  $h_{22}$  é obtido da Figura 15.8c. A equação LKT para essa rede é

$$V_2 = I_2 \left( R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)$$

e assim

$$h_{22} = \frac{1}{R_2 + 1/j\omega C}$$

Portanto, as equações de quadripolo em termos dos parâmetros híbridos para a rede da Figura 15.8a são

$$\begin{aligned} V_1 &= \left( R_1 + \frac{1-\alpha}{1/R_2 + j\omega C} \right) I_1 + \frac{R_2}{R_2 + 1/j\omega C} V_2 \\ I_2 &= -\frac{\alpha + j\omega C R_2}{1 + j\omega C R_2} I_1 + \frac{1}{R_2 + 1/j\omega C} V_2 \end{aligned}$$

### Exemplo 15.7

Um circuito equivalente para o amp-op da Figura 15.9a é mostrado na Figura 15.9b. Vamos determinar os parâmetros híbridos para essa rede.

O parâmetro  $h_{11}$  é derivado da Figura 15.9c. Com a saída curto-circuitada,  $h_{11}$  é uma função de somente  $R_i$ ,  $R_1$  e  $R_2$  e

$$h_{11} = R_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

A Figura 15.9d é usada para derivar  $h_{12}$ . Uma vez que  $I_1 = 0$ ,  $V_i = 0$  e o relacionamento entre  $V_1$  e  $V_2$  é um simples divisor de tensão.

Portanto

$$h_{12} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

A LKT e a LKC podem ser aplicadas à Figura 15.9c para determinar  $h_{21}$ . As duas equações que relacionam  $I_2$  com  $I_1$  são

$$\begin{aligned} V_i &= I_1 R_i \\ I_2 &= \frac{-AV_i}{R_o} - \frac{I_1 R_1}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

Logo,

$$h_{21} = -\left( \frac{AR_i}{R_o} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

Finalmente, a relação entre  $I_2$  e  $V_2$  na Figura 15.9d é

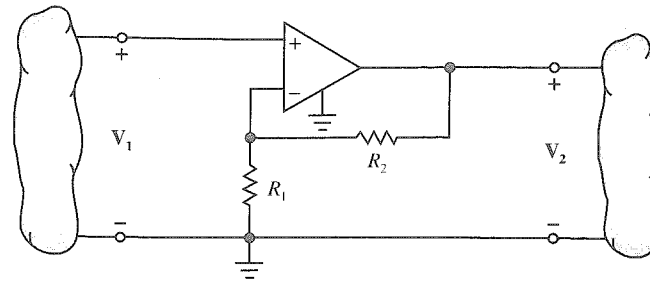
$$\frac{V_2}{I_2} = \frac{R_o (R_1 + R_2)}{R_o + R_1 + R_2}$$

e portanto

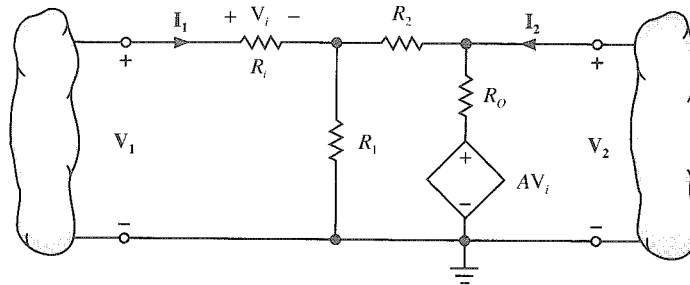
$$h_{22} = \frac{R_o + R_1 + R_2}{R_o (R_1 + R_2)}$$

As equações são, portanto,

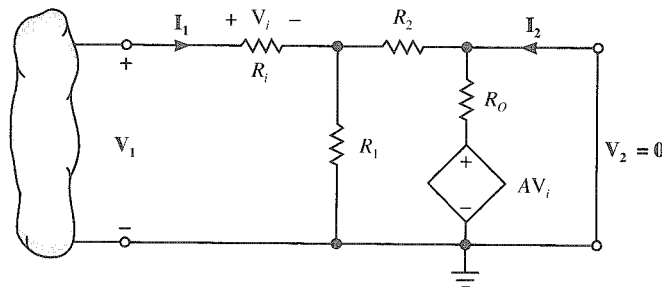
$$\begin{aligned} V_1 &= \left( R_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2 \\ I_2 &= -\left( \frac{AR_i}{R_o} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) I_1 + \frac{R_o + R_1 + R_2}{R_o (R_1 + R_2)} V_2 \end{aligned}$$



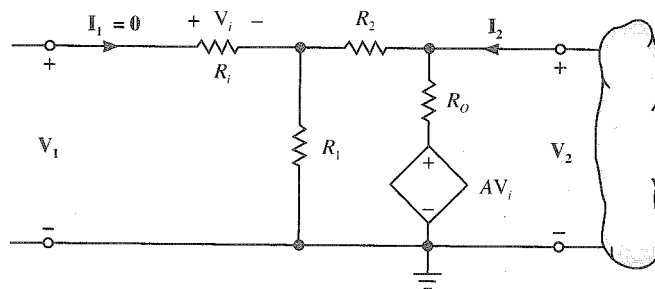
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 15.9 Circuitos empregados no Exemplo 15.7.

### Exercícios

**E15.6** Determine os parâmetros híbridos para a rede mostrada na Figura E15.1.

*Resp.:*  $h_{11} = 14\Omega$ ,  $h_{12} = \frac{2}{3}$ ,  $h_{21} = -\frac{2}{3}$ ,  $h_{22} = \frac{1}{9}\text{S}$ .

**E15.7** Caso uma carga de  $4\Omega$  seja conectada à porta de saída da rede examinada no Exercício E15.6, determine a impedância de entrada do quadripolo com a carga tendo sido conectada.

*Resp.:*  $Z_i = 15,23\Omega$ .

**E15.8** Calcule os parâmetros híbridos para a rede mostrada na Figura E15.2.

*Resp.:*  $h_{11} = 4\Omega$ ,  $h_{12} = \frac{2}{3}$ ,  $h_{21} = -\frac{2}{3}$ ,  $h_{22} = \frac{1}{9}\text{S}$ .

**E15.9** Considere a rede da Figura E15.9. O quadripolo é um modelo híbrido para um transistor básico. Determine o ganho de tensão da rede por inteiro,  $V_2/V_S$ , caso uma fonte  $V_S$  com resistência interna  $R_1$  seja aplicada à entrada do quadripolo e uma carga  $R_L$  seja conectada à porta de saída.

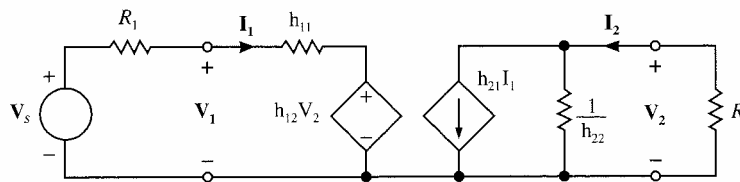


Figura E15.9

Resp.:  $\frac{V_2}{V_S} = \frac{-h_{21}}{(R_1 + h_{11})(h_{22} + 1/R_L) - h_{21}h_{12}}$ .

## 15.4 Parâmetros de Transmissão

Os últimos parâmetros que discutiremos são chamados de parâmetros de transmissão. Eles são definidos pelas equações

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned} \quad (15.10)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (15.11)$$

Tais parâmetros são muito úteis na análise de circuitos conectados em cascata, como vamos mostrar mais adiante. Os parâmetros são determinados por meio das seguintes equações:

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \\ B &= \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} \\ C &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \\ D &= \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} \end{aligned} \quad (15.12)$$

**A**, **B**, **C** e **D** representam a *razão da tensão de circuito aberto*, a *impedância negativa de transferência de curto-circuito*, a *admitância de transferência de circuito aberto* e a *razão negativa da corrente de curto-circuito*, respectivamente. Por motivos óbvios, os parâmetros de transmissão são normalmente referidos como os *parâmetros ABCD*.

### Exemplo 15.8

Vamos determinar os parâmetros de transmissão para a rede da Figura 15.10a.

O parâmetro **A** é determinado da Figura 15.10b. Uma vez que  $I_2 = 0$ ,  $V_1$  e  $V_2$  são relacionados por meio das duas equações LKT

$$\begin{aligned} V_2 &= \gamma I_1 + I_2 R_2 \\ V_1 &= I_1 (R_1 + R_2) \end{aligned}$$

Resolvendo-se essas equações para  $V_1/V_2$ , tem-se

$$A = \frac{R_1 + R_2}{\gamma + R_2}$$

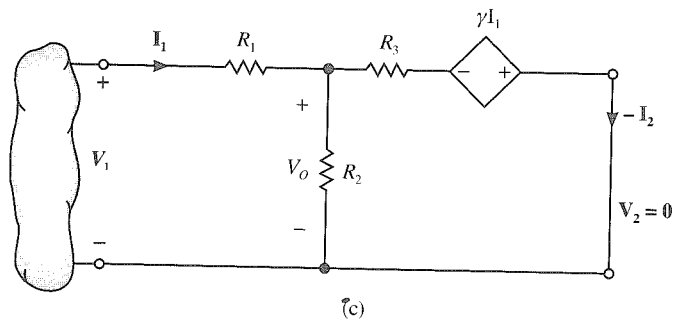
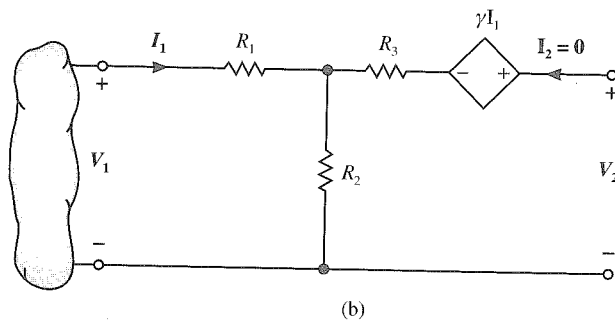
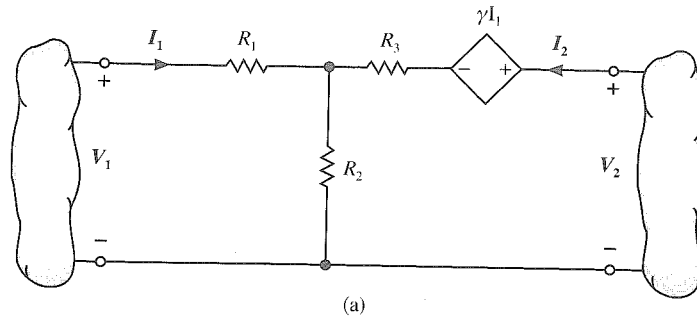


Figura 15.10 Circuitos usados no Exemplo 15.8.

O parâmetro  $B$  é obtido da Figura 15.10c. Nesse caso, é conveniente assumir que  $-I_2 = 1$  A e resolvermos para  $V_1$ . Sob tal condição

$$V_o = R_2 - \gamma I_1$$

e

$$I_1 = 1 + \frac{V_o}{R_2}$$

Portanto

$$I_1 = \frac{R_2 + R_3}{R_2 + \gamma}$$

Então

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 R_1 + V_o \\ &= \frac{R_2 + R_3}{R_2 + \gamma} R_1 + R_3 - \gamma \frac{R_2 + R_3}{R_2 + \gamma} \\ &= R_3 + \frac{(R_1 - \gamma)(R_2 + R_3)}{R_2 + \gamma} \end{aligned}$$

e assim

$$B = R_3 + \frac{(R_1 - \gamma)(R_2 + R_3)}{R_2 + \gamma}$$

Na Figura 15.10b, se assumirmos que  $I_1 = 1$  A, então  $V_2$  é

$$V_2 = R_2 + \gamma$$

e portanto

$$C = \frac{1}{R_2 + \gamma}$$

A Figura 15.10c é empregada para determinar o parâmetro  $D$ . Na análise acima, ao obter o parâmetro  $B$ , foi assumido que  $-I_2 = 1$  A, então

$$I_1 = \frac{R_2 + R_3}{R_2 + \gamma}$$

e portanto

$$D = \frac{R_2 + R_3}{R_2 + \gamma}$$

As equações de quadripolo para a rede são, portanto,

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{R_1 + R_2}{R_2 + \gamma} V_2 - \left[ R_3 + \frac{(R_1 - \gamma)(R_2 + R_3)}{R_2 + \gamma} \right] I_2 \\ I_1 &= \frac{1}{R_2 + \gamma} V_2 - \frac{R_2 + R_3}{R_2 + \gamma} I_2 \end{aligned}$$

### Exemplo 15.9

Vamos determinar agora os parâmetros de transmissão para a rede da Figura 15.11a. A maneira mais conveniente de abordar esse tipo de problema é assumir um valor para uma das variáveis em um parâmetro e resolver a rede para a outra variável usando a LKT e a LKC. A fim de simplificarmos nossa análise, temos definido também as variáveis  $V_A$ ,  $V_B$  e  $I_o$ , como mostrado na Figura 15.11b e c.

O parâmetro  $A$  é obtido a partir da Figura 15.11b. Se assumirmos que  $V_2 = 1$  V, então  $V_B = 1$  V e  $I_o = j\omega$  A, e assim

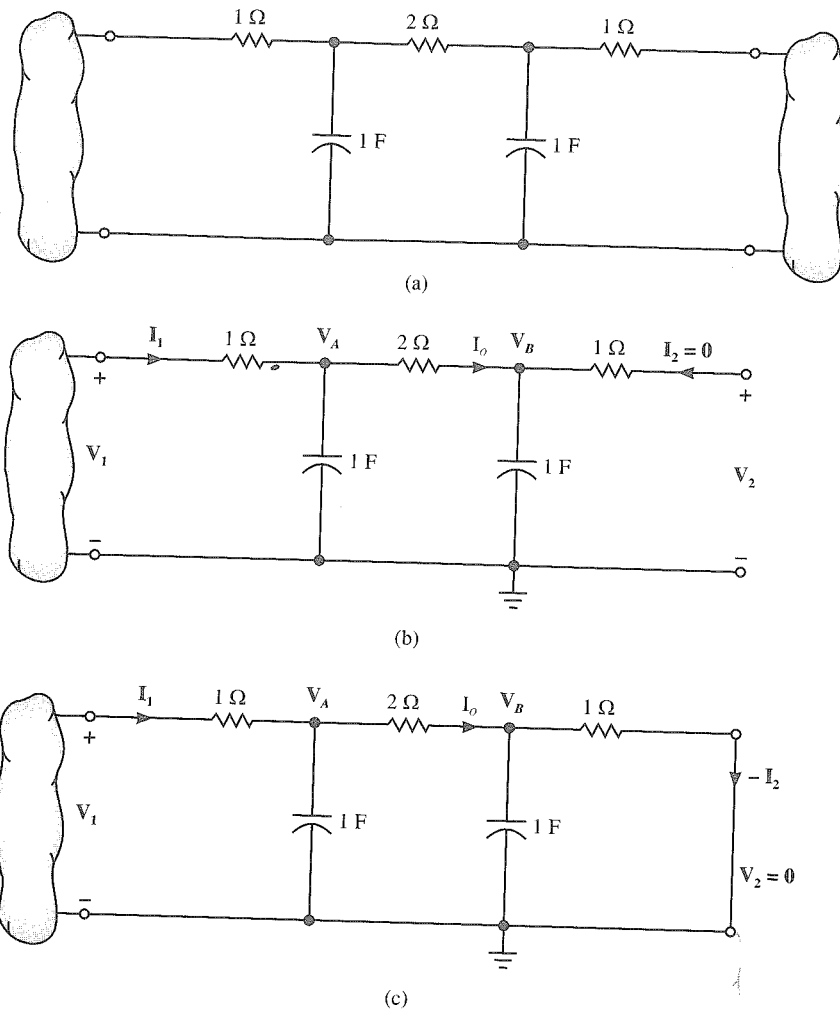
$$V_A = 2I_o + V_B = 2j\omega + 1 \text{ V}$$

Então

$$\begin{aligned} I_1 &= j\omega V_A + I_o \\ &= -2\omega^2 + 2j\omega \text{ A} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} V_1 &= (1)I_1 + V_A \\ &= -2\omega^2 + 4j\omega + 1 \text{ V} \end{aligned}$$



**Figura 15.11** Circuitos usados no Exemplo 15.9.

e portanto,

$$A = -2\omega^2 + 4j\omega + 1$$

A Figura 15.11c é usada para se derivar o parâmetro **B**. Assumindo-se que  $-I_2 = 1$  A, então  $V_B = 1$  V,  $I_o = 1 + j\omega$  A, e

$$V_A = 2I_o + V_B = 3 + j2\omega \text{ V}$$

Então

$$\begin{aligned} I_1 &= I_o + j\omega V_A \\ &= (1 + j\omega) + j\omega(3 + 2\omega) \\ &= 1 + 4j\omega - 2\omega^2 \text{ A} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} V_1 &= (1)I_1 + V_A \\ &= 4 + 6j\omega - 2\omega^2 \text{ V} \end{aligned}$$



Portanto

$$\mathbf{B} = 4 + 6j\omega - 2\omega^2$$

A partir da análise usada acima para derivar o parâmetro  $\mathbf{A}$ , achamos que

$$\mathbf{C} = -2\omega^2 + 2j\omega$$

De modo semelhante, tem-se

$$\mathbf{D} = -2\omega^2 + 4j\omega + 1$$

Portanto, as equações de quadripolo são

$$\mathbf{V}_1 = (-2\omega^2 + 4j\omega + 1)\mathbf{V}_2 - (-2\omega^2 + 6j\omega + 4)\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = (-2\omega^2 + 2j\omega)\mathbf{V}_2 - (-2\omega^2 + 4j\omega + 1)\mathbf{I}_2$$

## Exercícios

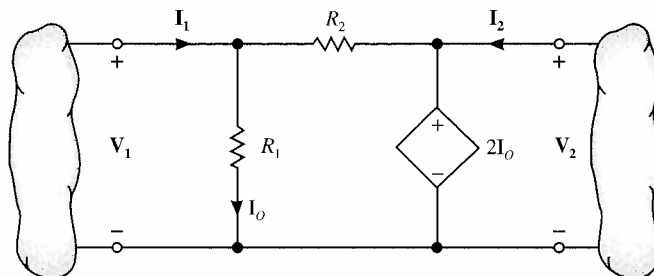
**E15.10** Determine os parâmetros de transmissão para a rede mostrada na Figura E15.1.

**Resp.:**  $\mathbf{A} = 3$ ,  $\mathbf{B} = 21\Omega$ ,  $\mathbf{C} = \frac{1}{6}\text{S}$ ,  $\mathbf{D} = \frac{3}{2}$ .

**E15.11** Calcule os parâmetros de transmissão para o quadripolo da Figura E15.2.

**Resp.:**  $\mathbf{A} = 3$ ,  $\mathbf{B} = 21\Omega$ ,  $\mathbf{C} = \frac{1}{6}\text{S}$ ,  $\mathbf{D} = \frac{3}{2}$ .

Cabe aqui um último comentário sobre a derivação dos parâmetros de quadripolo. É perfeitamente possível que alguns dos parâmetros de quadripolo para determinada rede não existam. Por exemplo, considere a rede da Figura 15.12. O parâmetro  $y_{11}$  é determinado curto-circuitando a saída e calculando a razão  $\mathbf{I}_1/\mathbf{V}_1$ . Entretanto, curto-circuitar a saída implica  $2\mathbf{I}_o = 0$ , e portanto  $\mathbf{I}_o = 0$ . Entretanto,  $\mathbf{I}_o$  não pode ser zero se uma tensão  $\mathbf{V}_1$  diferente de zero for aplicada à entrada. Portanto, essa rede não possui o conjunto de parâmetros  $\mathbf{Y}$ .



**Figura 15.12** Exemplo de rede que não possui o conjunto de parâmetros  $\mathbf{Y}$  a menos que a fonte tenha uma impedância interna.

## 15.5 Circuitos Equivalentes

Diversos circuitos equivalentes podem ser empregados para representar um quadripolo. Tais circuitos possuem as mesmas características que a rede original quando vistas a partir dos seus terminais, mesmo que tais características não sejam fisicamente realizáveis, como por exemplo, impedâncias negativas. Os circuitos equivalentes mais populares são mostrados na Figura 15.13. Uma vez que existem quatro coeficientes nas equações de quadripolo, cada um dos circuitos contém quatro elementos. O leitor pode facilmente verificar a validade dos circuitos da Figura 15.13, escrevendo as equações do circuito que caracterizam cada um deles.

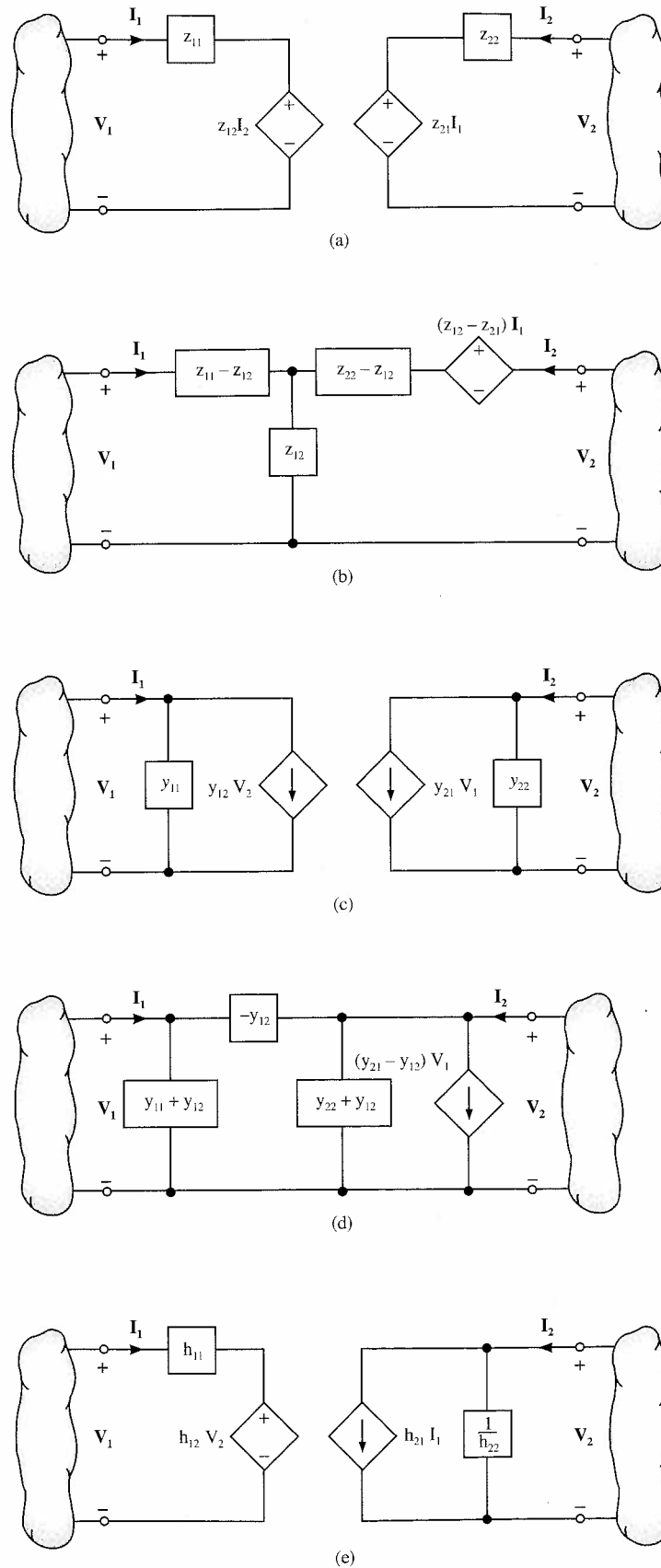


Figura 15.13 Alguns circuitos equivalentes de quadripolos.

## 15.6 Conversão de Parâmetros

Se existirem todos os parâmetros de quadripolo de uma rede, é possível relacionar um conjunto de parâmetros a outro uma vez que os parâmetros descrevem relações entre as variáveis  $V_1$ ,  $I_1$ ,  $V_2$  e  $I_2$ . Os exemplos a seguir ilustram como determinar um conjunto de parâmetros a partir de outro.

### Exemplo 15.10

Vamos mostrar como determinar os parâmetros híbridos a partir dos parâmetros Z.

As equações de quadripolo envolvendo os parâmetros são

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{aligned}$$

Se resolvermos a segunda equação do parâmetro Z para  $I_2$ , ela estará diretamente na forma da segunda equação de parâmetros híbridos. Portanto,

$$I_2 = \frac{-z_{21}}{z_{22}} I_1 + \frac{1}{z_{22}} V_2$$

Substituindo-se essa equação para  $I_2$  na primeira equação do parâmetro Z, obtém-se

$$V_1 = \frac{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}}{z_{22}} I_1 + \frac{z_{12}}{z_{22}} V_2$$

Comparando-se as equações de  $I_2$  e  $V_1$  em termos dos parâmetros Z com as equações dos parâmetros híbridos, percebe-se que

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{\Delta_Z}{z_{22}} & h_{12} &= \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ h_{21} &= \frac{-z_{21}}{z_{22}} & h_{22} &= \frac{1}{z_{22}} \end{aligned}$$

onde  $\Delta_Z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$ . ■

### Exemplo 15.11

Vamos determinar os parâmetros Z a partir dos parâmetros Y. Podemos facilmente ilustrar a conversão usando análise matricial por causa da natureza dos dois conjuntos de equações.

Em forma matricial, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Da segunda equação, notamos que

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

e assim podemos determinar os parâmetros Z pela inversão da matriz para os parâmetros Y (ou seja,  $[Z] = [Y]^{-1}$ ). O determinante da matriz é

$$\Delta_Y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$$

A matriz adjunta é

$$\begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}$$

Portanto, a inversa é

$$\frac{1}{\Delta_Y} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}$$

e assim os parâmetros Z em termos dos parâmetros Y são

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{y_{22}}{\Delta_Y} & z_{12} &= \frac{-y_{12}}{\Delta_Y} \\ z_{21} &= \frac{-y_{21}}{\Delta_Y} & z_{22} &= \frac{y_{11}}{\Delta_Y} \end{aligned}$$

A Tabela 15.1 contém fórmulas de conversão que relacionam um conjunto de parâmetros de quadripolo ao outro. Note que  $\Delta_Z$ ,  $\Delta_Y$ ,  $\Delta_H$  e  $\Delta_T$  se referem aos determinantes das matrizes para os parâmetros Z, Y, híbridos, e ABCD, respectivamente. Portanto, dado um conjunto de parâmetros para uma rede, podemos usar a Tabela 15.1 para achar os demais.

**Tabela 15.1** Fórmulas de conversão para parâmetros de quadripolos.

|                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                               |                                                                                                |                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$                                                                                                            | $\begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{\Delta_Y} & \frac{-y_{12}}{\Delta_Y} \\ \frac{-y_{21}}{\Delta_Y} & \frac{y_{11}}{\Delta_Y} \end{bmatrix}$                                      | $\begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta_T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} \frac{\Delta_H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{bmatrix}$   |
| $\begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta_Z} & \frac{-z_{12}}{\Delta_Z} \\ \frac{-z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{z_{11}}{\Delta_Z} \end{bmatrix}$                                      | $\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$                                                                                                            | $\begin{bmatrix} \frac{D}{B} & \frac{-\Delta_T}{B} \\ \frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_H}{h_{11}} \end{bmatrix}$   |
| $\begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{\Delta_Z} & \frac{\Delta_H}{z_{21}} \\ \frac{z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix}$                                          | $\begin{bmatrix} \frac{-y_{22}}{y_{21}} & \frac{-1}{y_{21}} \\ \frac{\Delta_Y}{y_{21}} & \frac{-y_{11}}{y_{21}} \end{bmatrix}$                                                | $\begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{B}{D} \end{bmatrix}$                                      | $\begin{bmatrix} \frac{-\Delta_H}{h_{21}} & \frac{-h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{h_{21}}{h_{21}} & \frac{-1}{h_{21}} \end{bmatrix}$ |
| $\begin{bmatrix} \frac{\Delta_Z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{z_{22}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \\ \frac{-z_{21}}{z_{22}} & \frac{z_{11}}{z_{22}} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} & \frac{-y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{11}}{y_{21}} & \frac{\Delta_Y}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{y_{11}}{y_{11}} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta_T}{D} \\ \frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} \frac{h_{11}}{h_{21}} & \frac{h_{12}}{h_{21}} \\ \frac{h_{21}}{h_{21}} & \frac{h_{22}}{h_{21}} \end{bmatrix}$ |

## Exercícios

**E15.12** Determine os parâmetros Y para um quadripolo, caso os parâmetros sejam

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

**Resp.:**  $y_{11} = \frac{1}{14} \text{ S}$ ,  $y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{21} \text{ S}$ ,  $y_{22} = \frac{1}{9} \text{ S}$ .

**E15.13** Dados os parâmetros Z para um quadripolo do Exercício E15.12, determine os parâmetros híbridos para essa rede.

**Resp.:**  $h_{11} = 14 \Omega$ ,  $h_{12} = \frac{2}{3}$ ,  $h_{21} = -\frac{2}{3}$ ,  $h_{22} = \frac{1}{9} \text{ S}$ .

## 15.7 Interconexão de Quadripolos

Nesta seção, vamos ilustrar como tratar determinada rede como uma combinação de sub-redes. Iremos analisar o quadripolo como se fosse uma interconexão de quadripolos mais simples. Apesar de quadripolos poderem ser interconectados de várias maneiras, iremos tratar somente de três tipos de conexões: em paralelo, em série e em cascata.

### Conexão em Paralelo

Suponhamos que um quadripolo  $N$  é composto de dois quadripolos  $N_a$  e  $N_b$  que estão interconectados como mostrado na Figura 15.14a. As equações das redes  $N_a$  e  $N_b$  são

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{1a} &= \mathbf{y}_{11a} \mathbf{V}_{1a} + \mathbf{y}_{12a} \mathbf{V}_{2a} \\ \mathbf{I}_{2a} &= \mathbf{y}_{21a} \mathbf{V}_{1a} + \mathbf{y}_{22a} \mathbf{V}_{2a} \end{aligned} \quad (15.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{1b} &= \mathbf{y}_{11b} \mathbf{V}_{1b} + \mathbf{y}_{12b} \mathbf{V}_{2b} \\ \mathbf{I}_{2b} &= \mathbf{y}_{21b} \mathbf{V}_{1b} + \mathbf{y}_{22b} \mathbf{V}_{2b} \end{aligned} \quad (15.14)$$

Desde que as características dos terminais das duas redes  $N_a$  e  $N_b$  não sejam alteradas pela interconexão ilustrada na Figura 15.14a, então

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_{1a} = \mathbf{V}_{1b} \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{V}_{2a} = \mathbf{V}_{2b} \\ \mathbf{I}_1 &= \mathbf{I}_{1a} + \mathbf{I}_{1b} \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}_{2a} + \mathbf{I}_{2b} \end{aligned} \quad (15.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= (\mathbf{y}_{11a} + \mathbf{y}_{11b}) \mathbf{V}_1 + (\mathbf{y}_{12a} + \mathbf{y}_{12b}) \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= (\mathbf{y}_{21a} + \mathbf{y}_{21b}) \mathbf{V}_1 + (\mathbf{y}_{22a} + \mathbf{y}_{22b}) \mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (15.16)$$

Portanto, os parâmetros  $\mathbf{Y}$  para a rede total são

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11a} + \mathbf{y}_{11b} & \mathbf{y}_{12a} + \mathbf{y}_{12b} \\ \mathbf{y}_{21a} + \mathbf{y}_{21b} & \mathbf{y}_{22a} + \mathbf{y}_{22b} \end{bmatrix} \quad (15.17)$$

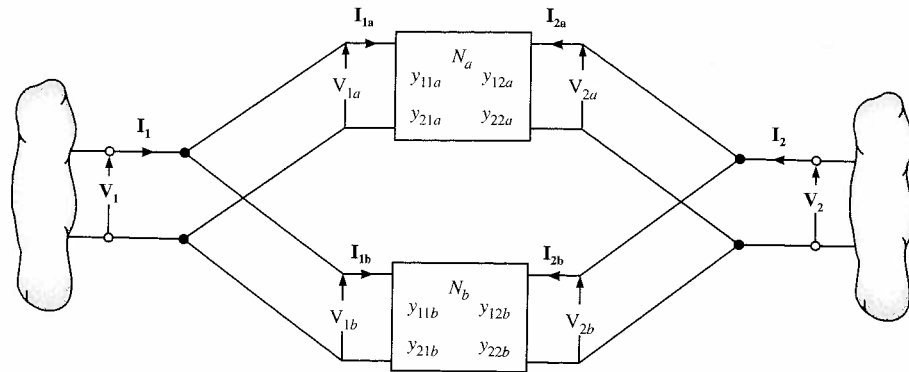
e, assim, para determinar os parâmetros  $\mathbf{Y}$  para a rede total, simplesmente adicionamos os parâmetros  $\mathbf{Y}$  das duas redes  $N_a$  e  $N_b$ . A Equação 15.16 é sempre válida se as duas redes forem da forma mostrada na Figura 15.14b. No caso geral, a Equação 15.16 é válida se as redes satisfizerem os testes de Brune (assim chamados em homenagem a O. Brune, que desenvolveu tais procedimentos) que exigem que a tensão  $\mathbf{V}_o$  seja zero quando as redes  $N_a$  e  $N_b$  estiverem interconectadas como mostrado na Figura 15.14c e d. Caso as redes  $N_a$  e  $N_b$  falhem em tais testes, um transformador ideal com relação de espiras 1:1 pode ser empregado para assegurar que as Equações 15.16 sejam satisfeitas. Uma localização possível para o transformador é mostrada na Figura 15.14e; no entanto, o transformador pode ser colocado em qualquer uma das quatro portas mostradas na Figura 15.14a. Um exemplo em que um transformador ideal é necessário para fornecer o isolamento necessário é mostrado na Figura 15.15. Note que se dois quadripolos são conectados em paralelo sem o uso de um transformador ideal, as impedâncias  $\mathbf{z}_7$  e  $\mathbf{z}_8$  são curto-circuitadas pela interconexão e, assim, a Equação 15.16 não se aplica.

### Exemplo 15.12

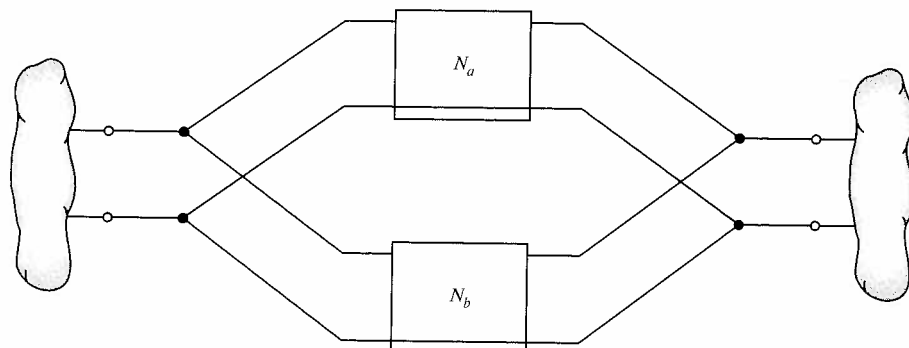
Desejamos determinar os parâmetros  $\mathbf{Y}$  da rede mostrada na Figura 15.16a considerando-a como uma combinação paralela das duas redes mostradas na Figura 15.16b. A rede capacitiva será referida como  $N_a$  e a rede resistiva, como  $N_b$ .

Os parâmetros  $\mathbf{Y}$  para  $N_a$  são

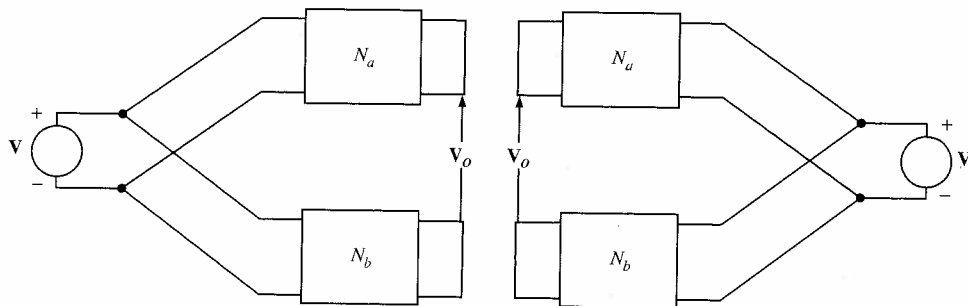
$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{11a} &= j\frac{1}{2}S & \mathbf{y}_{12a} &= -j\frac{1}{2}S \\ \mathbf{y}_{21a} &= -j\frac{1}{2}S & \mathbf{y}_{22a} &= j\frac{1}{2}S \end{aligned}$$



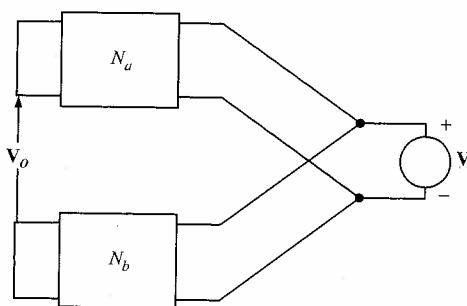
(a)



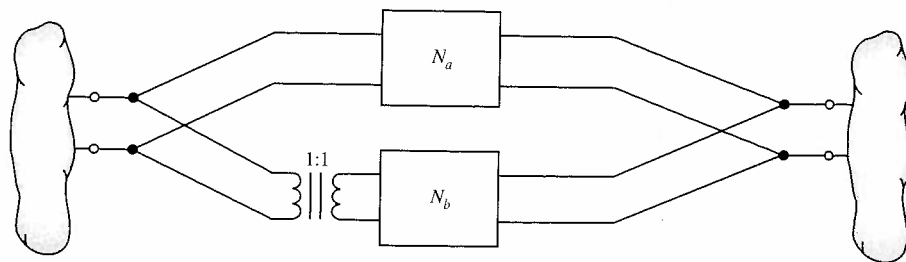
(b)



(c)

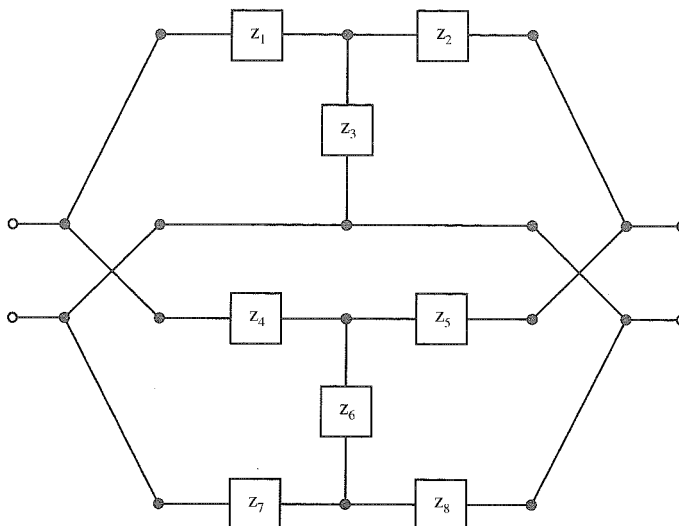


(d)

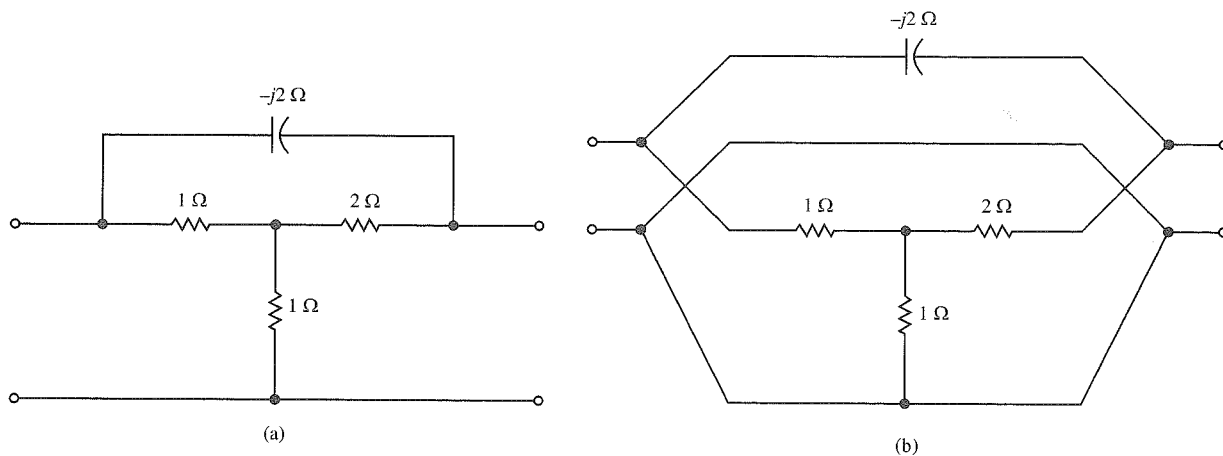


(e)

Figura 15.14 Interconexão paralela de quadripolos.



**Figura 15.15** Exemplo em que a conexão paralela dos quadripolos não pode ser realizada sem o uso de um transformador ideal.



**Figura 15.16** Rede composta de uma combinação paralela de duas sub-redes.

e os parâmetros Y para  $N_b$  são

$$\begin{aligned} y_{11b} &= \frac{3}{5} S & y_{12b} &= -\frac{1}{5} S \\ y_{21b} &= -\frac{1}{5} S & y_{22b} &= \frac{2}{5} S \end{aligned}$$

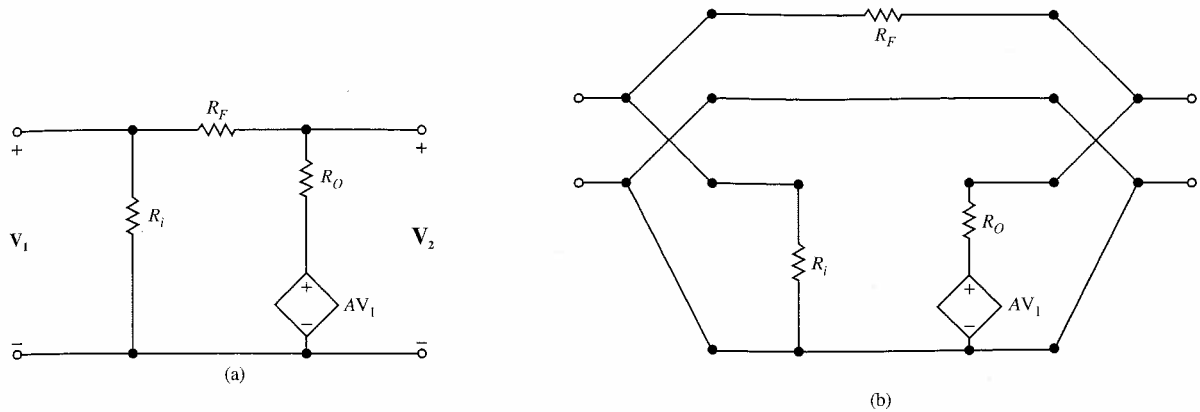
Assim, os parâmetros para a rede da Figura 15.16 são

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{3}{5} + j\frac{1}{2} S & y_{12} &= -(\frac{1}{5} + j\frac{1}{2}) S \\ y_{21} &= -(\frac{1}{5} + j\frac{1}{2}) S & y_{22} &= \frac{2}{5} + j\frac{1}{2} S \end{aligned}$$

Para apreciar a simplicidade de tal método, basta tentar encontrar diretamente os parâmetros Y da rede da Figura 15.16a. ■

### Exemplo 15.13

Considere o circuito amplificador equivalente mostrado na Figura 15.17a. Vamos determinar os parâmetros Y para essa rede por meio do esquema de interconexão paralela mostrado na Figura 15.17b.



**Figura 15.17** Circuito amplificador composto de duas redes paralelas.

Vamos nos referir à rede superior na Figura 15.17b como  $N_a$  e à inferior como  $N_b$ . Os parâmetros Y para  $N_a$  são

$$\begin{aligned} y_{11a} &= \frac{1}{R_F} & y_{12a} &= -\frac{1}{R_F} \\ y_{21a} &= -\frac{1}{R_F} & y_{22a} &= \frac{1}{R_F} \end{aligned}$$

e os parâmetros Y para  $N_b$  são

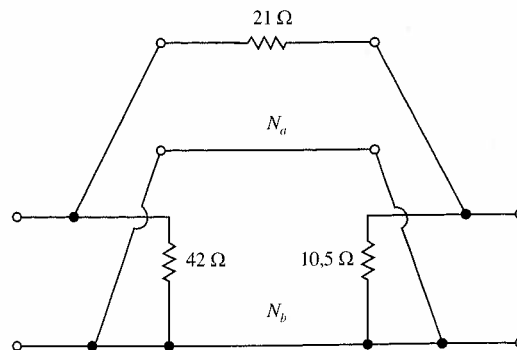
$$\begin{aligned} y_{11b} &= \frac{1}{R_i} & y_{12b} &= 0 \\ y_{21b} &= \frac{-A}{R_o} & y_{22b} &= \frac{1}{R_o} \end{aligned}$$

Dessa forma, os parâmetros Y para a rede da Figura 15.17a são

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{1}{R_F} + \frac{1}{R_i} & y_{12} &= -\frac{1}{R_F} \\ y_{21} &= -\left(\frac{1}{R_F} + \frac{A}{R_o}\right) & y_{22} &= \frac{1}{R_F} + \frac{1}{R_o} \end{aligned}$$

### Exercício

**E15.14** Determine os parâmetros Y da rede mostrada na Figura E15.2 considerando a rede como uma interconexão paralela de dois quadripolos, como mostrado na Figura E15.14.



**Figura E15.14**

**Resp.:**  $y_{11} = \frac{1}{14} \text{ S}, y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{21} \text{ S}, y_{22} = \frac{1}{7} \text{ S}.$

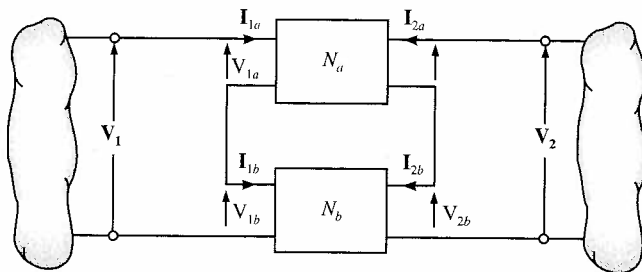


### Conexão em Série

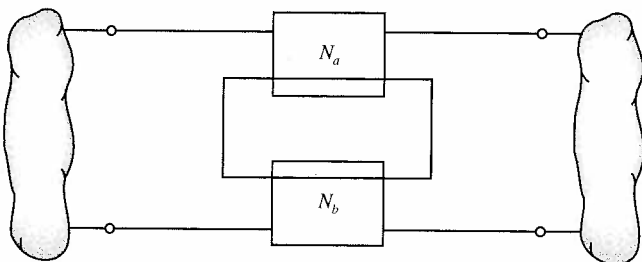
Considere o quadripolo  $N$ , que é composto da conexão em série de  $N_a$  e  $N_b$ , como mostrado na Figura 15.18a. As equações de definição para as duas redes  $N_a$  e  $N_b$  são

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{1a} &= \mathbf{z}_{11a} \mathbf{I}_{1a} + \mathbf{z}_{12a} \mathbf{I}_{2a} \\ \mathbf{V}_{2a} &= \mathbf{z}_{21a} \mathbf{I}_{1a} + \mathbf{z}_{22a} \mathbf{I}_{2a} \end{aligned} \quad (15.18)$$

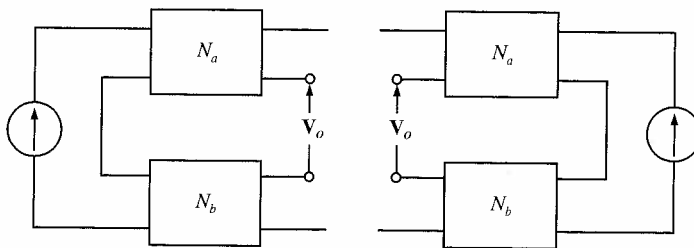
$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{1b} &= \mathbf{z}_{11b} \mathbf{I}_{1b} + \mathbf{z}_{12b} \mathbf{I}_{2b} \\ \mathbf{V}_{2b} &= \mathbf{z}_{21b} \mathbf{I}_{1b} + \mathbf{z}_{22b} \mathbf{I}_{2b} \end{aligned} \quad (15.19)$$



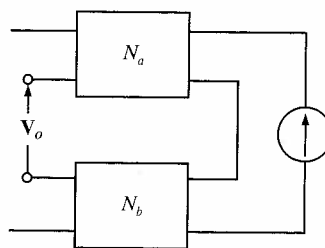
(a)



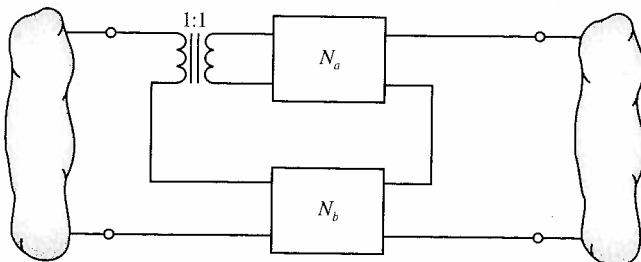
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 15.18 Interconexão em série de quadripolos.

Contanto que as características dos terminais das duas redes  $N_a$  e  $N_b$  não sejam alteradas pela conexão em série, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{I}_{1a} = \mathbf{I}_{1b} \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}_{2a} = \mathbf{I}_{2b} \end{aligned} \quad (15.20)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_{1a} + \mathbf{V}_{1b} = (\mathbf{z}_{11a} + \mathbf{z}_{11b})\mathbf{I}_1 + (\mathbf{z}_{12a} + \mathbf{z}_{12b})\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{V}_{2a} + \mathbf{V}_{2b} = (\mathbf{z}_{21a} + \mathbf{z}_{21b})\mathbf{I}_1 + (\mathbf{z}_{22a} + \mathbf{z}_{22b})\mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (15.21)$$

Portanto, os parâmetros  $\mathbf{Z}$  da rede completa são

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11a} + \mathbf{z}_{11b} & \mathbf{z}_{12a} + \mathbf{z}_{12b} \\ \mathbf{z}_{21a} + \mathbf{z}_{21b} & \mathbf{z}_{22a} + \mathbf{z}_{22b} \end{bmatrix} \quad (15.22)$$

Portanto, os parâmetros  $\mathbf{Z}$  da rede completa são iguais à soma dos parâmetros  $\mathbf{Z}$  das redes  $N_a$  e  $N_b$ . Esse procedimento é sempre válido desde que as redes  $N_a$  e  $N_b$  sejam da forma mostrada na Figura 15.18b. Os testes de Brune para a interconexão em série de quadripolos exige que  $\mathbf{V}_o$  seja zero quando as redes estão interconectadas como mostrado na Figura 15.18c e d. Se essas condições não forem satisfeitas, um transformador ideal com a relação de espiras igual a 1:1 pode ser empregado da maneira idêntica à descrita para o caso da interconexão paralela e ilustrada na Figura 15.18e. Por exemplo, um transformador seria necessário caso as duas redes na Figura 15.15 fossem ligadas em série, uma vez que  $\mathbf{z}_4$  e  $\mathbf{z}_5$  seriam curto-circuitadas.

#### Exemplo 15.14

Vamos determinar os parâmetros  $\mathbf{Z}$  da rede mostrada na Figura 15.16a. O circuito está redesenhado na Figura 15.19, ilustrando uma ligação em série. A rede superior será referida como  $N_a$  e a inferior como  $N_b$ .

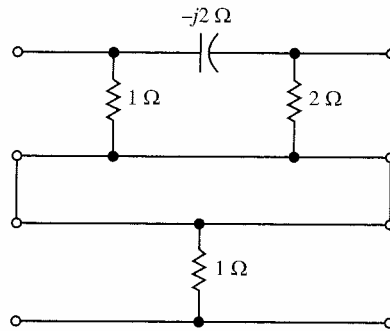


Figura 15.19 Rede da Figura 15.16a redesenhada como uma interconexão em série de duas redes.

Os parâmetros  $\mathbf{Z}$  para  $N_a$  são

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{11a} &= \frac{2-2j}{3-2j} \Omega & \mathbf{z}_{12a} &= \frac{2}{3-2j} \Omega \\ \mathbf{z}_{21a} &= \frac{2}{3-2j} \Omega & \mathbf{z}_{22a} &= \frac{2-4j}{3-2j} \Omega \end{aligned}$$

e os parâmetros  $\mathbf{Z}$  para  $N_b$  são

$$\mathbf{z}_{11b} = \mathbf{z}_{12b} = \mathbf{z}_{21b} = \mathbf{z}_{22b} = 1 \Omega$$

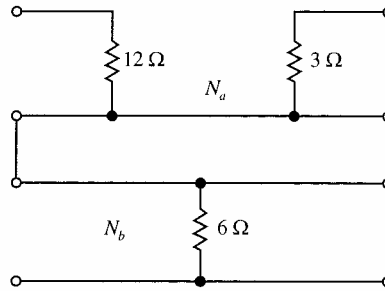
Assim, os parâmetros da rede completa são

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{11} &= \frac{5-4j}{3-2j} \Omega & \mathbf{z}_{12} &= \frac{5-2j}{3-2j} \Omega \\ \mathbf{z}_{21} &= \frac{5-2j}{3-2j} \Omega & \mathbf{z}_{22} &= \frac{5-6j}{3-2j} \Omega \end{aligned}$$

Poderíamos facilmente verificar esses resultados com os obtidos no Exemplo 15.12 aplicando as fórmulas de conversão da Tabela 15.1. ■

**Exercício**

**E15.15** Determine os parâmetros  $Z$  da rede mostrada na Figura E15.1 considerando o circuito como a conexão em série de dois quadripolos, como mostrado na Figura E15.15.

**Figura E15.15**

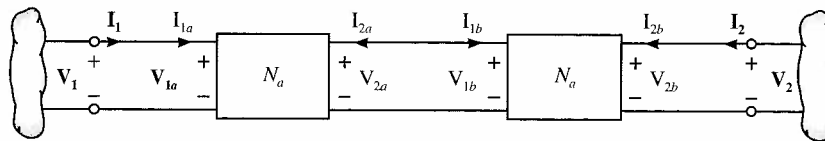
**Resp.:**  $z_{11} = 18 \Omega$ ,  $z_{12} = z_{21} = 6 \Omega$ ,  $z_{22} = 18 \Omega$ .

**Conexão em Cascata**

Um quadripolo  $N$  é composto da conexão em cascata de  $N_a$  e  $N_b$ , como mostrado na Figura 15.20, onde as equações de parâmetros para  $N_a$  e  $N_b$  são

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} \quad (15.23)$$

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} \quad (15.24)$$

**Figura 15.20** Conexão em cascata de redes.

A partir da Figura 15.20, entretanto, notamos que

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

e, portanto, as equações para a rede total são

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (15.25)$$

Dessa forma, os parâmetros de transmissão para a rede total são obtidos pela multiplicação de matrizes como indicado acima. A ordem da multiplicação de matriz é importante e é executada na mesma ordem em que as redes são interconectadas.

**Exemplo 15.15**

Vamos examinar o circuito que consideramos no Exemplo 15.9 e derivar seus parâmetros de quadripolo considerando-o uma conexão em cascata de duas redes, como mostrado na Figura 15.21.

Os parâmetros ABCD para redes  $T$  idênticas podem ser facilmente calculados como

$$\begin{aligned} A &= 1 + j\omega & B &= 2 + j\omega \\ C &= j\omega & D &= 1 + j\omega \end{aligned}$$

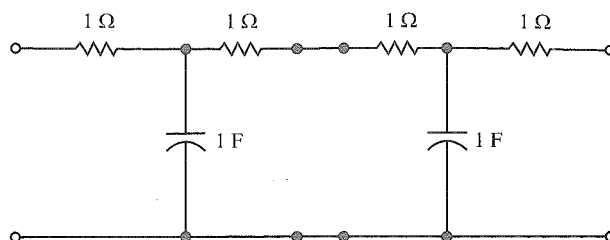


Figura 15.21 Quadripolo da Figura 15.11 redesenhado como uma conexão em cascata de duas redes.

Portanto, os parâmetros de transmissão para a rede completa são

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j\omega & 2+j\omega \\ j\omega & 1+j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+j\omega & 2+j\omega \\ j\omega & 1+j\omega \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se as matrizes, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4j\omega-2\omega^2 & 4+6j\omega-2\omega^2 \\ 2j\omega-2\omega^2 & 1+4j\omega-2\omega^2 \end{bmatrix}$$

### Exercício

E15.16 Determine os parâmetros de transmissão da rede da Figura E15.1 considerando o circuito uma conexão em cascata de três quadripolos, como mostrado na Figura E15.16.

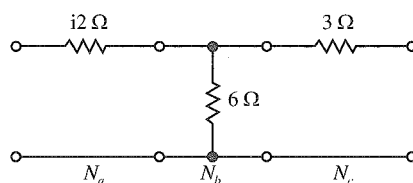


Figura E15.16

Resp.:  $A = 3$ ,  $B = 21 \Omega$ ,  $C = 1/6 \text{ S}$ ,  $D = 3/2$ .

## 15.8 Redes Equivalentes T- $\Pi$

As redes ligadas em T e em  $\Pi$ , mostradas na Figura 15.22, são dois exemplos de quadripolos importantes. Redes com essas topologias são encontradas frequentemente em análise de quadripolos. Portanto, é instrutivo determinar as condições sob as quais tais redes são equivalentes. Para estabelecer as condições de equivalência, vamos examinar as equações de parâmetros Z para a rede T e as equações de parâmetros Y para a rede  $\Pi$ .

Para a rede T, as equações são

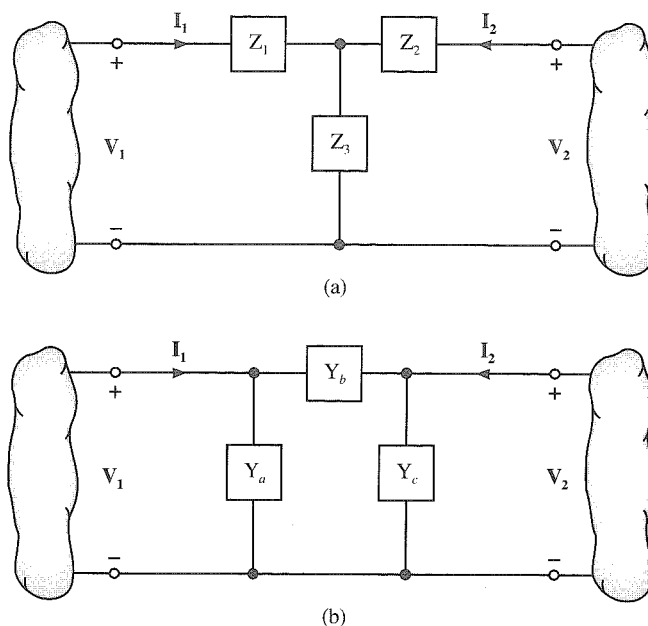
$$\begin{aligned} V_1 &= (Z_1 + Z_3)I_1 + Z_3 I_2 \\ V_2 &= Z_3 I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 \end{aligned}$$

e para a rede  $\Pi$ , as equações são

$$\begin{aligned} I_1 &= (Y_a + Y_b)V_1 - Y_b V_2 \\ I_2 &= -Y_b V_1 + (Y_b + Y_c)V_2 \end{aligned}$$

Resolvendo as equações para a rede T em termos de  $I_1$  e  $I_2$ , obtém-se

$$\begin{aligned} I_1 &= \left( \frac{Z_2 + Z_3}{D_1} \right) V_1 - \frac{Z_3 V_2}{D_1} \\ I_2 &= \frac{Z_3 V_1}{D_1} + \left( \frac{Z_1 + Z_3}{D_1} \right) V_2 \end{aligned}$$



**Figura 15.22** Redes quadripolos T e II.

onde  $D_1 = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3$ . Comparando essas equações com aquelas para a rede II, descobrimos que

$$\begin{aligned} Y_a &= \frac{Z_2}{D_1} \\ Y_b &= \frac{Z_3}{D_1} \\ Y_c &= \frac{Z_1}{D_1} \end{aligned} \quad (15.26)$$

ou, em termos das impedâncias da rede II,

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{D_1}{Z_2} \\ Z_b &= \frac{D_1}{Z_3} \\ Z_c &= \frac{D_1}{Z_1} \end{aligned} \quad (15.27)$$

Se invertermos esse procedimento e resolvermos as equações para a rede II em termos de  $V_1$  e  $V_2$  e então compararmos as equações resultantes com aquelas para a rede T, chegamos a

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Y_c}{D_2} \\ Z_2 &= \frac{Y_a}{D_2} \\ Z_3 &= \frac{Y_b}{D_2} \end{aligned} \quad (15.28)$$

onde  $D_2 = Y_a Y_b + Y_b Y_c + Y_a Y_c$ . A Equação 15.28 pode também ser escrita na forma

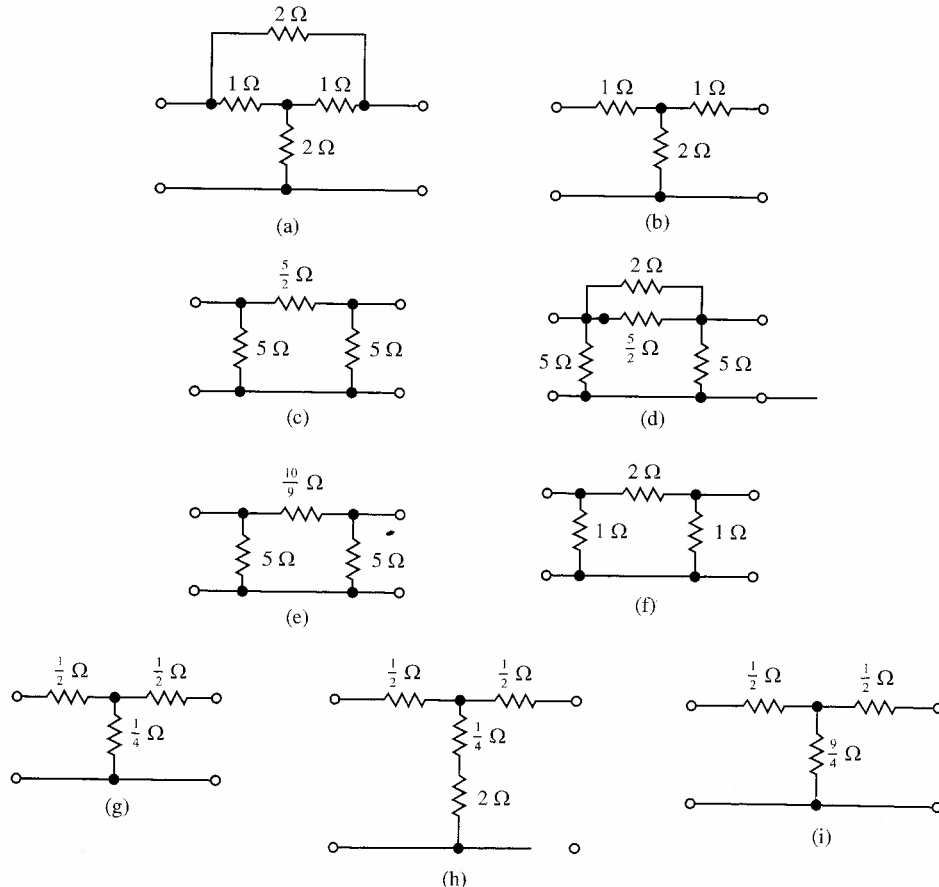
$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c} \\
 Z_2 &= \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c} \\
 Z_3 &= \frac{Z_a Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}
 \end{aligned} \tag{15.29}$$

As equações 15.27 e 15.29 parecem familiares? De fato, elas são simplesmente transformações estrela (Y)  $\leftrightarrow$  delta empregadas no Capítulo 2, uma vez que o T é uma rede conectada em estrela (Y) e  $\Pi$  é uma rede conectada em delta.

### Exemplo 15.16

Vamos determinar as redes equivalentes  $\Pi$  e T para o quadripolo mostrado na Figura 15.23a.

Utilizando as equações de transformação de T-para- $\Pi$ , a porção T do quadripolo mostrado na Figura 15.23b é convertida para a rede  $\Pi$  da Figura 15.23c. Combinando o resistor de  $2\ \Omega$  na rede original com a rede  $\Pi$  da Figura 15.23c, tem-se a rede da Figura 15.23d, que pode ser imediatamente convertida para a rede  $\Pi$  equivalente final da Figura 15.23e.



**Figura 15.23** Análise de quadripolos equivalentes T e  $\Pi$ .

De maneira semelhante, a porção  $\Pi$  do quadripolo original mostrado na Figura 15.23f é convertida na rede T da Figura 15.23g. Combinando o resistor restante de  $2\ \Omega$  na rede original com a rede T da Figura 15.23g, tem-se a rede da Figura 15.23h, que pode ser convertida imediatamente na rede T equivalente final da Figura 15.23i.

**Exercício**

**E15.17** Mostre que os quadripolos das Figuras E15.1 e E15.2 são equivalentes.

**15.9 Quadripolos Contidos em uma Rede**

Podemos encontrar situações em que um quadripolo é uma parte integrante de uma rede maior. Por exemplo, o quadripolo pode ser algum tipo de “caixa-preta”, onde tudo que se sabe sobre ele são seus parâmetros (quadripolo). Iremos tentar ilustrar agora que todas as técnicas que descrevemos anteriormente podem prontamente ser aplicadas também nessas situações.

Considere o seguinte exemplo de um quadripolo contido em uma rede maior.

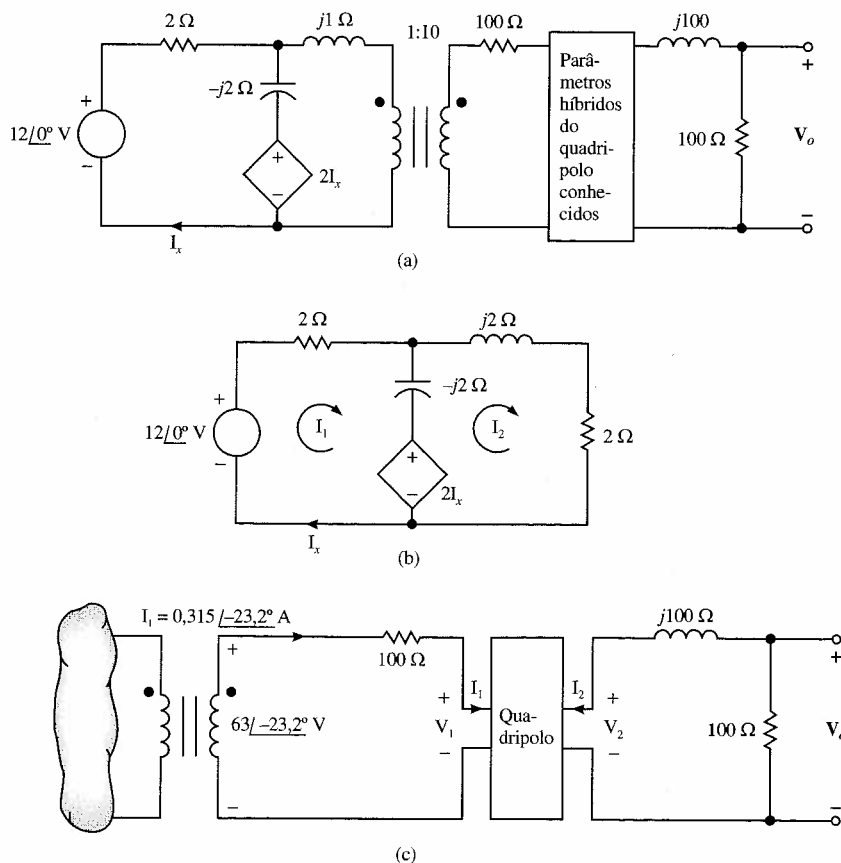
**Exemplo 15.17**

Considere a rede da Figura 15.24a. Os parâmetros híbridos do quadripolo são

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 1 & 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Desejamos determinar a tensão de saída  $V_o$  de toda a rede.

Nosso método para abordar o problema será o seguinte. Acharemos primeiramente a impedância de entrada do quadripolo, somaremos isto ao resistor de  $100\ \Omega$  e refletiremos essa impedância para o lado esquerdo do transformador. Resolveremos, então, o circuito de dois laços em que o transformador e tudo o que se encontra à sua direita são representados pela impedância refletida. A tensão e a corrente à esquerda do transformador serão então refletidas para o lado direito, onde serão usadas em conjunto com os parâmetros do quadripolo para determinar a corrente da carga e portanto  $V_o$ .



**Figura 15.24** Circuitos utilizados no Exemplo 15.17.

Usando os resultados do Exemplo 15.5, descobrimos que a impedância de entrada do quadripolo é

$$Z_{in} = h_{11} - \frac{h_{12} h_{21} Z_L}{1 + h_{22} Z_L}$$

onde os parâmetros híbridos são dados e  $Z_L = 100 + j100 \Omega$ .  $Z_{in}$  é, portanto,  $100 \Omega$ , e dessa forma, quando essa impedância é agregada ao  $100 \Omega$  da Figura 15.24a e refletida para o lado esquerdo do transformador, obtemos a rede da Figura 15.24b. As equações de malha para a rede são

$$\begin{aligned} I_1 &= I_x \\ (2 - j2)I_1 - (-j2)I_2 &= 12\angle 0^\circ - 2I_1 \\ -(-j2)I_1 + (2 - j1)I_2 &= 2I_1 \end{aligned}$$

Resolvendo-se essas equações, tem-se  $I_2 = 3,15 \angle -23,2^\circ$  A, e portanto a tensão do lado esquerdo do transformador é  $6,30 \angle -23,2^\circ$  V. Refletindo-se a tensão e a corrente para o lado direito do transformador, obtém-se os resultados mostrados na Figura 15.24c. Note que  $I_1 = 0,315 \angle -23,2^\circ$  A e que  $V_2 = -I_2(100 + j100)$ . A equação para o quadripolo que relaciona as correntes de saída e entrada é

$$\begin{aligned} I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \\ &= h_{21} I_1 - I_2 (100 + j100) 10^{-3} \\ &= \frac{1(I_1)}{1 + (100 + j100)} 10^{-3} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} V_o &= 100I_2 \\ &= -28,52 \angle -28,4^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

### Exercício

E15.18 Dada a rede da Figura E15.18, determine  $V_o$  caso os parâmetros híbridos para o quadripolo sejam

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

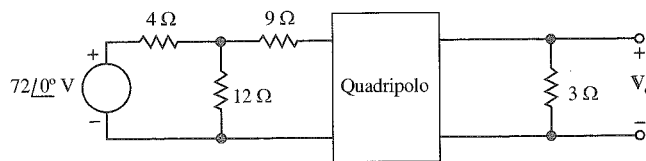


Figura E15.18

Resp.:  $V_o = 3 \angle 0^\circ$  V.

## 15.10 Resumo

Quadripolos foram descritos neste capítulo usando-se parâmetros de admitância, de impedância, híbridos e de transmissão. Circuitos equivalentes para os quadripolos foram descritos e fórmulas de conversão para a mudança de um conjunto de parâmetros para outro foram apresentadas.

Finalmente, mostramos que um quadripolo pode ser tratado como uma interconexão de redes mais simples. Foram discutidas as conexões em paralelo, em série e em cascata. Por último, mostramos que redes equivalentes em T e em  $\Pi$  são as mesmas que as redes estrela (Y) e delta descritas no Capítulo 2.



## Pontos-Chave

- Quatro dos parâmetros mais comuns usados para descrever um quadripolo são os parâmetros de admitância, de impedância, híbridos e de transmissão.
- Alguns dos parâmetros de quadripolo podem não existir para determinado circuito.
- Se todos os parâmetros para uma rede existem, um conjunto de fórmulas de conversão pode ser usado para relacionar um conjunto de parâmetros de quadripolo a outro.
- Os testes de Brune devem ser satisfeitos para interconectar dois quadripolos.
- Ao interconectar dois quadripolos, os parâmetros Y são somados para uma conexão paralela, os parâmetros Z são somados para uma conexão em série e os parâmetros de transmissão em forma matricial são multiplicados juntos para uma conexão em cascata.
- Transformações T-para- $\Pi$  são as mesmas que as transformações estrela (Y)  $\leftrightarrow$  delta.

## Problemas

15.1 Dadas as duas redes da Figura P15.1, determine os parâmetros Y para o circuito em (a) e os parâmetros Z para o circuito em (b).

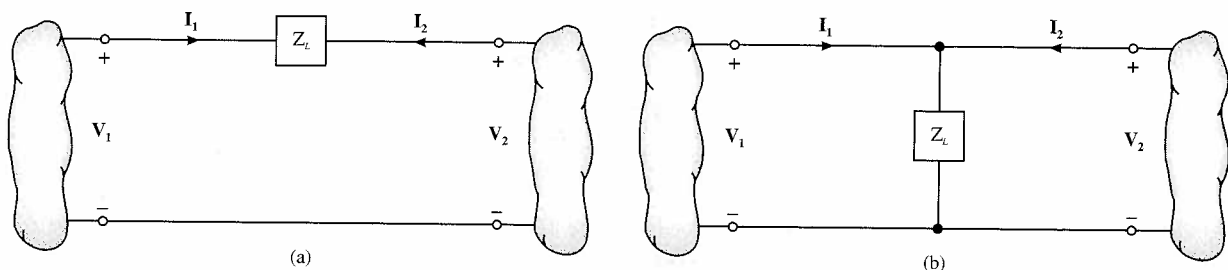


Figura P15.1

15.2 Determine os parâmetros Y para o quadripolo mostrado na Figura P15.2.

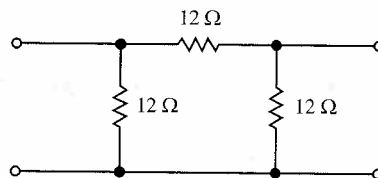


Figura P15.2

15.3 Determine os parâmetros Z para o quadripolo do Problema 15.2.

15.4 Caso uma fonte de 12 A seja conectada na porta de entrada da rede mostrada na Figura P15.2, determine a corrente no resistor de 4  $\Omega$ .

15.5 Determine os parâmetros Y para o quadripolo mostrado na Figura P15.5.

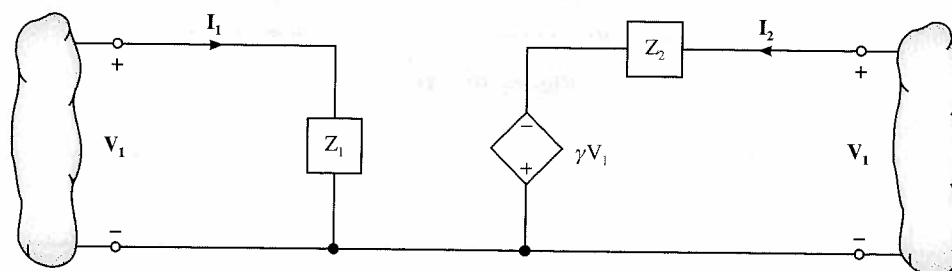


Figura P15.5

15.6 Determine os parâmetros Z para a rede da Figura P15.5.

15.7 Determine os parâmetros Z para a rede mostrada na Figura P15.7.

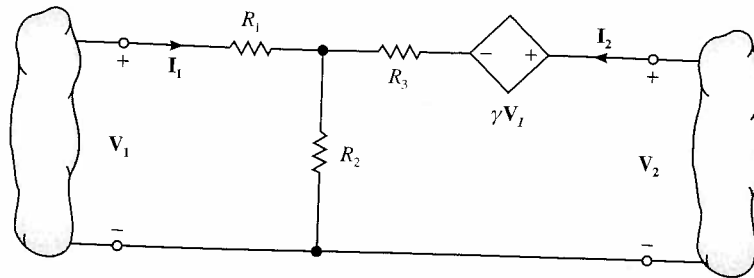


Figura P15.7

- 15.8 Determine os parâmetros Y para a rede da Figura P15.8.

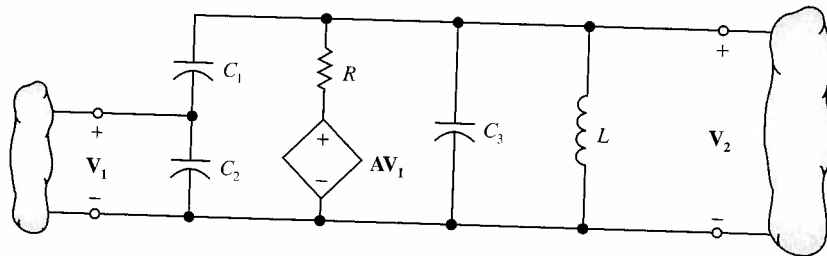


Figura P15.8

- 15.9 Dada a rede da Figura P15.9, (a) determine os parâmetros Z para o transformador, (b) escreva a equação para cada porta do quadripolo e (c) utilize a informação obtida para determinar  $V_2$ .

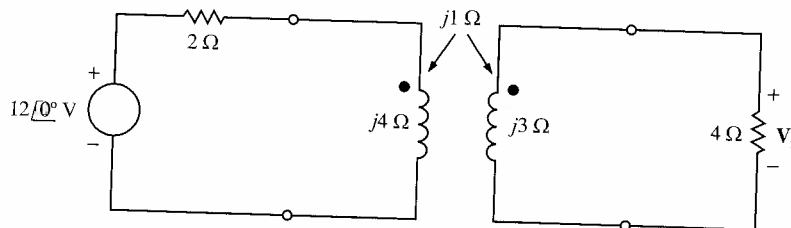


Figura P15.9

- 15.10 Calcule os parâmetros Z da rede mostrada na Figura P15.10.

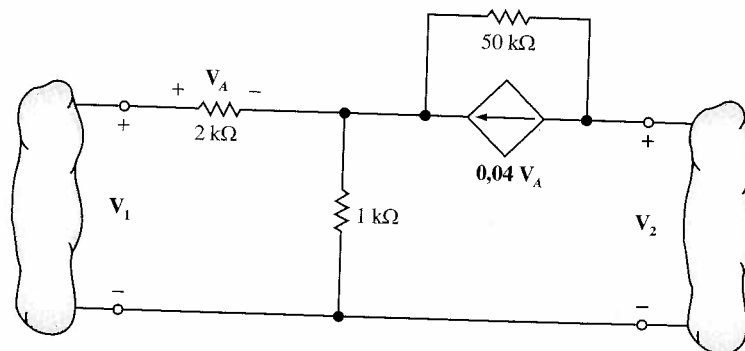


Figura P15.10

- 15.11 Calcule a impedância de entrada da rede na Figura P15.10, caso uma carga de  $4\text{ k}\Omega$  seja conectada à porta de saída.  
 15.12 Calcule a impedância de saída do quadripolo da Figura P15.10.  
 15.13 Determine o ganho de tensão do quadripolo da Figura P15.10 quando uma carga resistora de  $4\text{ k}\Omega$  é conectada à porta de saída.  
 15.14 Determine os parâmetros Z para o quadripolo mostrado na Figura P15.14.

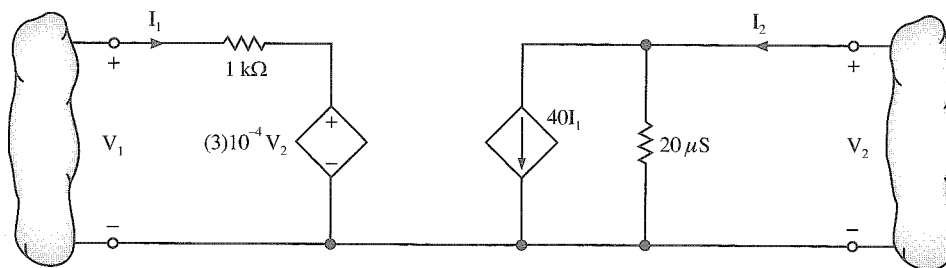


Figura P15.14

- 15.15 Ache o ganho de tensão do quadripolo da Figura P15.14, caso uma carga de  $12\text{ k}\Omega$  seja conectada à porta de saída.  
 15.16 Determine a impedância de entrada da rede na Figura P15.14.  
 15.17 Determine os parâmetros Z do quadripolo da Figura P15.17.

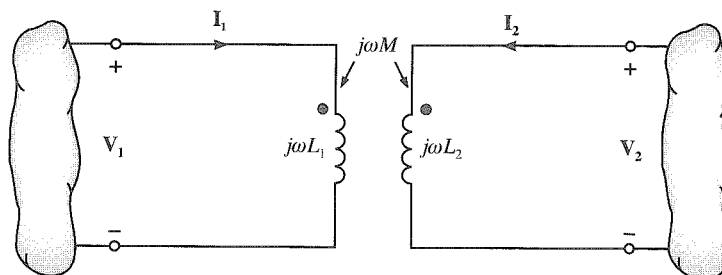


Figura P15.17

- 15.18 Determine os parâmetros Z para o quadripolo da Figura P15.18.

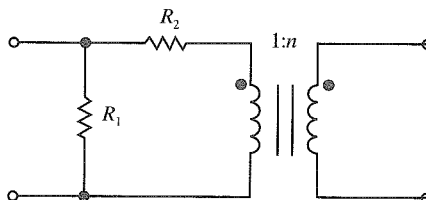


Figura P15.18

- 15.19 Determine os parâmetros ABCD para as redes da Figura P15.1.  
 15.20 Determine os parâmetros ABCD para o circuito da Figura P15.5.  
 15.21 Determine os parâmetros de transmissão para a rede da Figura P15.21.

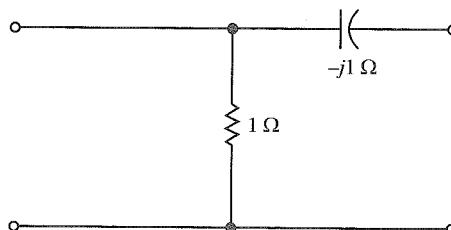


Figura P15.21

- 15.22 Determine os parâmetros de transmissão para o circuito da Figura P15.22.

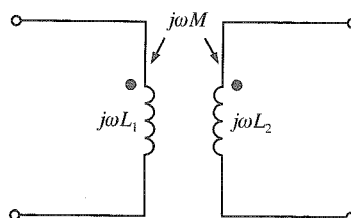


Figura P15.22

- 15.23 Determine os parâmetros de transmissão para o quadripolo da Figura P15.23.

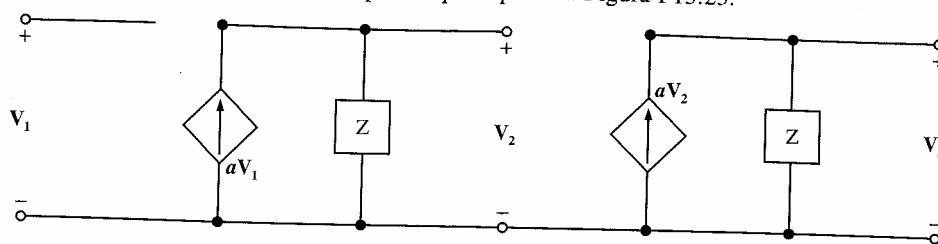


Figura P15.23

- 15.24 Determine os parâmetros de transmissão para a rede da Figura P15.24 e use essa informação para achar  $Z_i$ .

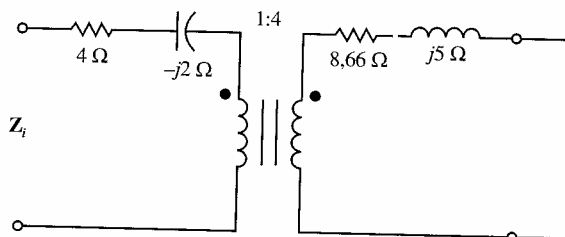


Figura P15.24

- 15.25 Dada a rede da Figura P15.25, determine os parâmetros de transmissão para o quadripolo e então ache  $I_o$  usando as condições nos terminais.

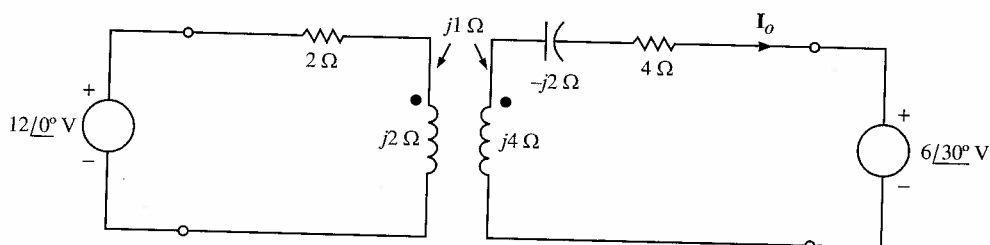


Figura P15.25

- 15.26 Determine os parâmetros híbridos para a rede do Problema 15.2.

- 15.27 Determine a impedância de entrada da rede na Figura P15.27, em termos dos parâmetros híbridos do quadripolo e da carga quadripolo  $Z_L$ .

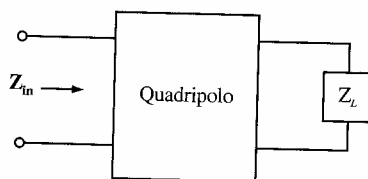


Figura P15.27

- 15.28 Estes são os parâmetros híbridos para uma rede.

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Determine os parâmetros Y para a rede.

- 15.29 Determine o ganho de tensão  $V_2/V_1$  para a rede da Figura P15.29 usando os parâmetros Z.

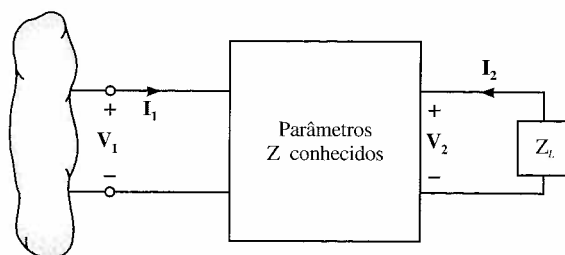


Figura P15.29

15.30 Determine os parâmetros Z em termos dos parâmetros ABCD.

15.31 Os parâmetros G são definidos como:

$$\mathbf{I}_1 = g_{11} \mathbf{V}_1 + g_{12} \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = g_{21} \mathbf{V}_1 + g_{22} \mathbf{I}_2$$

Determine os parâmetros Z em termos dos parâmetros G.

15.32 Os parâmetros  $\mathbf{h}$  para uma rede são

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Determine os parâmetros ABCD.

15.33 Os parâmetros Y para uma rede são

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

Determine os parâmetros Z.

15.34 Determine os parâmetros ABCD para a rede da Figura P15.23.

15.35 Determine os parâmetros ABCD para o circuito da Figura P15.35.

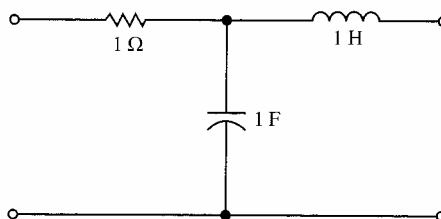


Figura P15.35

15.36 Determine os parâmetros de transmissão para o quadripolo da Figura P15.36.

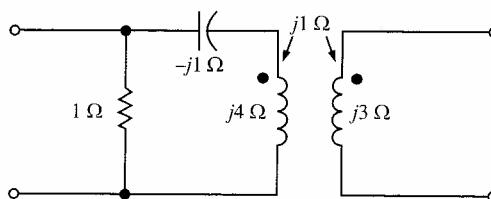


Figura P15.36

15.37 Determine os parâmetros de transmissão para o quadripolo da Figura P15.37.

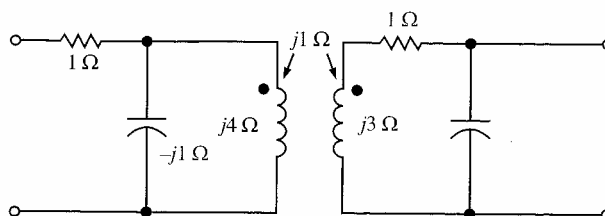


Figura P15.37

- 15.38 Determine os parâmetros de transmissão para o quadripolo da Figura P15.38 e então use as condições dos terminais para calcular  $I_o$ .

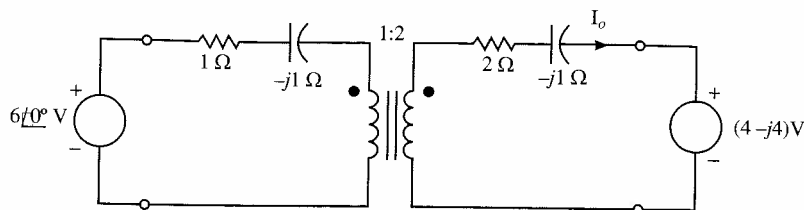


Figura P15.38

- 15.39 Determine os parâmetros Y para o quadripolo da Figura P15.39. Determine a admitância de entrada da rede quando o capacitor está conectado à porta de saída.

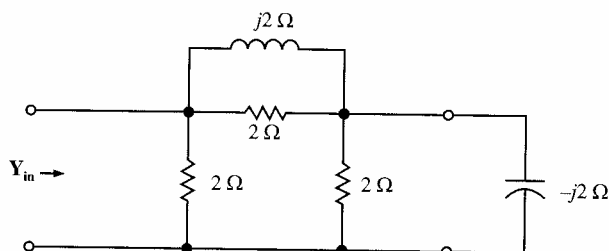


Figura P15.39

- 15.40 Determine os parâmetros Y para o quadripolo da Figura P15.40.

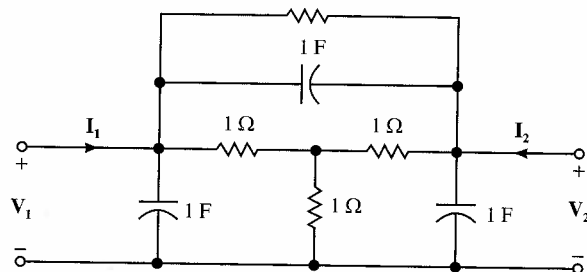


Figura P15.40

- 15.41 Determine os parâmetros Y para o quadripolo da Figura P15.41.

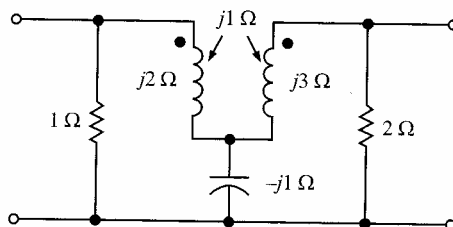


Figura P15.41

- 15.42 Determine os parâmetros Y para a rede da Figura P15.42.

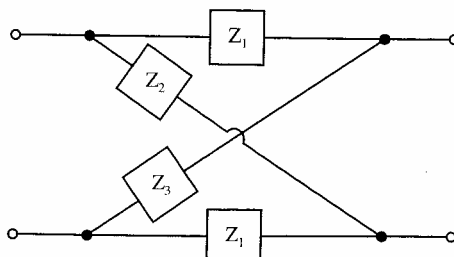
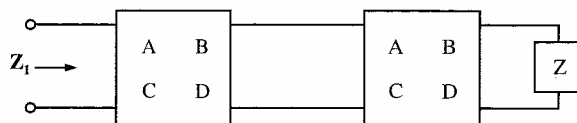


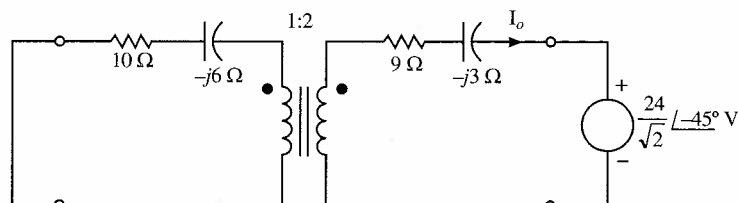
Figura P15.42

- 15.43** Determine a impedância de entrada na rede mostrada na Figura P15.43 assumindo que os parâmetros de transmissão para os dois quadripolos sejam conhecidos.



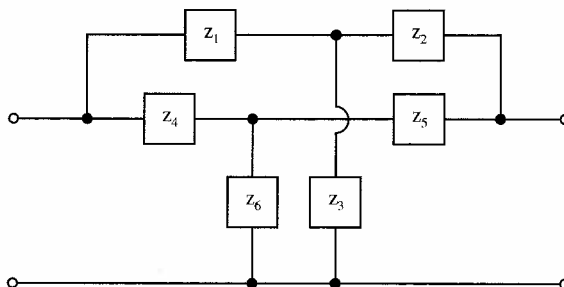
**Figura P15.43**

- 15.44** Determine os parâmetros de transmissão do quadripolo da Figura P15.44 e então utilize as condições nos terminais para achar  $I_o$ .



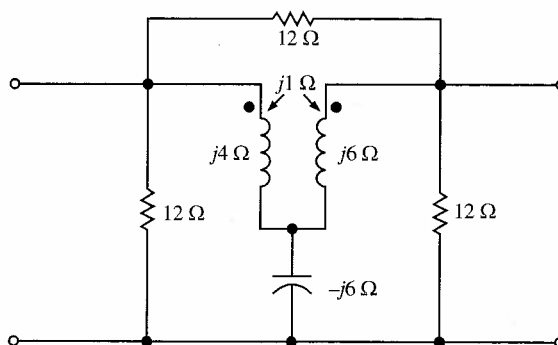
**Figura P15.44**

- 15.45** Determine os parâmetros Y para a rede mostrada na Figura P15.45.



**Figura P15.45**

- 15.46** Determine os parâmetros Y para o quadripolo da Figura P15.46.



**Figura P15.46**

- 15.47** Determine os parâmetros Z para o quadripolo da Figura P15.47 e então determine  $I_o$  para as condições nos terminais especificadas.

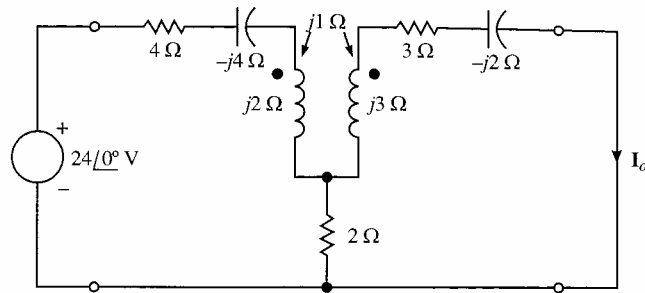


Figura P15.47

15.48 Determine a tensão de saída  $V_o$  na rede da Figura P15.48, caso os parâmetros  $Z$  para o quadripolo sejam

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

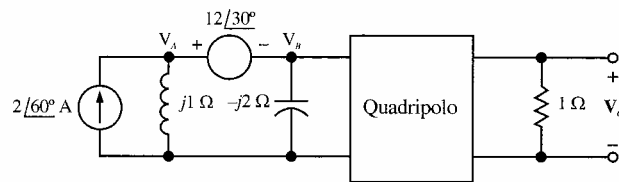


Figura P15.48

15.49 Determine a tensão de saída  $V_o$  na rede da Figura P15.49, caso os parâmetros  $Z$  do quadripolo sejam

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

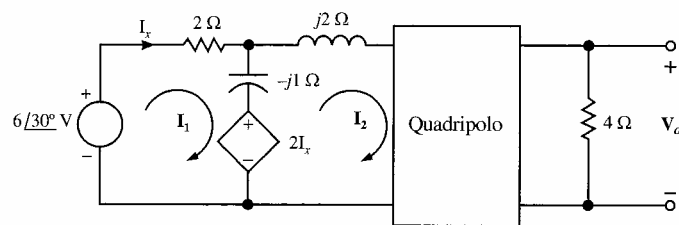


Figura P15.49



# Transformada de Laplace

Vamos introduzir agora a transformada de Laplace. Esta é uma técnica de suma importância porque, dado um conjunto de condições iniciais, iremos produzir a resposta total do circuito que consiste tanto da resposta natural quanto da resposta forçada.

Neste capítulo, usaremos a transformada de Laplace para a resolução de problemas de circuito de forma análoga ao uso de fasores na análise senoidal. Usando a transformada de Laplace, transportaremos a análise de circuitos do domínio do tempo para o domínio da frequência, onde resolveremos o problema utilizando álgebra. Finalmente, converteremos a solução no domínio complexo da frequência de volta ao domínio do tempo. Portanto, como veremos, a transformada de Laplace é uma transformada integral que converte um conjunto de equações simultâneas íntegro-diferenciais em um conjunto de equações algébricas simultâneas.

Nosso método será definir a transformada de Laplace, derivar alguns dos pares de transformadas, considerar algumas propriedades importantes da transformada, ilustrar a operação de transformada inversa, introduzir a integral de convolução e, por último, aplicar a transformada na solução de equações lineares íntegro-diferenciais com coeficientes constantes.

## 16.1 Definição

A transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é definida pela equação

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (16.1)$$

onde  $s$  é a frequência complexa

$$s = \sigma + j\omega \quad (16.2)$$

e assume-se que a função  $f(t)$  possui a seguinte propriedade

$$f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

Note que a transformada de Laplace é unilateral ( $0 \leq t < \infty$ ), contrastando com a transformada de Fourier (veja Capítulo 18), que é bilateral ( $-\infty < t < \infty$ ). Na análise de circuitos usando a transformada de Laplace, vamos nos concentrar no intervalo de tempo  $t \geq 0$ . É importante notar que as condições iniciais dizem

respeito ao funcionamento do circuito antes do instante  $t = 0$ , e portanto nossa análise descreverá a operação do circuito para  $t \geq 0$ .

Para que a função  $f(t)$  tenha uma transformada de Laplace, deve satisfazer a condição

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |f(t)| dt < \infty \quad (16.3)$$

para algum valor real de  $\sigma$ . Por causa do fator de convergência  $e^{-\sigma t}$ , existe um número importante de funções que têm a transformada de Laplace, ainda que as transformadas de Fourier para essas funções não existam. Todas as entradas que aplicaremos a circuitos possuem transformadas de Laplace. Funções que não têm transformadas de Laplace (por exemplo,  $e^{t^2}$ ) não são de interesse na análise de circuitos.

A transformada inversa de Laplace, que é análoga à transformada inversa de Fourier, é definida pela relação

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (16.4)$$

onde  $\sigma_1$  é real e  $\sigma_1 > \sigma$  na Equação 16.3. Essa integral é baseada na teoria de variável complexa, e portanto vamos evitar o seu uso por meio do desenvolvimento e utilização de um conjunto de pares de transformada de Laplace.

## 16.2 Alguns Pares de Transformadas Importantes

Vamos agora desenvolver alguns pares básicos de transformadas de Laplace que são muito úteis na análise de circuitos.

Existem duas funções que são muito importantes na análise de circuitos: (1) a função degrau unitário,  $u(t)$ , discutida no Capítulo 7, e (2) o impulso unitário ou função delta,  $\delta(t)$ . Elas são chamadas de *funções singulares* porque não são finitas ou não possuem derivadas finitas em todos os pontos. Elas são modelos matemáticos de sinais que empregamos na análise de circuitos.

A função impulso unitário pode ser representada no limite pelo pulso retangular mostrado na Figura 16.1a à medida que  $a \rightarrow 0$ . A função é definida como:

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= 0 & t \neq t_0 \\ \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \delta(t - t_0) dt &= 1 & \epsilon > 0 \end{aligned}$$

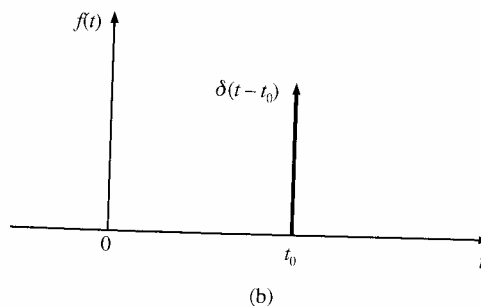
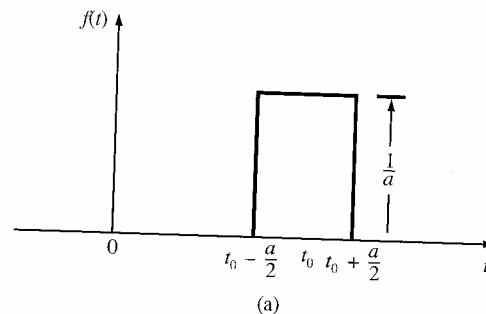


Figura 16.1 Representações do impulso unitário.

O impulso unitário é zero, exceto por  $t = t_0$ , onde ele é indefinido, porém possui área unitária (algumas vezes chamada de *força*). Uma função impulso unitário é representada na Figura 16.1b.

Uma propriedade importante da função impulso unitário é o que é freqüentemente chamado de *propriedade de amostragem*, que é exibida pela seguinte integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & t_0 < t_1, t_0 > t_2 \end{cases}$$

para um  $t_0$  finito e qualquer  $f(t)$  contínua em  $t_0$ . Note que a função impulso unitário simplesmente amostra o valor de  $f(t)$  em  $t = t_0$ .

### Exemplo 16.1

A transformada de Laplace da função impulso é

$$F(s) = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt$$

Usando-se a propriedade de amostragem da função delta, obtemos

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-t_0 s}$$

No limite, quando  $t_0 \rightarrow 0$ ,  $e^{-t_0 s} \rightarrow 1$ , e portanto

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = F(s) = 1$$

### Exemplo 16.2

A transformada de Laplace da função

$$f(t) = te^{-at} \delta(t - 1)$$

é

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} te^{-at} \delta(t - 1) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \delta(t - 1) te^{-(s+a)t} dt \end{aligned}$$

Empregando mais uma vez a propriedade de amostragem do impulso, obtemos

$$F(s) = 1e^{-(s+a)} = \frac{e^{-s}}{e^a}$$

### Exemplo 16.3

A transformada de Laplace da função degrau unitário definida no Capítulo 7 é

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s} \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathcal{L}[u(t)] = F(s) = \frac{1}{s}$$

### Exemplo 16.4

A transformada de Laplace da função degrau unitário deslocada no tempo mostrada na Figura 16.2 é

$$F(s) = \int_0^{\infty} u(t-a)e^{-st} dt$$

Note que

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & a < t < \infty \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-as}}{s} \end{aligned}$$

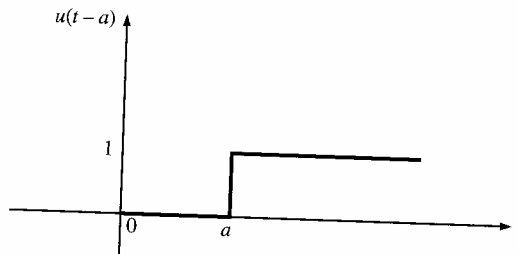


Figura 16.2 Função degrau unitário deslocada no tempo.

### Exemplo 16.5

A transformada de Laplace da função cosseno é

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-(s-j\omega)t} + e^{-(s+j\omega)t}}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) \quad \sigma > 0 \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Uma tabela resumida de pares de transformadas de Laplace é mostrada na Tabela 16.1.

### Exercícios

**E16.1** Se  $f(t) = e^{-at} \cos \omega t \delta(t-2)$ , determine  $F(s)$ .

**Resp.:**  $F(s) = e^{-2(s+a)} \cos 2\omega$ .

**E16.2** Determine  $F(s)$  se  $f(t) = tu(t-1)$ .

**Resp.:**  $F(s) = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2}$ .

**E16.3** Mostre que se  $f(t) = \sin \omega t$ , então  $F(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$ .

**Tabela 16.1** Tabela resumida de pares de transformadas de Laplace.

| $f(t)$                   | $F(s)$                      |
|--------------------------|-----------------------------|
| $\delta(t)$              | 1                           |
| $u(t)$                   | $\frac{1}{s}$               |
| $e^{-at}$                | $\frac{1}{s+a}$             |
| $t$                      | $\frac{1}{s^2}$             |
| $\frac{t^n}{n!}$         | $\frac{1}{s^{n+1}}$         |
| $te^{-at}$               | $\frac{1}{(s+a)^2}$         |
| $\frac{t^n e^{-at}}{n!}$ | $\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$     |
| $\text{sen } bt$         | $\frac{b}{s^2 + b^2}$       |
| $\cos bt$                | $\frac{s}{s^2 + b^2}$       |
| $e^{-at} \text{sen } bt$ | $\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$   |
| $e^{-at} \cos bt$        | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$ |

### 16.3 Algumas Propriedades Úteis da Transformada

Apresentamos agora um número de propriedades importantes da transformada de Laplace e ilustramos sua utilidade através de exemplos.

#### Teorema 1

$$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s) \quad (16.5)$$

A transformada é definida como

$$\mathcal{L}[Af(t)] = \int_0^{\infty} Af(t)e^{-st} dt$$

Uma vez que  $A$  não é uma função do tempo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Af(t)] &= A \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= AF(s) \end{aligned}$$

**Exemplo 16.6**

A transformada de Laplace da função

$$f(t) = e^{-at} \sin y \cos \omega t$$

pode ser obtida usando-se os resultados do Exemplo 16.5 como

$$\mathbf{F}(s) = e^{-as} \sin y \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

**Teorema 2**

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = \mathbf{F}_1(s) \pm \mathbf{F}_2(s) \quad (16.6)$$

por definição

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] &= \int_0^\infty [f_1(t) \pm f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt \pm \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt \\ &= \mathbf{F}_1(s) \pm \mathbf{F}_2(s) \end{aligned}$$

**Exemplo 16.7**

A transformada de Laplace da função

$$f(t) = e^{-t} + e^{-2t}$$

é

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \int_0^\infty (e^{-t} + e^{-2t}) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s+1)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s+2)t} dt \\ &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{L}[e^{-t}] = 1/(s+1)$  e  $\mathcal{L}[e^{-2t}] = 1/(s+2)$ .

**Teorema 3**

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \mathbf{F}\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \quad (16.7)$$

A transformada de Laplace de  $f(at)$  é

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(at) e^{-st} dt$$

Agora seja  $\lambda = at$  e  $d\lambda = a dt$ . Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^\infty f(\lambda) e^{-(\lambda/a)s} \frac{d\lambda}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty f(\lambda) e^{-(s/a)\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{a} \mathbf{F}\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \end{aligned}$$

**Exemplo 16.8**

Desejamos determinar a transformada de Laplace de  $f(t) = \cos \omega(t/2)$ .

Achamos que  $\mathcal{L}[\cos \omega t] = s/(s^2 + \omega^2)$ . Portanto, usando-se o Teorema 3, tem-se

$$\begin{aligned}\cos \omega \left( \frac{t}{2} \right) &= \frac{4s}{(2s)^2 + \omega^2} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2/4}\end{aligned}$$

o que é claro, uma vez que  $\mathcal{L}[\cos at] = s/(s^2 + a^2)$ , e nesse caso  $a = \omega/2$ . ■

#### Teorema 4

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-t_0 s} \mathbf{F}(s) \quad t_0 \geq 0 \quad (16.8)$$

Esse teorema, normalmente conhecido como o teorema de deslocamento, é ilustrado a seguir:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_0^\infty f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f(t-t_0)e^{-st} dt\end{aligned}$$

Se fizermos  $\lambda = t - t_0$  e  $d\lambda = dt$ , então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_0^\infty f(\lambda)e^{-s(\lambda+t_0)} d\lambda \\ &= e^{-t_0 s} \int_0^\infty f(\lambda)e^{-s\lambda} d\lambda \\ &= e^{-t_0 s} \mathbf{F}(s) \quad t_0 \geq 0\end{aligned}$$

#### Exemplo 16.9

Se  $f(t) = (t-1)u(t-1)$ , então empregando-se o Teorema 4, achamos que

$$\mathcal{L}[(t-1)u(t-1)] = e^{-s} \mathcal{L}[t] = \frac{e^{-s}}{s^2}$$

#### Teorema 5

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-t_0)] = e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t+t_0)] \quad (16.9)$$

Por definição,

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-t_0)] = \int_0^\infty f(t)u(t-t_0)e^{-st} dt$$

Agora seja  $\lambda = t - t_0$  e  $d\lambda = dt$ , e portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)u(t-t_0)e^{-st} dt &= \int_{-t_0}^\infty f(\lambda+t_0)u(\lambda)e^{-s(\lambda+t_0)} d\lambda \\ &= \int_0^\infty f(\lambda+t_0)e^{-s(\lambda+t_0)} d\lambda \\ &= e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t+t_0)]\end{aligned}$$

#### Exemplo 16.10

Se  $f(t) = tu(t-1)$ , então  $\mathcal{L}[f(t)]$  pode ser obtido a partir do Teorema 5 tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tu(t-1)] &= e^{-s} \mathcal{L}[t+1] \\ &= e^{-s} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right)\end{aligned}$$

#### Teorema 6

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \mathbf{F}(s+a) \quad (16.10)$$

Por definição

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[e^{-at} f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+a)t} dt \\
 &= F(s+a)
 \end{aligned}$$

**Exemplo 16.11**

Uma vez que a transformada de Laplace de  $\cos \omega t$  é

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

então

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

**Teorema 7**

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0) \quad (16.11)$$

Vamos começar examinando  $\mathcal{L}[df(t)/dt]$ . Por definição,

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Usando-se integração por partes, temos que

$$\begin{aligned}
 u &= e^{-st} & dv &= \frac{df(t)}{dt} dt = df(t) \\
 du &= -se^{-st} dt & v &= f(t)
 \end{aligned}$$

Assim

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Se assumirmos que a transformada de Laplace da função  $f(t)$  existe tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$$

então

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = -f(0) + sF(s)$$

Usando tal resultado, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] &= s \mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) \\
 &= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \\
 &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)
 \end{aligned}$$

Prosseguindo desse modo, é possível demonstrar esse teorema.

Vamos ilustrar a utilidade desse teorema mais tarde neste capítulo, quando o empregarmos na resolução de equações diferenciais.

**Teorema 8**

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} \quad (16.12)$$



Por definição,

$$\mathbf{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}(s)}{ds} &= \int_0^{\infty} f(t)(-te^{-st}) dt \\ &= -\int_0^{\infty} tf(t) e^{-st} dt \\ &= -\mathcal{L}[tf(t)] \end{aligned}$$

### Exemplo 16.12

Vamos demonstrar o uso do Teorema 8. Para começar, sabemos que

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

Então

$$\mathcal{L}[tu(t)] = \frac{-d}{ds} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s^2}$$

Continuando, notamos que

$$\mathcal{L}[t^2 u(t)] = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2} \right) = \frac{2}{s^3}$$

e

$$\mathcal{L}[t^3 u(t)] = \frac{-d}{ds} \left( \frac{2}{s^3} \right) = \frac{3!}{s^4}$$

e, em geral,

$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

### Teorema 9

$$\mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] = \int_s^{\infty} \mathbf{F}(\lambda) d\lambda \quad (16.13)$$

Por definição,

$$\int_s^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt = \mathbf{F}(\lambda)$$

Portanto

$$\int_s^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt d\lambda = \int_s^{\infty} \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$$

Uma vez que  $f(t)$  pode ter a transformada de Laplace, podemos mudar a ordem de integração tal que

$$\int_0^{\infty} f(t) \int_s^{\infty} e^{-\lambda t} d\lambda dt = \int_s^{\infty} \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$$

e assim

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \int_s^{\infty} \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$$

e portanto

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$$

### Exemplo 16.13

Se  $f(t) = te^{-at}$ , então

$$\mathbf{F}(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + a)^2}$$

Portanto

$$\int_s^\infty \mathbf{F}(\lambda) d\lambda = \int_s^\infty \frac{1}{(\lambda + a)^2} d\lambda = \left. \frac{-1}{\lambda + a} \right|_s^\infty = \frac{1}{s + a}$$

Assim

$$f_1(t) = \frac{f(t)}{t} = \frac{te^{-at}}{t} = e^{-at} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_1(s) = \frac{1}{s + a}$$

### Teorema 10

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\lambda) d\lambda\right] = \frac{1}{s} \mathbf{F}(s) \quad (16.14)$$

Começamos com a expressão

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\lambda) d\lambda\right] = \int_0^\infty \int_0^t f(\lambda) d\lambda e^{-st} dt$$

A integração por partes produz

$$\begin{aligned} u &= \int_0^t f(\lambda) d\lambda & dv &= e^{-st} dt \\ du &= f(t) dt & v &= \frac{-1}{s} e^{-st} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\lambda) d\lambda\right] &= \left. \frac{-e^{-st}}{s} \int_0^t f(\lambda) d\lambda \right|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \mathbf{F}(s) \end{aligned}$$

Empregaremos esse teorema mais adiante, quando examinaremos equações íntegro-diferenciais. Os teoremas que apresentaremos estão listados na Tabela 16.2.

**Tabela 16.2** Algumas propriedades úteis da transformada de Laplace.

| $f(t)$                                   | $\mathbf{F}(s)$                                               |
|------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $Af(t)$                                  | $A\mathbf{F}(s)$                                              |
| $f_1(t) \pm f_2(t)$                      | $\mathbf{F}_1(s) \pm \mathbf{F}_2(s)$                         |
| $f(at)$                                  | $\frac{1}{a} \mathbf{F}\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$ |
| $f(t - t_0)u(t - t_0), \quad t_0 \geq 0$ | $e^{-t_0 s} \mathbf{F}(s)$                                    |
| $f(t)u(t - t_0)$                         | $e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t + t_0)]$                          |

|                                                 |                                                                           |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $e^{-at} f(t)$                                  | $\mathbf{F}(s+a)$                                                         |
| $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$                         | $s^n \mathbf{F}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \dots s^0 f^{(n-1)}(0)$ |
| $tf(t)$                                         | $-\frac{d\mathbf{F}(s)}{ds}$                                              |
| $\frac{f(t)}{t}$                                | $\int_s^\infty \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$                              |
| $\int_0^t f(\lambda) d\lambda$                  | $\frac{1}{s} \mathbf{F}(s)$                                               |
| $\int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda$ | $\mathbf{F}_1(s) \mathbf{F}_2(s)$                                         |

### Exercícios

**E16.4** Determine  $\mathbf{F}(s)$ , caso  $f(t) = \frac{1}{2}(t - 4e^{-2t})$ .

**Resp.:**  $\mathbf{F}(s) = \frac{1}{2s^2} - \frac{2}{s+2}$ .

**E16.5** Se  $f(t) = te^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-1)}u(t-1)$ , determine  $\mathbf{F}(s)$ .

**Resp.:**  $\mathbf{F}(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}$ .

**E16.6** Determine  $\mathbf{F}(s)$  caso  $f(t) = e^{-4t}(t - e^{-t})$ .

**Resp.:**  $\mathbf{F}(s) = \frac{1}{(s+4)^2} - \frac{1}{s+5}$ .

**E16.7** Determine a transformada de Laplace da função  $te^{-4x}/(a^2 + 4)$ .

**Resp.:**  $\mathbf{F}(s) = \frac{e^{-4x}}{s^2(a^2 + 4)}$ .

**E16.8** Se  $f(t) = \cos \omega t u(t-1)$ , determine  $\mathbf{F}(s)$ .

**Resp.:**  $\mathbf{F}(s) = e^{-s} \left( \frac{s \cos \omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega \sin \omega}{s^2 + \omega^2} \right)$ .

**E16.9** Use o Teorema 8 para demonstrar que  $\mathcal{L}[te^{-at}] = 1/(s+a)^2$ .

## 16.4 A Função Porta

A *função porta* é definida como a diferença de duas funções degrau unitário da forma

$$f(t) = u(t-\tau) - u(t-\tau-T_0) \quad (16.15)$$

A função é mostrada na Figura 16.3. Note que a função é um pulso retangular de altura unitária e largura  $T_0$  que começa em  $t = \tau$ . A importância dessa função reside no fato de que qualquer função  $f(t)$  quando multiplicada pela função porta é igual a  $f(t)$  dentro do intervalo da porta  $\tau < t < \tau + T_0$  e é zero fora desse intervalo. Portanto, podemos usar a função porta para selecionar uma forma de onda complexa. O exemplo a seguir ilustra tal método.

### Exemplo 16.14

Desejamos determinar a transformada de Laplace para a função dente-de-serra da Figura 16.4.

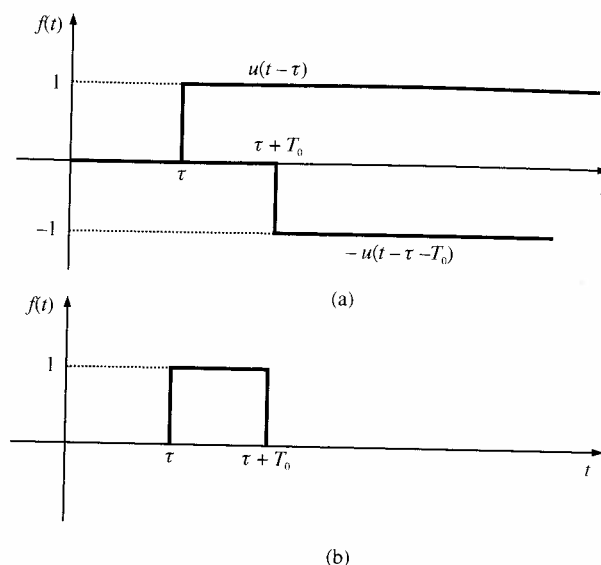


Figura 16.3 Função porta gerada a partir de duas funções degrau unitário.

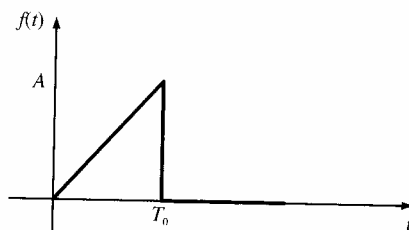


Figura 16.4 Função dente-de-serra.

Usando-se a função porta, podemos expressar a dente-de-serra como

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{A}{T_0} t[u(t) - u(t - T_0)] \\
 &= \frac{A}{T_0} tu(t) - \frac{A}{T_0} tu(t - T_0) \\
 &= \frac{A}{T_0} tu(t) - \frac{A}{T_0} (t - T_0 + T_0)u(t - T_0) \\
 &= \frac{A}{T_0} tu(t) - \frac{A}{T_0} (t - T_0)u(t - T_0) - Au(t - T_0)
 \end{aligned}$$

Então  $F(s)$  é

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{A}{T_0} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-T_0 s} - \frac{T_0}{s} e^{-T_0 s} \right) \\
 &= \frac{A}{T_0 s^2} [1 - (1 + T_0 s) e^{-T_0 s}]
 \end{aligned}$$

Outra técnica para expressar uma forma de onda complexa envolve o uso de uma combinação de degraus e rampas da forma  $Au(t - t_0)$  e  $B(t - t_0)u(t - t_0)$ , respectivamente. As transformadas de Laplace para essas funções são simplesmente

$$\mathcal{L}[Au(t - t_0)] = \frac{A}{s} e^{-t_0 s}$$

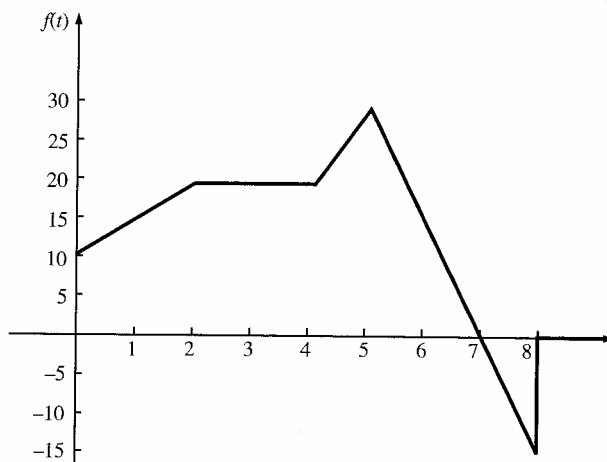
e

$$\mathcal{L}[B(t-t_0)u(t-t_0)] = \frac{B}{s^2} e^{-t_0 s}$$

Para cada descontinuidade da curva, teremos um degrau na expressão, e para cada mudança de inclinação, teremos uma rampa na expressão. O exemplo a seguir ilustra a técnica.

### Exemplo 16.15

Vamos determinar a transformada de Laplace da função mostrada na Figura 16.5.



**Figura 16.5** Função linear por partes usada no Exemplo 16.15.

Iniciando no instante  $t = 0$ , existe uma descontinuidade de 10; portanto, a função contém o termo  $10u(t)$ . A inclinação muda de 0 para 5 no instante  $t = 0$  e, portanto, a expressão contém o termo  $5tu(t)$ . No instante  $t = 2$ , a inclinação muda de 5 para 0 e, portanto, a expressão contém o termo  $-5(t-2)u(t-2)$ . No instante  $t = 4$ , a inclinação muda de 0 para 10, e dessa forma a expressão vai conter o termo  $10(t-4)u(t-4)$ . Continuando desse modo, obtemos

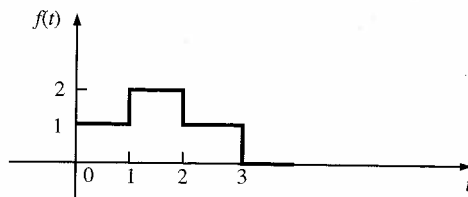
$$f(t) = 10u(t) + 5tu(t) - 5(t-2)u(t-2) + 10(t-4)u(t-4) - 25(t-5)u(t-5) + 15(t-8)u(t-8) + 15u(t-8)$$

Portanto,

$$F(s) = \frac{10}{s} + \frac{5}{s^2} - \frac{5}{s^2} e^{-2s} + \frac{10}{s^2} e^{-4s} - \frac{25}{s^2} e^{-5s} + \frac{15}{s^2} e^{-8s} + \frac{15}{s} e^{-8s}$$

### Exercícios

**E16.10** Determine a transformada de Laplace para a função da Figura E16.10.



**Figura E16.10**

$$\text{Resp.: } F(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}$$

**E16.11** Determine a transformada de Laplace para a curva da Figura E16.11.



Figura E16.11

**Resp.:**  $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s^2}$ .

## 16.5 Funções Periódicas

Se  $f(t)$  é uma função periódica com período  $T$  para  $t \geq 0$  e é zero para  $t < 0$ , então  $f(t)$  pode ser expressa como

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots \quad (16.16)$$

onde  $f_1(t)$  é a função no intervalo  $0 \leq t < T$  e é zero nos demais lugares,  $f_2(t)$  é a função no intervalo  $T \leq t < 2T$  e é zero nos demais lugares, e assim por diante. No entanto, uma vez que  $f_2(t)$  no intervalo  $T \leq t < 2T$  é idêntica a  $f_1(t)$  no intervalo  $0 \leq t < T$ , e  $f_3(t)$  no intervalo  $2T \leq t < 3T$  é idêntica a  $f_1(t)$  no intervalo  $0 \leq t < T$ , e assim por diante, então  $f(t)$  pode ser escrita como

$$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T)u(t-T) + f_1(t-2T)u(t-2T) + \dots \quad (16.17)$$

Dessa forma, usando o Teorema 4, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= F_1(s) + F_1(s)e^{-Ts} + F_1(s)e^{-2Ts} + \dots \\ &= F_1(s)(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \dots) \end{aligned} \quad (16.18)$$

Se  $|x| < 1$ , então

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

e já que  $x = e^{-sT}$ ;  $|x| = |e^{-sT}| < 1$  contanto que  $T > 0$ . Portanto,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} \quad (16.19)$$

onde  $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$ , a transformada de Laplace do primeiro período de  $f(t)$ , e  $F_1(s) = \int_0^T f(t)e^{-st} dt$ .

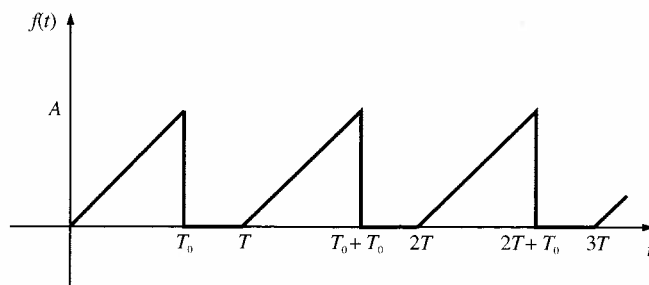
### Exemplo 16.16

A transformada de Laplace da curva periódica mostrada na Figura 16.6 é

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}}$$

onde do Exemplo 16.14,

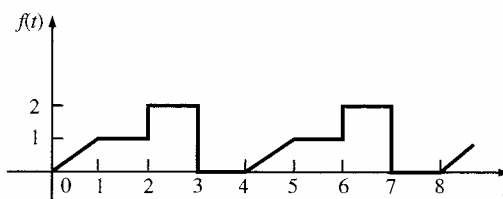
$$F_1(s) = \frac{A}{T_0 s^2} [1 - (1 + T_0 s)e^{-T_0 s}]$$



**Figura 16.6** Função periódica dente-de-serra.

### Exercícios

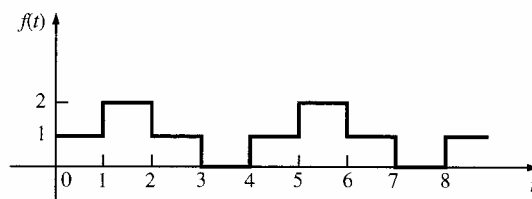
**E16.12** Determine a transformada de Laplace da função periódica da Figura E16.12.



**Figura E16.12**

$$\text{Resp.: } F(s) = \frac{1}{1 - e^{-4s}} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} \right).$$

**E16.13** Determine a transformada de Laplace da função periódica da Figura E16.13.



**Figura E16.13**

$$\text{Resp.: } F(s) = \frac{1}{1 - e^{-4s}} \left( \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} \right).$$

## 16.6 A Transformada Inversa

O procedimento que vamos usar será transformar o problema do domínio do tempo para o domínio da frequência. A seguir, resolveremos algebricamente as equações de circuito no domínio da frequência. E por último, vamos transformar a solução do domínio da frequência de volta ao domínio do tempo. É essa última operação que analisaremos agora.

A solução algébrica das equações do circuito no domínio da frequência resulta em uma função racional em  $s$  da forma

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (16.20)$$

As raízes do polinômio  $P(s)$  são chamadas de *zeros* da função  $F(s)$  porque nesses valores de  $s$ ,  $F(s) = 0$ . De forma semelhante, as raízes do polinômio  $Q(s)$  são chamadas *pólos* de  $F(s)$ , uma vez que nesses valores de  $s$ ,  $F(s)$  se torna infinita.

Se  $F(s)$  é uma função racional própria de  $s$ , então  $n > m$ . Entretanto, se não é este o caso, simplesmente dividimos  $P(s)$  por  $Q(s)$  para obter um quociente e um resto; isto é,

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = C_{m-n} s^{m-n} + \dots + C_2 s^2 + C_1 s + C_0 + \frac{P_1(s)}{Q(s)} \quad (16.21)$$

Agora  $P_1(s)/Q(s)$  é uma função racional própria de  $s$ . Vamos examinar as possíveis formas de raízes de  $Q(s)$ .

1. Se as raízes são simples,  $P_1(s)/Q(s)$  pode ser expresso em forma de fração parcial como

$$\frac{P_1(s)}{Q(s)} = \frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2} + \dots + \frac{K_n}{s+p_n} \quad (16.22)$$

2. Se  $Q(s)$  possui raízes complexas simples, elas vão aparecer em pares complexos conjugados e a expansão em frações parciais de  $P_1(s)/Q(s)$  para cada par de raízes complexas conjugadas será da forma

$$\frac{P_1(s)}{Q_1(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} = \frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta} + \dots \quad (16.23)$$

onde  $Q(s) = Q_1(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)$  e  $K_1^*$  é o conjugado complexo de  $K_1$ .

3. Se  $Q(s)$  possui uma raiz de multiplicidade  $r$ , a expansão em frações parciais para cada raiz será da forma

$$\frac{P_1(s)}{Q(s)(s+p_1)^r} = \frac{K_{11}}{(s+p_1)} + \frac{K_2}{(s+p_1)^2} + \dots + \frac{K_{1r}}{(s+p_1)^r} + \dots \quad (16.24)$$

A importância dessas expansões em frações parciais se baseia no fato de que uma vez que a função  $F(s)$  é expressa dessa forma, as transformadas individuais de Laplace podem ser obtidas de pares conhecidos e tabulados. A soma dessas transformadas inversas de Laplace produz então a desejada função no tempo,  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ .

## Pólos Simples

Vamos assumir que todos os pólos de  $F(s)$  são simples, tal que a expansão em frações parciais de  $F(s)$  é da forma

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2} + \dots + \frac{K_n}{s+p_n} \quad (16.25)$$

Então a constante  $K_i$  pode ser determinada multiplicando-se ambos os lados dessa equação por  $(s+p_i)$  e determinando-se o valor da equação em  $s = -p_i$ ; isto é,

$$\left. \frac{(s+p_i)P(s)}{Q(s)} \right|_{s=-p_i} = 0 + \dots + 0 + K_i + 0 + \dots + 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16.26)$$

Uma vez que todos os termos  $K_i$  sejam conhecidos, a função no tempo  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$  pode ser obtida usando-se o par de transformada de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at} \quad (16.27)$$

## Exemplo 16.17

Dado que

$$F(s) = \frac{12(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)(s+5)}$$



vamos determinar a função  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ .

Expressando  $F(s)$  numa expansão em frações parciais, obtém-se

$$\frac{12(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)(s+5)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{s+5}$$

Para se determinar  $K_0$ , multiplicamos ambos os lados da equação por  $s$  para obter a equação

$$\frac{12(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+4)(s+5)} = K_0 + \frac{K_1 s}{s+2} + \frac{K_2 s}{s+4} + \frac{K_3 s}{s+5}$$

Determinando-se o valor da equação em  $s = 0$ , tem-se

$$\frac{(12)(1)(3)}{(2)(4)(5)} = K_0 + 0 + 0 + 0$$

ou

$$K_0 = \frac{36}{40}$$

De modo semelhante,

$$(s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{12(s+1)(s+3)}{s(s+4)(s+5)} \Big|_{s=-2} = K_1$$

ou

$$K_1 = 1$$

Usando-se o mesmo método, chegamos a  $K_2 = 36/8$  e  $K_3 = -32/5$ . Desse modo,  $F(s)$  pode ser escrita como

$$F(s) = \frac{36/40}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{36/8}{s+4} - \frac{32/5}{s+5}$$

Então  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$  é

$$f(t) = \left( \frac{36}{40} + 1e^{-2t} + \frac{36}{8}e^{-4t} - \frac{32}{5}e^{-5t} \right) u(t)$$

## Exercícios

**E16.14** Determine  $f(t)$  caso  $F(s) = 10(s+6)/(s+1)(s+3)$ .

*Resp.:  $f(s) = (25e^{-t} - 15e^{-3t})u(t)$ .*

**E16.15** Se  $F(s) = 12(s+2)/s(s+1)$ , determine  $f(t)$ .

*Resp.:  $f(s) = (24 - 12e^{-t})u(t)$ .*

## Pólos Conjugados Complexos

Vamos assumir que  $F(s)$  possui um par de pólos conjugados complexos. A expansão da fração parcial de  $F(s)$  pode ser então escrita como

$$F(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} = \frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta} + \dots \quad (16.28)$$

A constante  $K_1$  pode então ser determinada usando-se o procedimento empregado para pólos simples; isto é,

$$(s+\alpha-j\beta)F(s) \Big|_{s=-\alpha+j\beta} = K_1 \quad (16.29)$$

Nesse caso,  $K_1$  é em geral um número complexo que pode ser expresso como  $|K_1| \angle \theta$ . Então  $K_1^* = |K_1| \angle -\theta$ . Dessa maneira, a expansão em frações parciais pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{|K_1| \angle \theta}{s + \alpha - j\beta} + \frac{|K_1| \angle -\theta}{s + \alpha + j\beta} + \dots \\ &= \frac{|K_1| e^{j\theta}}{s + \alpha - j\beta} + \frac{|K_1| e^{-j\theta}}{s + \alpha + j\beta} + \dots \end{aligned} \quad (16.30)$$

A função no tempo correspondente é então da forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = |K_1| e^{j\theta} e^{-(\alpha - j\beta)t} + |K_1| e^{-j\theta} e^{-(\alpha + j\beta)t} + \dots \\ &= |K_1| e^{-\alpha t} [e^{j(\beta t + \theta)} + e^{-j(\beta t + \theta)}] + \dots \\ &= 2|K_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) + \dots \end{aligned} \quad (16.31)$$

### Exemplo 16.18

Vamos determinar a função no tempo  $f(t)$  para a função

$$F(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2 + 2s + s)}$$

A função  $F(s)$  pode ser expressa como uma expansão em frações parciais da forma

$$F(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+1-j1)(s+1+j1)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+1-j1} + \frac{K_1^*}{s+1+j1}$$

Então

$$\begin{aligned} sF(s) \Big|_{s=0} &= K_0 \\ \frac{(10)(1)}{(1+j1)(1-j1)} &= 5 = K_0 \end{aligned}$$

De forma similar,

$$\begin{aligned} (s+1-j1)F(s) \Big|_{s=-1+j1} &= K_1 \\ \frac{(10)(-1+j1+1)}{(-1+j1)(-1+j1+1+j1)} &= K_1 \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \angle -135^\circ &= K_1 \end{aligned}$$

Então, é claro,

$$K_1^* = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle 135^\circ$$

Assim,

$$F(s) = \frac{5}{s} + \frac{(5/\sqrt{2}) \angle -135^\circ}{s+1-j1} + \frac{(5/\sqrt{2}) \angle 135^\circ}{s+1+j1}$$

e portanto

$$f(t) = [5 + 5\sqrt{2}e^{-t} \cos(t - 135^\circ)]u(t)$$

**Exercícios**

**E16.16** Determine  $f(t)$  caso  $F(s) = s/(s^2 + 4s + 8)$ .

**Resp.:**  $f(t) = 1,41e^{-2t} \cos(2t + 45^\circ)u(t)$ .

**E16.17** Se  $F(s) = (s + 1)/(s^2 + 6s + 13)$ , determine  $f(t)$ .

**Resp.:**  $f(t) = 1,41e^{-3t} \cos(2t + 45^\circ)u(t)$ .

**Pólos Múltiplos**

Vamos supor que  $F(s)$  tenha um pólo de multiplicidade  $r$ . Então  $F(s)$  pode ser expandida em frações parciais da forma

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{P_1(s)}{Q_1(s)(s+p_1)^r} \\ &= \frac{K_{11}}{s+p_1} + \frac{K_{12}}{(s+p_1)^2} + \dots + \frac{K_{1r}}{(s+p_1)^r} + \dots \end{aligned} \quad (16.32)$$

Empregando-se o método para um pólo simples, podemos calcular  $K_{1r}$  como

$$(s+p_1)^r F(s) \Big|_{s=-p_1} = K_{1r} \quad (16.33)$$

Para calcular  $K_{1r-1}$ , multiplicamos  $F(s)$  por  $(s+p_1)^r$  como fizemos para determinar  $K_{1r}$ ; no entanto, antes de avaliar a equação em  $s = -p_1$ , derivamos em relação a  $s$ . A prova que isto irá produzir  $K_{1r-1}$  pode ser obtida multiplicando-se ambos os lados da Equação 16.32 por  $(s+p_1)^r$  e então tomando a derivada em relação a  $s$ . Agora, quando determinamos o valor da equação em  $s = -p_1$ , o único termo restante no lado direito da equação é  $K_{1r-1}$ , e portanto

$$\frac{d}{ds} (s+p_1)^r F(s) \Big|_{s=-p_1} = K_{1r-1} \quad (16.34)$$

$K_{1r-2}$  pode ser calculado de modo semelhante e, nesse caso, a equação é

$$\frac{d^2}{ds^2} [(s+p_1)^r F(s)] \Big|_{s=-p_1} = (2!)K_{1r-2} \quad (16.35)$$

A expressão geral para esse caso é

$$K_{1j} = \frac{1}{(r-j)!} \frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}} [(s+p_1)^r F(s)] \Big|_{s=-p_1} \quad (16.36)$$

Vamos ilustrar esse procedimento com um exemplo.

**Exemplo 16.19**

Dada a função  $F(s)$  a seguir, desejamos determinar a função correspondente no tempo  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ .

$$F(s) = \frac{10(s+3)}{(s+1)^3(s+2)}$$

Expressando  $F(s)$  como uma expansão em frações parciais, obtém-se

$$F(s) = \frac{10(s+3)}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} + \frac{K_2}{s+2}$$

Então

$$\begin{aligned} (s+1)^3 F(s) \Big|_{s=-1} &= K_{13} \\ 20 &= K_{13} \end{aligned}$$

$K_{12}$  é então determinado pela equação

$$\left. \frac{d}{ds} [(s+1)^3 F(s)] \right|_{s=-1} = K_{12}$$

$$\left. \frac{-10}{(s+2)^2} \right|_{s=-1} = -10 = K_{12}$$

De modo semelhante,  $K_{11}$  é calculado da equação

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 F(s)] \right|_{s=-1} = 2K_{11}$$

$$\left. \frac{20}{(s+2)^3} \right|_{s=-1} = 20 = 2K_{11}$$

Portanto,

$$10 = K_{11}$$

Além disso,

$$\left. (s+2)F(s) \right|_{s=-2} = K_2$$

$$-10 = K_2$$

Dessa forma,  $F(s)$  pode ser expressa como

$$F(s) = \frac{10}{s+1} - \frac{10}{(s+1)^2} + \frac{20}{(s+1)^3} - \frac{10}{s+2}$$

Empregamos agora o par de transformadas

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+a)^{n+1}} \right] = \frac{t^n}{n!} e^{-at}$$

e assim

$$f(t) = (10e^{-t} - 10te^{-t} + 10t^2e^{-t} - 10e^{-2t})u(t)$$

## Exercícios

**E16.18** Determine  $f(t)$  caso  $F(s) = s/(s+1)^2$ .

**Resp.:**  $f(t) = (e^{-t} - te^{-t})u(t)$ .

**E16.19** Se  $F(s) = (s+2)/s^2(s+1)$ , determine  $f(t)$ .

**Resp.:**  $f(t) = (-1 + 2t + e^{-t})u(t)$ .

## 16.7 A Integral de Convolução

Convolução é um conceito muito importante e possui ampla aplicação na análise de circuitos e sistemas. Vamos primeiramente ilustrar a conexão que existe entre a integral de convolução e a transformada de Laplace. Indicaremos então como a integral de convolução é aplicada na análise de circuitos.

### Teorema 11

Se

$$f(t) = \int_0^t f_1(t-\lambda)f_2(\lambda) d\lambda = \int_0^t f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) d\lambda \quad (16.37)$$

e  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ,  $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$  e  $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ , então

$$F(s) = F_1(s)F_2(s) \quad (16.38)$$

Nossa demonstração começa com a definição

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \left[ \int_0^t f_1(t-\lambda) f_2(\lambda) d\lambda \right] e^{-st} dt$$

Colocamos agora a função no formato apropriado introduzindo na integral, dentro dos colchetes, a função degrau unitário  $u(t-\lambda)$ . Fazemos isto porque

$$u(t-\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{para } \lambda < t \\ 0 & \text{para } \lambda > t \end{cases} \quad (16.39)$$

A primeira condição na Equação 16.39 assegura que a inserção da função degrau unitário não exerce impacto algum dentro dos limites da integração. A segunda condição na Equação 16.39 nos permite mudar o limite superior da integração de  $t$  para  $\infty$ . Portanto

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty f_1(t-\lambda) u(t-\lambda) f_2(\lambda) d\lambda \right] e^{-st} dt$$

que pode ser escrita como

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f_2(\lambda) \left[ \int_0^\infty f_1(t-\lambda) u(t-\lambda) e^{-st} dt \right] d\lambda$$

Note que a integral entre os colchetes vem do teorema de deslocamento ilustrado no Exemplo 16.9. Desse modo, a equação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f_2(\lambda) \mathbf{F}_1(s) e^{-s\lambda} d\lambda \\ &= \mathbf{F}_1(s) \int_0^\infty f_2(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \\ &= \mathbf{F}_1(s) \mathbf{F}_2(s) \end{aligned}$$

Note que a convolução no domínio do tempo corresponde à multiplicação no domínio da frequência.

Vamos agora ilustrar o uso do Teorema 11 na determinação da transformada inversa de Laplace.

### Exemplo 16.20

Vamos determinar a transformada inversa de Laplace da função  $\mathbf{F}(s)$ , onde

$$\mathbf{F}_1(s) = \left( \frac{s}{s+1} \right)^2$$

Usando-se convolução, temos

$$\mathbf{F}_1(s) = \mathbf{F}_2(s) = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1}$$

Portanto,

$$f_1(t) = f_2(t) = \delta(t) - e^{-t}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^t [\delta(\lambda) - e^{-\lambda}] [\delta(t-\lambda) - e^{-(t-\lambda)}] d\lambda \\ &= \int_0^t \delta(\lambda) \delta(t-\lambda) d\lambda - \int_0^t \delta(\lambda) e^{-(t-\lambda)} d\lambda \\ &\quad - \int_0^t \delta(t-\lambda) e^{-\lambda} d\lambda + \int_0^t e^{-\lambda} e^{-(t-\lambda)} d\lambda \end{aligned}$$

Empregando-se a propriedade da amostragem da função impulso, obtemos

$$f(t) = \delta(t) - (2e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

que é a transformada inversa de  $\mathbf{F}(s)$ .

Para efeito de comparação, vamos determinar  $f(t)$  de  $F(s)$  usando o método da expansão em frações parciais descrito anteriormente.  $F(s)$  pode ser escrita como

$$F(s) = \left( \frac{s}{s+1} \right)^2 = 1 - \frac{2s+1}{(s+1)^2}$$

O segundo termo pode ser expandido como

$$\frac{2s+1}{(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2}$$

Determinando-se as constantes, obtemos  $K_{11} = 2$  e  $K_{12} = -1$ . Logo,

$$F(s) = 1 - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

e desse modo

$$f(t) = \delta(t) - (2e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

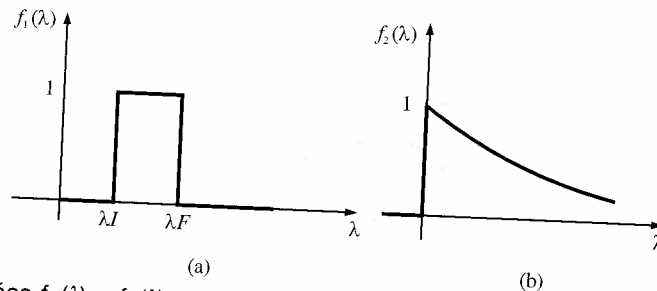


Figura 16.7 Duas funções  $f_1(\lambda)$  e  $f_2(\lambda)$ .

Apesar de empregarmos convolução para derivar uma transformada inversa de Laplace, o exemplo, embora bastante simples, ilustra que este é um método muito fraco. Se a função  $F(s)$  for muito complicada, a matemática necessária para resolver o problema pode se tornar impraticável. Convolução é, entretanto, uma ferramenta muito poderosa e útil. Para entender sua utilidade, vamos interpretar a operação da integral de convolução examinando-a do ponto de vista gráfico.

Suponhamos que as funções  $f_1(\lambda)$  e  $f_2(\lambda)$  são como mostradas na Figura 16.7. Se  $f_2(\lambda) = e^{-\alpha\lambda}u(\lambda)$ , a função deslocada no tempo

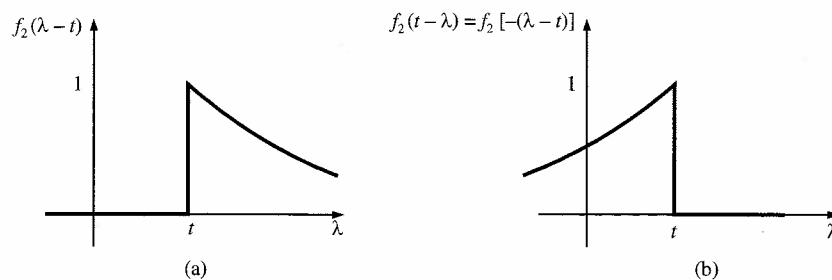
$$f_2(\lambda - t) = e^{-\alpha(\lambda - t)}u(\lambda - t)$$

é como mostrada na Figura 16.8a. Se agora mudarmos o sinal do argumento de tal forma que a função seja

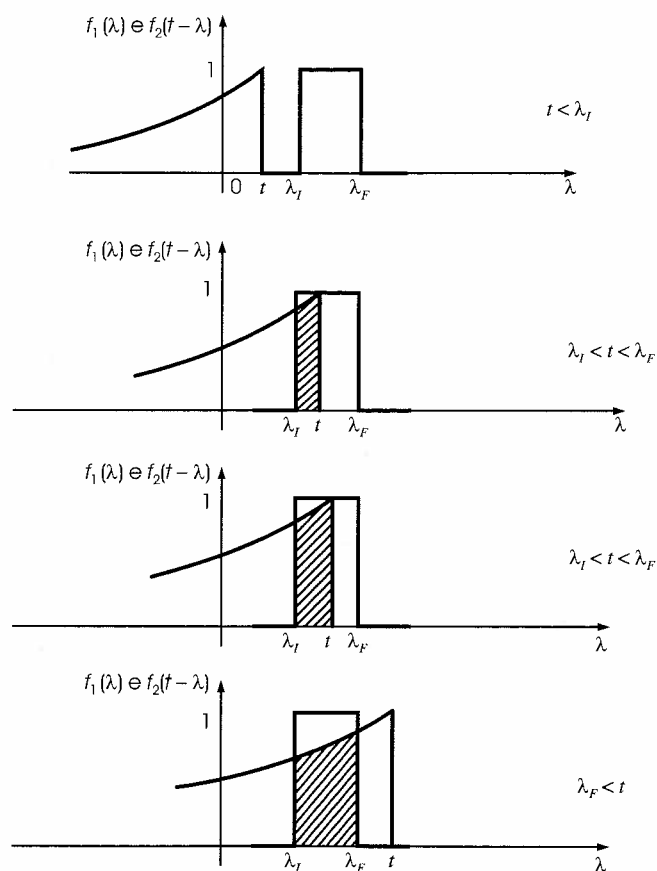
$$f_2(t - \lambda) = e^{-\alpha(t - \lambda)}u(t - \lambda)$$

então a função é refletida em torno do ponto  $\lambda = t$ , como mostrado na Figura 16.8b. O integrando da integral de convolução,  $f_1(\lambda)f_2(t - \lambda)$ , será diferente de zero somente quando as duas funções se sobrepuserem. A sobreposição, ou produto das duas funções, para vários valores de  $t$  é mostrada sombreada na Figura 16.9. A integral de convolução para vários valores de  $t$  é igual à área sombreada mostrada na Figura 16.9. Um gráfico dessa área em função de  $t$  é mostrado na Figura 16.10. Se tivéssemos deslocado e refletido a função  $f_1(\lambda)$ , multiplicando-a por  $f_2(\lambda)$  e subsequentemente integrando-a, obteríamos novamente a curva da Figura 16.10.

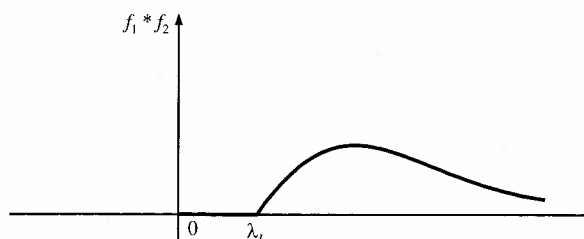
Essa explicação gráfica é normalmente de ajuda, pois ela proporciona uma forma complementar de interpretar a integral de convolução. Ela também serve, no entanto, para ilustrar que a convolução é uma ferramenta de simulação muito importante. Por exemplo, se conhecermos a resposta ao impulso de uma rede, podemos usar a convolução para determinar a resposta da rede para uma entrada que pode estar disponível apenas experimentalmente. Dessa forma, a convolução permite obter a resposta da rede para entradas que não podem ser escritas como funções analíticas, porém podem ser simuladas em um computador digital.



**Figura 16.8** Deslocamento e reflexão de  $f_2(\lambda)$ .



**Figura 16.9** O produto das funções  $f_1(\lambda)$  e  $f_2(t - \lambda)$  mostrado na área sombreada das figuras para diferentes valores de  $t$ .



**Figura 16.10** Gráfico resultante da operação de convolução.

## 16.8 Teoremas de Valor Inicial e Valor Final

Suponhamos que tenhamos de determinar o valor inicial e final da resposta do circuito no domínio do tempo a partir da transformada de Laplace da função no domínio  $s$  sem fazer a transformada inversa. Se determinarmos a função  $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ , podemos achar o valor inicial determinando o valor de  $f(t)$  quando  $t \rightarrow 0$  e o va-

lor final determinando  $f(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Seria muito conveniente, entretanto, se pudéssemos simplesmente determinar os valores inicial e final de  $\mathbf{F}(s)$  sem ter de fazer a transformada inversa. Os teoremas de valor inicial e final nos permitem fazer exatamente isto.

O *teorema do valor inicial* afirma que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbf{F}(s) \quad (16.40)$$

contanto que  $f(t)$  e sua primeira derivada tenham transformada.

A prova desse teorema emprega a transformada de Laplace da função  $df(t)/dt$ .

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = s\mathbf{F}(s) - f(0)$$

Tirando-se o limite de ambos os lados quando  $s \rightarrow \infty$ , achamos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [s\mathbf{F}(s) - f(0)]$$

e uma vez que

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} dt = 0$$

então

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbf{F}(s)$$

que é, obviamente,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbf{F}(s)$$

O *teorema do valor final* afirma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{F}(s) \quad (16.41)$$

contanto que  $f(t)$  e sua primeira derivada sejam passíveis de transformação e que  $f(\infty)$  exista. Essa última exigência significa que os pólos de  $\mathbf{F}(s)$  devem ter partes reais negativas, com exceção de um único pólo que pode estar em  $s = 0$ .

A prova desse teorema também envolve a transformada de Laplace da função  $df(t)/dt$ .

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = s\mathbf{F}(s) - f(0)$$

Tirando-se o limite de ambos os lados quando  $s \rightarrow 0$  resulta em

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [s\mathbf{F}(s) - f(0)]$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [s\mathbf{F}(s) - f(0)]$$

e

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} [s\mathbf{F}(s) - f(0)]$$

e desse modo

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{F}(s)$$

### Exemplo 16.21

Vamos determinar os valores inicial e final para a função do Exemplo 16.18.



A função é

$$\mathbf{F}(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

e a função no tempo correspondente é

$$f(t) = 5 + 5\sqrt{2} e^{-t} \cos(t - 135^\circ)$$

Aplicando-se o teorema do valor inicial, temos

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbf{F}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10(s+1)}{s^2 + 2s + 2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Os pólos de  $\mathbf{F}(s)$  são  $s = 0$  e  $s = -1 \pm j1$ , portanto o teorema do valor final se aplica. Assim,

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{F}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(s+1)}{s^2 + 2s + 2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Note que tais valores poderiam ser obtidos diretamente da função no tempo  $f(t)$ . |

### Exercício

**E16.20** Determine os valores inicial e final da função  $f(t)$  caso  $\mathbf{F}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  seja dada pela expressão

$$\mathbf{F}(s) = \frac{(s+1)^2}{s(s+2)(s^2 + 2s + 2)}$$

**Resp.:**  $f(0) = 0$  e  $f(\infty) = 1/4$ .

## 16.9 Aplicações com Equações Diferenciais

Vamos agora usufruir das propriedades da transformada de Laplace. Demonstraremos nesta seção o seu uso na solução de equações lineares íntegro-diferenciais a coeficientes constantes. No Capítulo 17, vamos ilustrar o uso da transformada de Laplace na análise de circuitos. Na exposição, empregaremos pares de transformadas que havíamos apresentado e discutido para converter a equação íntegro-diferencial no domínio do tempo para uma equação algébrica no domínio  $s$ . A solução no domínio  $s$  será então convertida de volta ao domínio do tempo usando-se os pares de transformada. A solução que obtivermos será então a solução completa, uma vez que as condições iniciais estão automaticamente incluídas no processo de transformação.

### Exemplo 16.22

Dada a seguinte equação diferencial, vamos determinar  $y(t)$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{5dy(t)}{dt} + 6y(t) = e^{-t}$$

onde  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 1$ .

Transformando-se a equação, obtemos

$$s^2 \mathbf{Y}(s) - sy(0) - y'(0) + 5[s\mathbf{Y}(s) - y(0)] + 6\mathbf{Y}(s) = \frac{1}{s+1}$$

ou

$$Y(s)[s^2 + 5s + 6] = \frac{1}{s+1} + s + 1 + 5$$

Portanto,

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 + 5s + 6)} + \frac{s+6}{s^2 + 5s + 6}$$

O primeiro termo do lado direito da equação é a resposta para as condições iniciais nulas. O segundo termo no lado direito da equação modifica a solução complementar para satisfazer as condições iniciais necessárias. Note que a solução particular não é afetada pelo segundo termo. Usando-se as técnicas descritas anteriormente para se determinar a transformada inversa, obtém-se

$$y(t) = \left( \frac{1}{2} e^{-t} + 3e^{-2t} - \frac{5}{2} e^{-3t} \right) u(t)$$

Esse método pode ser aplicado de forma semelhante a um conjunto de equações lineares diferenciais simultâneas com coeficientes constantes, conforme ilustrado no seguinte exemplo.

### Exemplo 16.23

Vamos usar a técnica de transformada de Laplace para resolver as equações simultâneas

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) &= 4u(t) \\ 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t) + \frac{dy(t)}{dt} &= 2u(t) \end{aligned}$$

onde  $y(0) = 1$  e  $x(0) = -1$ .

Transformando-se as equações, obtemos

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) &= \frac{4}{s} \\ 2sX(s) - 2x(0) + X(s) + sY(s) - y(0) &= \frac{2}{s} \end{aligned}$$

Essas equações se reduzem a

$$\begin{aligned} sX(s) + (s+2)Y(s) &= \frac{4}{s} \\ (2s+1)X(s) + sY(s) &= \frac{2}{s} - 1 \end{aligned}$$

Resolvendo as equações algébricas, chegamos a

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{-(s^2 + 4s - 4)}{s(s^2 + 5s + 2)} \\ Y(s) &= \frac{s^2 + 6s + 4}{s(s^2 + 5s + 2)} \end{aligned}$$

das quais temos

$$\begin{aligned} x(t) &= (2 - 3,07e^{-0,44t} - 0,08e^{-4,56t})u(t) \\ y(t) &= (2 - 0,86e^{-0,44t} - 0,14e^{-4,56t})u(t) \end{aligned}$$

### Exemplo 16.24

Vamos finalmente empregar a transformada de Laplace para resolver a equação

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) + \int_0^t y(\lambda) e^{-2(t-\lambda)} d\lambda = 10u(t) \quad y(0) = 0$$

Aplicando a transformada, obtemos

$$sY(s) + 2Y(s) + \frac{Y(s)}{s+2} = \frac{10}{s}$$

$$Y(s) \left( s+2 + \frac{1}{s+2} \right) = \frac{10}{s}$$

$$Y(s) = \frac{10(s+2)}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

Expressando a função em uma expansão em frações parciais, obtemos

$$\frac{10(s+2)}{s(s+2-j1)(s+2+j1)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+2-j1} + \frac{K_1^*}{s+2+j1}$$

$$\left. \frac{10(s+2)}{s^2 + 4s + 5} \right|_{s=0} = K_0$$

$$4 = K_0$$

De modo semelhante,

$$\left. \frac{10(s+2)}{s(s+2+j1)} \right|_{s=-2+j1} = K_1$$

$$2,236/-153,43^\circ = K_1$$

Portanto,

$$2,236/153,43^\circ = K_1^*$$

A expansão de frações parciais de  $Y(s)$  é então

$$Y(s) = \frac{4}{s} + \frac{2,236/-153,43^\circ}{s+2-j1} + \frac{2,236/153,43^\circ}{s+2+j1}$$

e portanto

$$y(t) = [4 + 4,472e^{-2t} \cos(t - 153,43^\circ)]u(t)$$

## Exercícios

**E16.21** Resolva a equação diferencial

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 30y(t) = 4u(t) \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\text{Resp.: } y(t) = \left( \frac{4}{30} - \frac{4}{5}e^{-5t} + \frac{2}{3}e^{-6t} \right)u(t).$$

**E16.22** Determine  $y(t)$  se

$$\frac{dy(t)}{dt} + \int_0^t y(\lambda)e^{-2(t-\lambda)}d\lambda = u(t) \quad y(0) = 0$$

$$\text{Resp.: } y(t) = (2 - 2e^{-t} - te^{-t})u(t).$$

## 16.10 Resumo

Este capítulo descreveu uma ferramenta de análise poderosa chamada transformada de Laplace. Mostramos que por meio do uso dessa técnica podemos transformar um conjunto de equações lineares íntegro-diferenciais com coeficientes constantes no domínio do tempo para um conjunto de equações algébricas no domínio  $s$ . As

equações no domínio  $s$  podem ser resolvidas algebricamente e então a solução é transformada de volta ao domínio do tempo. A transformação do domínio  $s$  para o domínio do tempo foi realizada usando-se um conjunto de pares de transformadas. A integral de convolução foi introduzida e seu uso na inversão de transformadas de Laplace foi demonstrado. Finalmente, a transformada de Laplace foi aplicada na solução de equações íntegro-diferenciais.

### Pontos-Chave

- A transformada de Laplace nos permite converter um problema do domínio do tempo para o domínio da frequência onde tal problema pode ser resolvido algebricamente. A seguir, converte-se a solução de volta ao domínio do tempo.
- A transformada de Laplace é definida como

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- Existe um conjunto de pares de transformada que permite transformar uma função do domínio do tempo para o domínio da frequência, e vice-versa.
- Foram apresentadas 10 propriedades importantes da transformada de Laplace que facilitam seu uso.
- A função porta é útil para determinar a transformada de Laplace de uma forma de onda no domínio do tempo.
- O método de expansão em frações parciais pode ser aplicado para determinar a transformada inversa de Laplace de funções contendo pólos simples, múltiplos e conjugados complexos.
- A integral de convolução pode ser usada para determinar a transformada inversa de Laplace.
- Os teoremas do valor inicial e final podem ser aplicados para determinar os valores inicial e final de funções no domínio do tempo quando suas transformadas de Laplace são conhecidas.
- A transformada de Laplace pode ser usada para resolver equações íntegro-diferenciais. A solução completa é obtida uma vez que as condições iniciais são automaticamente incluídas no processo de transformação.

### Problemas

- 16.1 Demonstre as seguintes igualdades:

$$(a) \mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}, \quad (b) \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad (c) \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$$

- 16.2 Determine  $\mathcal{L}[f(t)]$  caso  $f(t)$  seja dado pela expressão

$$f(t) = \frac{e^{-(a+t)}}{4x}$$

- 16.3 Determine  $\mathcal{L}[f(t)]$  caso  $f(t)$  seja

$$f(t) = a + a^2 t + ae^{-at} + a^2 \cos at$$

- 16.4 Determine  $F(s)$  caso  $f(t) = e^{-at} \sin \omega t u(t-1)$ .

- 16.5 Determine  $F(s)$  caso  $f(t) = te^{-at} u(t-4)$ .

- 16.6 Utilize o Teorema 5 para determinar  $\mathcal{L}[f(t)]$  caso

$$f(t) = e^{-at} u(t-1)$$

- 16.7 Utilize o Teorema 6 para determinar  $\mathcal{L}[f(t)]$  caso

$$f(t) = te^{-at} u(t-1)$$

- 16.8 Utilize o teorema de deslocamento para determinar  $\mathcal{L}[f(t)]$ , onde

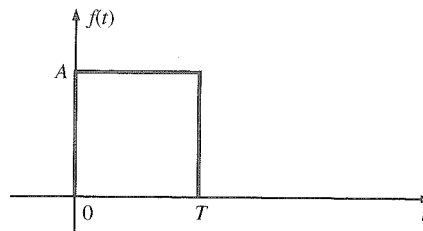
$$f(t) = [t-1 + e^{-(t-1)}] u(t-1)$$

- 16.9 Utilize o teorema de deslocamento para determinar  $\mathcal{L}[f(t)]$ , onde

$$f(t) = [e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}] u(t-2)$$

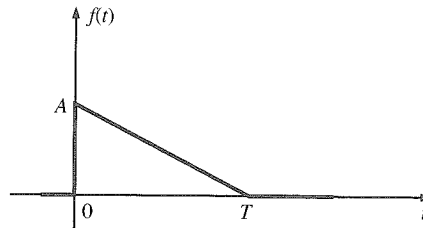
- 16.10 Se  $f(t) = t \cos \omega t u(t-1)$ , determine  $F(s)$ .

**16.11** Determine  $F(s)$  caso  $f(t)$  seja dada pela forma de onda da Figura P16.11.



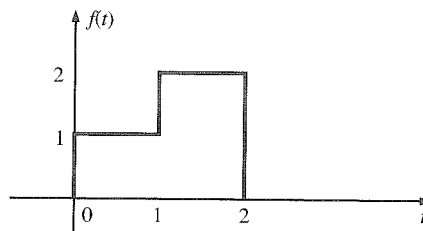
**Figura P16.11**

**16.12** Determine  $F(s)$  se  $f(t)$  é dada pela forma de onda da Figura P16.12.



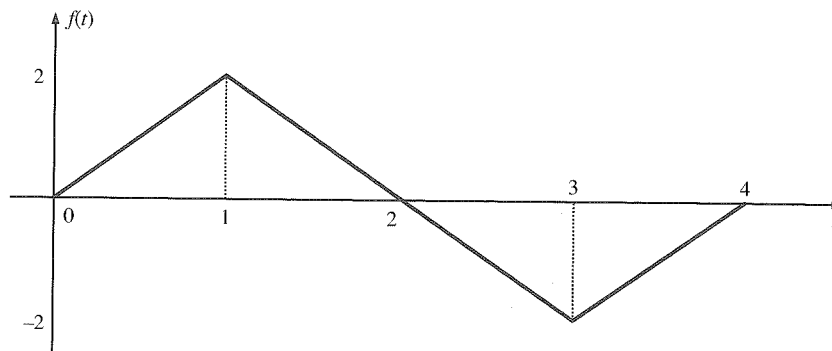
**Figura P16.12**

**16.13** Determine  $F(s)$  caso  $f(t)$  seja dada pela forma de onda da Figura P16.13.



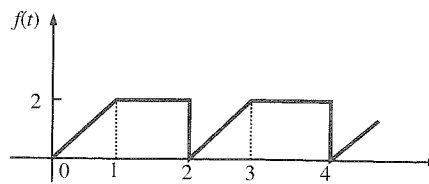
**Figura P16.13**

**16.14** Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.14.



**Figura P16.14**

**16.15** Determine a transformada de Laplace da forma de onda periódica mostrada na Figura P16.15.



**Figura P16.15**

16.16 Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.16.

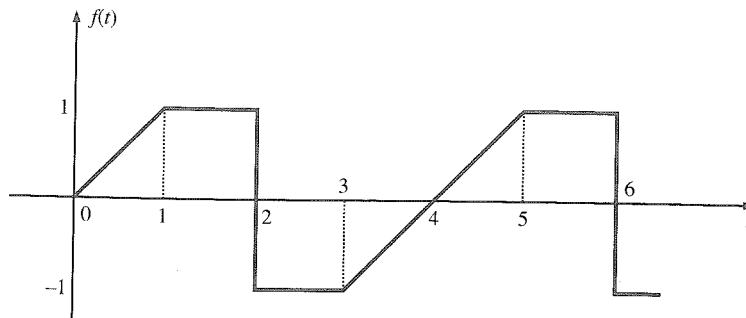


Figura P16.16

16.17 Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.17.

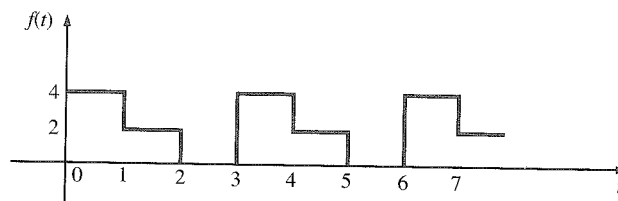


Figura P16.17

16.18 Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.18.

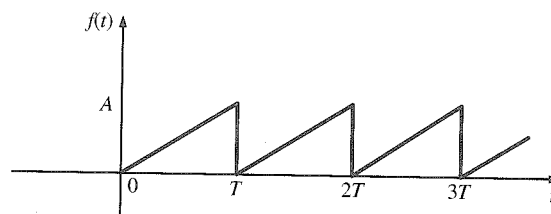


Figura P16.18

16.19 Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.19.

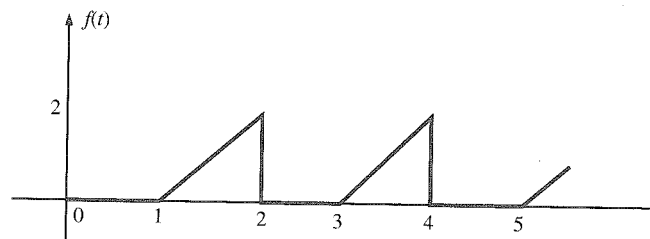


Figura P16.19

16.20 Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.20.

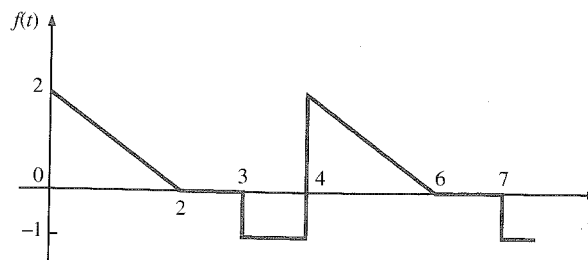
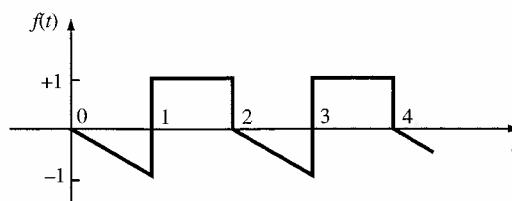


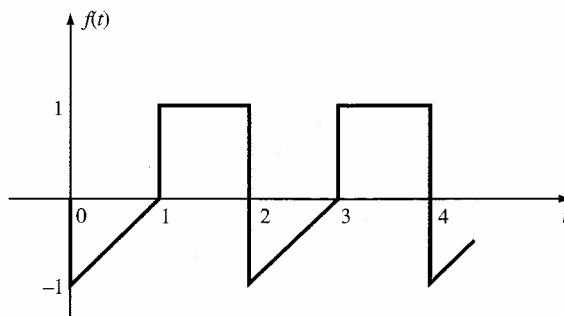
Figura P16.20

**16.21** Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.21.



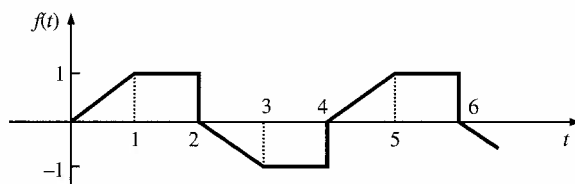
**Figura P16.21**

**16.22** Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.22.



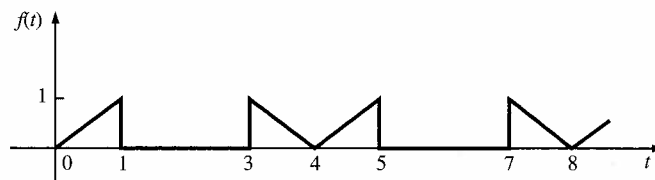
**Figura P16.22**

**16.23** Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.23.



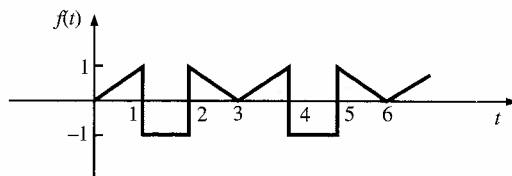
**Figura P16.23**

**16.24** Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.24.



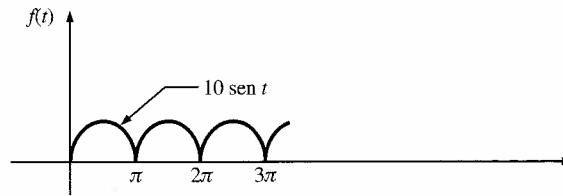
**Figura P16.24**

**16.25** Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.25.



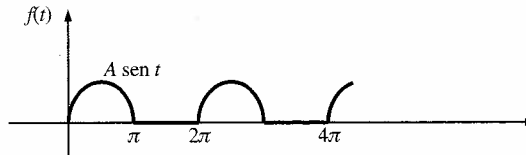
**Figura P16.25**

**16.26** Determine a transformada de Laplace da forma de onda periódica mostrada na Figura P16.26.



**Figura P16.26**

**16.27** Determine a transformada de Laplace da forma de onda mostrada na Figura P16.27.



**Figura P16.27**

**16.28** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s+10}{(s+4)(s+6)}$       (b)  $F(s) = \frac{24}{(s+2)(s+8)}$

**16.29** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s}{(s+8)(s+12)}$       (b)  $F(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+2s+1}$

**16.30** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s^2+7s+12}{(s+2)(s+4)(s+6)}$       (b)  $F(s) = \frac{(s+3)(s+6)}{s(s^2+10s+24)}$

**16.31** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s^3+2s^2+s}{s^2(s^2+5s+4)}$       (b)  $F(s) = \frac{s^2+4s+3}{(s^2+2s+1)(s^2+7s+12)}$

**16.32** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s^2+4s+5}{(s+1)(s+4)}$       (b)  $F(s) = \frac{s+10}{s^2}$

**16.33** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s+8}{s^2(s+6)}$       (b)  $F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2}$

**16.34** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2}$       (b)  $F(s) = \frac{s+6}{s(s+1)^2}$

**16.35** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2(s+2)}$       (b)  $F(s) = \frac{s^2+9s+20}{s(s+4)^3(s+5)}$

**16.36** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s^2+6s+8}{s^2(s+2)(s^2+10s+16)}$       (b)  $F(s) = \frac{s^2+9s+18}{s(s+4)(s^2+10s+24)}$

**16.37** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s(s+6)}{(s+3)(s^2+6s+18)}$       (b)  $F(s) = \frac{(s+4)(s+8)}{s(s^2+8s+32)}$

**16.38** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

(a)  $F(s) = \frac{s+2}{(s^2+4s+5)(s^2+4s+8)}$       (b)  $F(s) = \frac{s(s+2)}{s^2+2s+2}$



**16.39** Dadas as seguintes funções  $F(s)$ , determine  $f(t)$ .

$$(a) F(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s^2+4s+8)} \quad (b) F(s) = \frac{(s+2)^2}{s^2+4s+8}$$

**16.40** Determine  $f(t)$  se  $F(s)$  é dada pela expressão

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

**16.41** Determine  $f(t)$  se  $F(s)$  é dada pela expressão

$$F(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)^3(s+3)}$$

**16.42** Determine  $f(t)$  se  $F(s)$  é dada pela expressão

$$F(s) = \frac{12(s+2)}{s^2(s+1)(s^2+4s+8)}$$

**16.43** Determine  $f(t)$  se  $F(s)$  é dada pelas seguintes funções:

$$(a) F(s) = \frac{(s^2+2s+3)e^{-2s}}{s(s+1)(s+2)} \quad (b) F(s) = \frac{(s+2)e^{-4s}}{s^2(s+1)}$$

**16.44** Determine  $f(t)$  se  $F(s)$  é dada pelas seguintes funções:

$$(a) F(s) = \frac{2(s+1)e^{-s}}{(s+2)(s+3)} \quad (b) F(s) = \frac{10(s+2)e^{-2s}}{(s+1)(s+4)}$$

**16.45** Determine  $f(t)$  se  $F(s)$  é dada pela seguinte função:

$$F(s) = \frac{(s+1)e^{-s}}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

**16.46** Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$F(s) = \frac{10s(s+2)e^{-4s}}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}$$

**16.47** Determine  $f(t)$  se  $F(s)$  é dada pela expressão

$$F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2(s+1)}$$

**16.48** Determine  $f(t)$  se  $F(s)$  é dada pela expressão

$$F(s) = \frac{s^2 e^{-2s}}{(s^2+1)(s+1)(s^2+2s+2)}$$

**16.49** Determine  $f(t)$  utilizando convolução se  $F(s)$  é

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

**16.50** Utilize convolução para determinar  $f(t)$  se

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$$

**16.51** Determine o valor inicial e final de  $f(t)$  para os casos em que  $F(s)$  é dada pelas seguintes expressões

$$(a) F(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+1)} \quad (b) F(s) = \frac{2(s^2+2s+6)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (c) F(s) = \frac{2s^2}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

**16.52** Determine o valor inicial e final de  $f(t)$  para os casos em que  $F(s)$  é dada pelas seguintes expressões

$$(a) F(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+3)} \quad (b) F(s) = \frac{s^2+2s+4}{(s+6)(s^3+4s^2+8s+10)} \quad (c) F(s) = \frac{2s}{s^2+2s+2}$$

**16.53** Determine o valor final de  $f(t)$  para os casos em que  $F(s)$  é dada pelas seguintes expressões

$$(a) F(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s-3)} \quad (b) F(s) = \frac{10}{s^2+4}$$

**16.54** Resolva as seguintes equações diferenciais usando a transformada de Laplace

$$(A) \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = e^{-t}, \quad x(0) = 1. \quad (b) \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = 2u(t), \quad x(0) = 2.$$

**16.55** Resolva as seguintes equações diferenciais usando a transformada de Laplace

$$(a) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2dy(t)}{dt} + y(t) = e^{-2t}, \quad (b) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{4dy(t)}{dt} + 4y(t) = u(t),$$

$$y(0) = y'(0) = 0. \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

**16.56** Use a transformada de Laplace para determinar  $y(t)$  se

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) + 4 \int_0^t y(x) dx = u(t), \quad y(0) = 0$$

**16.57** Resolva a seguinte equação íntegro-diferencial usando a transformada de Laplace

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) + \int_0^t y(\lambda) d\lambda = 1 - e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad t > 0$$

**16.58** Use a transformada de Laplace para resolver a seguinte equação íntegro-diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) + \int_0^t y(\lambda) e^{-2(t-\lambda)} d\lambda = 4u(t),$$

$$y(0) = 1, \quad t > 0$$

**16.59** Determine  $y(t)$  caso

$$y(t) + \int_0^t y(\lambda)(t-\lambda) d\lambda = e^{-t}$$

# Aplicação da Transformada de Laplace à Análise de Circuitos

Demonstramos no Capítulo 16 como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver equações lineares diferenciais com coeficientes constantes. Uma vez que todas as redes lineares com as quais estamos lidando podem ser descritas por tais equações, o uso da transformada de Laplace na análise de circuitos é um método viável. As características de entrada e saída para cada elemento do circuito podem ser descritas no domínio  $s$  transformando-se as equações devidamente no domínio do tempo. As leis de Kirchhoff, quando aplicadas a um circuito, produzem um conjunto de equações íntegro-diferenciais em termos das características dos elementos da rede que, quando transformadas, produzem um conjunto de equações algébricas no domínio  $s$ . Portanto, é possível analisar um circuito no domínio da frequência. Nesse caso, os elementos passivos da rede são representados pela sua impedância ou admitância transformada; e fontes, tanto independentes como dependentes, são representadas em termos de suas variáveis transformadas. Tal análise no domínio  $s$  é algébrica e todas as técnicas derivadas na análise dc se aplicam. Isto é, portanto, semelhante à análise dc de redes resistivas e todas as técnicas de análise e teoremas de redes que foram aplicadas à análise dc são válidas no domínio  $s$  (por exemplo, análise nodal, análise de laço, o princípio da superposição, transformação de fonte, teorema de Thévenin, teorema de Norton e combinações de admitância ou impedância). Dessa forma, nosso enfoque será transformar cada um dos elementos de circuito, desenhar um circuito equivalente no domínio  $s$  e, então, usando a rede transformada, resolver as equações do circuito algebricamente em tal domínio. Por último, uma tabela de pares de transformadas pode ser empregada para obter uma solução completa (transiente e em estado estacionário). Nosso enfoque neste capítulo será empregar os modelos do elemento de circuito e demonstrar, usando vários exemplos, muitos dos conceitos e técnicas que apresentamos anteriormente.

## 17.1 Modelos de Elementos de Circuito

Vamos examinar as características de entrada e saída dos elementos da rede no domínio  $s$ . O relacionamento tensão-corrente para um resistor no domínio do tempo usando a convenção passiva de sinal é

$$v(t) = Ri(t) \quad (17.1)$$

Usando-se a transformada de Laplace, esse relacionamento no domínio  $s$  é

$$\mathbf{V}(s) = R\mathbf{I}(s) \quad (17.2)$$

Portanto, as representações desse elemento no domínio do tempo e no domínio complexo da frequência são mostradas na Figura 17.1a.

As relações no domínio do tempo para um capacitor usando a convenção passiva de sinal são

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx + v(0) \quad (17.3)$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (17.4)$$

As equações no domínio  $s$  para o capacitor são então

$$\mathbf{V}(s) = \frac{\mathbf{I}(s)}{sC} + \frac{v(0)}{s} \quad (17.5)$$

$$\mathbf{I}(s) = sC\mathbf{V}(s) - Cv(0) \quad (17.6)$$

e assim a representação no domínio  $s$  desse elemento é como mostrado na Figura 17.1b.

Para um indutor, as relações tensão-corrente usando-se a convenção passiva de sinal são

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (17.7)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(x) dx + i(0) \quad (17.8)$$

As relações no domínio  $s$  são então

$$\mathbf{V}(s) = sL\mathbf{I}(s) - Li(0) \quad (17.9)$$

$$\mathbf{I}(s) = \frac{\mathbf{V}(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s} \quad (17.10)$$

A representação no domínio  $s$  desse elemento é mostrada na Figura 17.1c.

Usando-se a convenção passiva de sinal, achamos que os relacionamentos tensão-corrente para os indutores acoplados mostrados na Figura 17.1d são

$$\begin{aligned} v_1(t) &= L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) &= L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \end{aligned} \quad (17.11)$$

As relações no domínio  $s$  são então

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1(s) &= L_1 s\mathbf{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + Ms\mathbf{I}_2(s) - Mi_2(0) \\ \mathbf{V}_2(s) &= L_2 s\mathbf{I}_2(s) - L_2 i_2(0) + Ms\mathbf{I}_1(s) - Mi_1(0) \end{aligned} \quad (17.12)$$

Fontes independentes e dependentes de tensão e corrente podem também ser representadas pelas suas transformadas; isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1(s) &= \mathcal{L}[v_1(t)] \\ \mathbf{I}_2(s) &= \mathcal{L}[i_2(t)] \end{aligned} \quad (17.13)$$

e se  $v_1(t) = Ai_2(t)$ , o que representa uma fonte de tensão com corrente controlada, então

$$\mathbf{V}_1(s) = A\mathbf{I}_2(s) \quad (17.14)$$

O leitor deve notar a direção das fontes de corrente e a polaridade das fontes de tensão na rede transformada que resulta das condições iniciais. Se a polaridade da tensão inicial ou a direção da corrente inicial é invertida, as fontes do circuito transformado que resultam das condições iniciais são também invertidas.

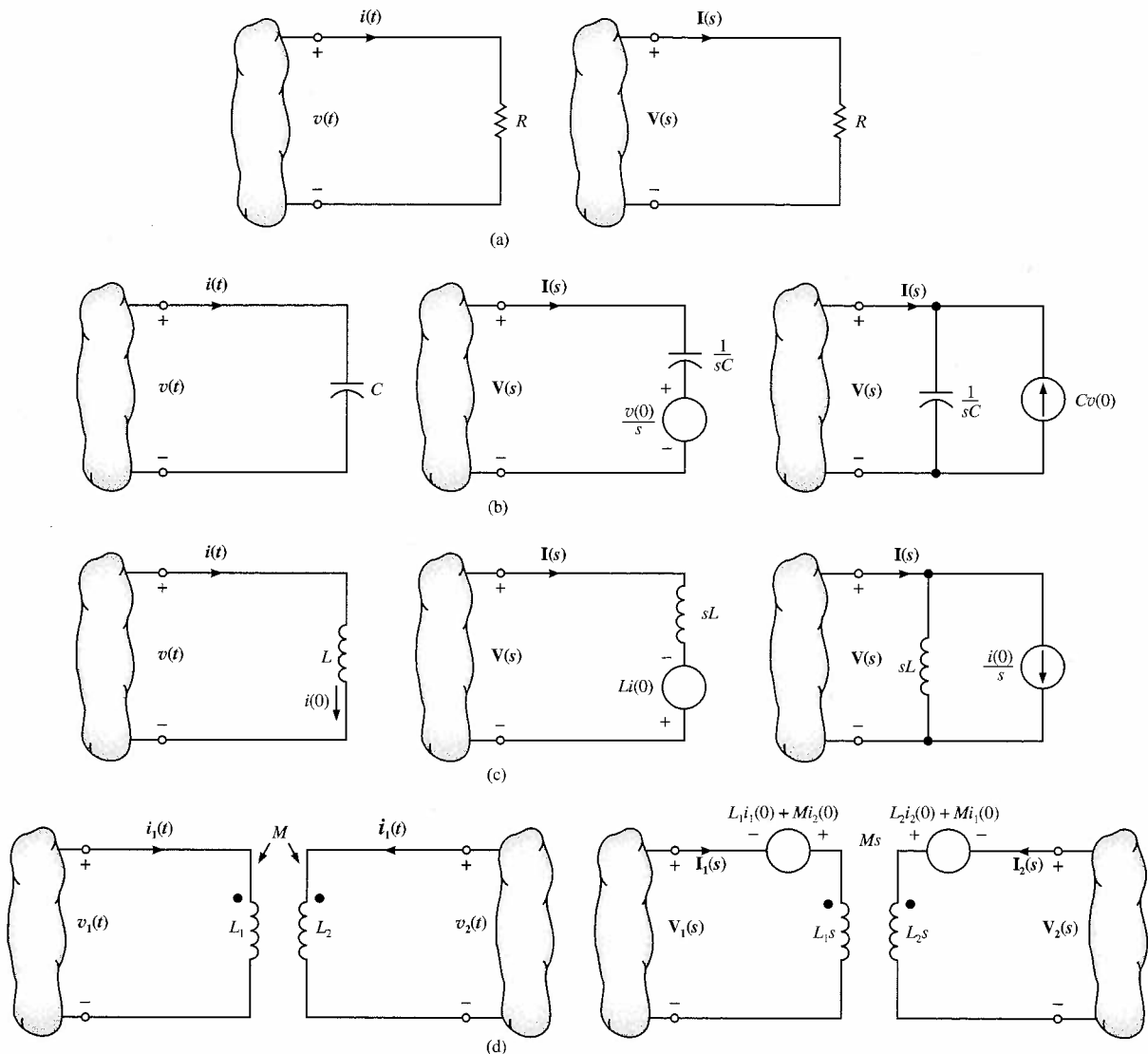


Figura 17.1 Representações de elementos de circuito no domínio do tempo e no domínio  $s$ .

## 17.2 Técnicas de Análise

Agora que temos a representação no domínio  $s$  para os elementos de circuito, estamos prontos para analisar redes usando um circuito transformado.

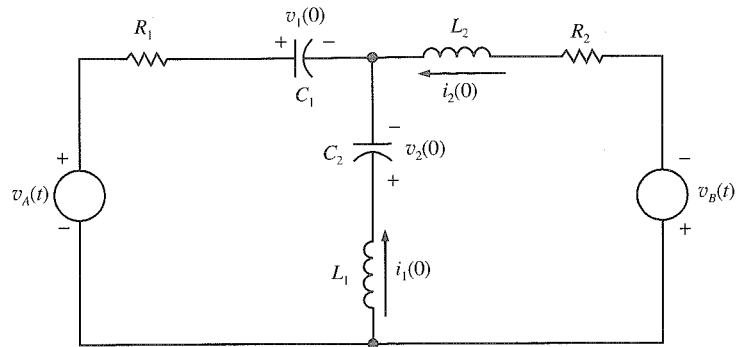
### Exemplo 17.1

Dados os circuitos da Figura 17.2a e b, desejamos escrever as equações de malha no domínio  $s$  para a rede da Figura 17.2a e as equações nodais no domínio  $s$  para a rede da Figura 17.2b.

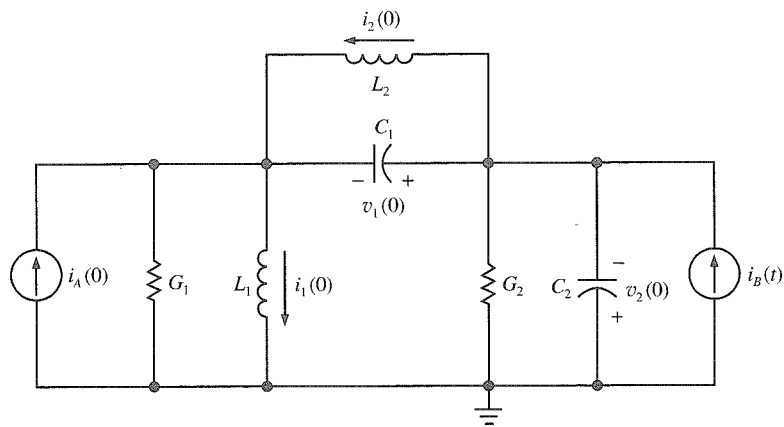
O circuito transformado usando-se os valores de impedância para os parâmetros da rede na Figura 17.2a é mostrado na Figura 17.2c. As equações de malha para essa rede são

$$\begin{aligned} \left( R_1 + \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} + sL_1 \right) \mathbf{I}_1(s) - \left( \frac{1}{sC_2} + sL_1 \right) \mathbf{I}_2(s) \\ = \mathbf{V}_A(s) - \frac{v_1(0)}{s} + \frac{v_2(0)}{s} - L_1 i_1(0) \end{aligned}$$

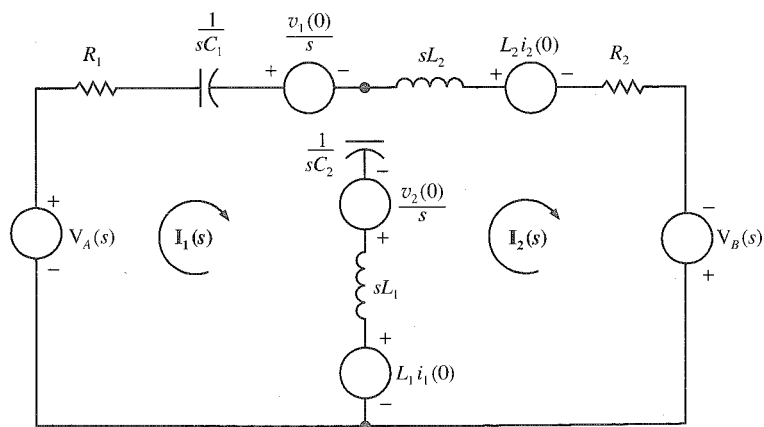
$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{1}{sC_2} + sL_1\right) \mathbf{I}_1(s) + \left(\frac{1}{sC_2} + sL_1 + sL_2 + R_2\right) \mathbf{I}_2(s) \\
 & = L_1 i_1(0) - \frac{v_2(0)}{s} - L_2 i_2(0) + \mathbf{V}_B(s)
 \end{aligned}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 17.2 Circuitos usados no Exemplo 17.1.

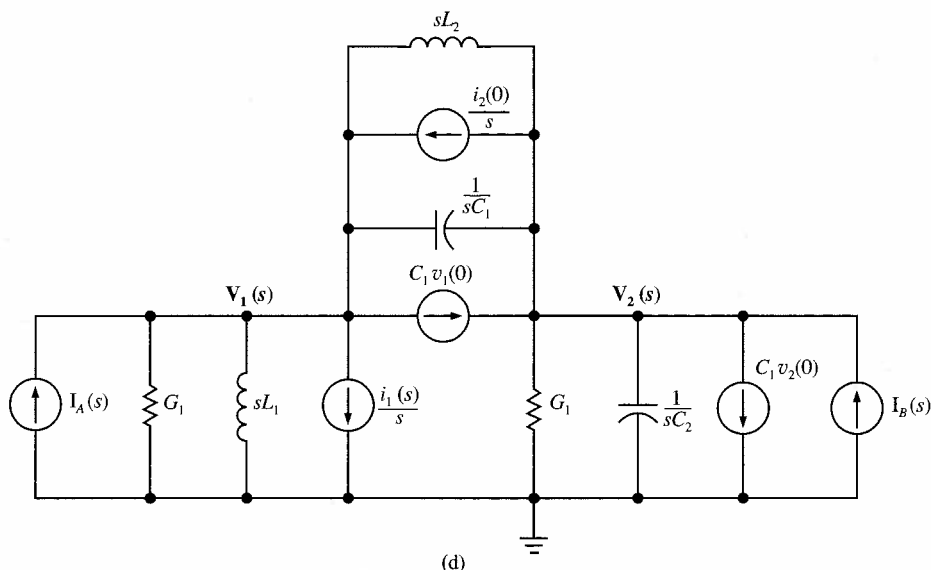


Figura 17.2 Circuitos usados no Exemplo 17.1. (continuação)

O circuito transformado usando-se os valores de impedância para os parâmetros da rede na Figura 17.2b é mostrado na Figura 17.2d. As equações nodais para essa rede são

$$\begin{aligned} \left( G_1 + \frac{1}{sL_1} + sC_1 + \frac{1}{sL_2} \right) V_1(s) - \left( \frac{1}{sL_2} + sC_1 \right) V_2(s) \\ = I_A(s) - \frac{i_1(0)}{s} + \frac{i_2(0)}{s} - C_1 v_1(0) \\ - \left( \frac{1}{sL_2} + sC_1 \right) V_1(s) + \left( \frac{1}{sL_2} + sC_1 + G_2 + sC_2 \right) V_2(s) \\ = C_1 v_1(0) - \frac{i_2(0)}{s} - C_2 v_2(0) + I_B(s) \end{aligned}$$

O Exemplo 17.1 ilustra uma maneira de empregar as duas representações no domínio  $s$  dos elementos de circuito indutor e capacitor quando condições iniciais são apresentadas. Nos exemplos seguintes, ilustramos o uso de diversas técnicas de análise para obter a resposta completa de uma rede transformada. Os circuitos analisados foram escolhidos especificamente para demonstrar o uso da transformada de Laplace em circuitos com uma variedade de elementos passivos e ativos.

### Exemplo 17.2

Considere a rede mostrada na Figura 17.3a. Vamos determinar as tensões nodais  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  usando a análise nodal e o princípio da superposição.

A rede transformada é mostrada na Figura 17.3b. As equações para a rede são

$$\begin{aligned} V_1(s) \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{2} + \frac{s}{2} \right) - V_2(s) \left( \frac{s}{2} \right) &= \frac{12}{s^2} \\ -V_1(s) \left( \frac{s}{2} \right) + V_2(s) \left( \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \right) &= \frac{4}{s} \end{aligned}$$

As equações em forma matricial são

$$\begin{bmatrix} \frac{s^2 + s + 2}{2s} & \frac{-s}{2} \\ \frac{-s}{2} & \frac{s+1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{s^2} \\ \frac{4}{s} \end{bmatrix}$$

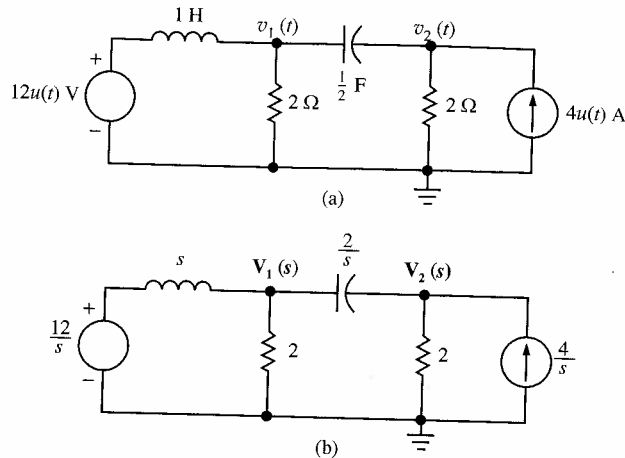


Figura 17.3 Circuitos usados no Exemplo 17.2.

Resolvendo-se para as tensões nodais, obtemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{s^2 + s + 2}{2s} & \frac{-s}{2} \\ \frac{-s}{2} & \frac{s+1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{12}{s^2} \\ \frac{4}{s} \end{bmatrix} \\ &= \frac{4s}{2s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{2} & \frac{s}{2} \\ \frac{s}{2} & \frac{s^2 + s + 2}{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12}{s^2} \\ \frac{4}{s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s(s^2 + 3s/2 + 1)} \\ \frac{4(s^2 + 4s + 2)}{s(s^2 + 3s/2 + 1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vamos agora determinar  $v_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_1(s)]$  e  $v_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_2(s)]$ .  $V_1(s)$  pode ser escrita como

$$V_1(s) = \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s(s^2 + \frac{3}{2}s + 1)} = \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s[s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)][s + \frac{3}{4} - j(\sqrt{7}/4)]}$$

Portanto,

$$\frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s[s + \frac{3}{4} - j(\sqrt{7}/4)][s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)]} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + \frac{3}{4} - j(\sqrt{7}/4)} + \frac{K_1^*}{s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)}$$

Determinando-se os valores  $K_0$  e  $K_1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s^2 + \frac{3}{2}s + 1} \right|_{s=0} &= K_0 \\ 12 &= K_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left. \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s[s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)]} \right|_{s=-3/4 + j(\sqrt{7}/4)} &= K_1 \\ 4/180^\circ &= K_1 \end{aligned}$$



Portanto,

$$v_1(t) = \left[ 12 + 8e^{-(3/4)t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t + 180^\circ\right) \right] u(t) \text{ V}$$

De modo semelhante,

$$V_2(s) = \frac{4(s^2 + 4s + 2)}{s(s^2 + \frac{3}{2}s + 1)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + \frac{3}{4} - j(\sqrt{7}/4)} + \frac{K_1^*}{s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)}$$

Determinando-se as constantes  $K_0$  e  $K_1$ , obtém-se

$$\left. \frac{4(s^2 + 4s + 2)}{s^2 + \frac{3}{2}s + 1} \right|_{s=0} = K_0$$

$$8 = K_0$$

e

$$\left. \frac{4(s^2 + 4s + 2)}{s[s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)]} \right|_{s=3/4 + j(\sqrt{7}/4)} = K_1$$

$$5,66 / -110,7^\circ = K_1$$

Logo,

$$v_2(t) = \left[ 8 + 11,32e^{-(3/4)t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t - 110,7^\circ\right) \right] u(t) \text{ V}$$

É interessante notar que como  $t \rightarrow \infty$ , as fontes no circuito parecem ser fontes dc. No caso dc, o indutor age como um curto-circuito e o capacitor age como um circuito aberto. Em tais condições, a tensão  $v_1(\infty) = 12 \text{ V}$ , e a tensão  $v_2(\infty) = 8 \text{ V}$ . Esse resultado é confirmado pelas equações para  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ .

### Exemplo 17.3

Considere a rede mostrada na Figura 17.4a. Desejamos determinar a tensão de saída  $v_o(t)$ . Ao abordar o problema, notamos duas coisas. Primeira, por causa de a fonte  $12u(t)$  estar conectada entre  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ , temos um supernó. Segunda, se  $v_2(t)$  é conhecido,  $v_o(t)$  pode ser facilmente obtido pela divisão de tensão. Dessa forma, usaremos análise nodal juntamente com divisão de tensão para obter uma solução.

A rede transformada é mostrada na Figura 17.4b. A LKC para o supernó resulta em

$$\frac{V_1(s)}{2} + V_1(s) \frac{s}{2} - 2I(s) + \frac{V_2(s)}{s+1} = 0$$

No entanto,

$$I(s) = \frac{V_1(s)}{2}$$

e

$$V_1(s) = V_2(s) - \frac{12}{s}$$

Substituindo-se as duas últimas equações na primeira, tem-se

$$\left[ V_2(s) - \frac{12}{s} \right] \frac{s+3}{2} + \frac{V_2(s)}{s+1} = 0$$

ou

$$V_2(s) = \frac{12(s+1)(s+3)}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

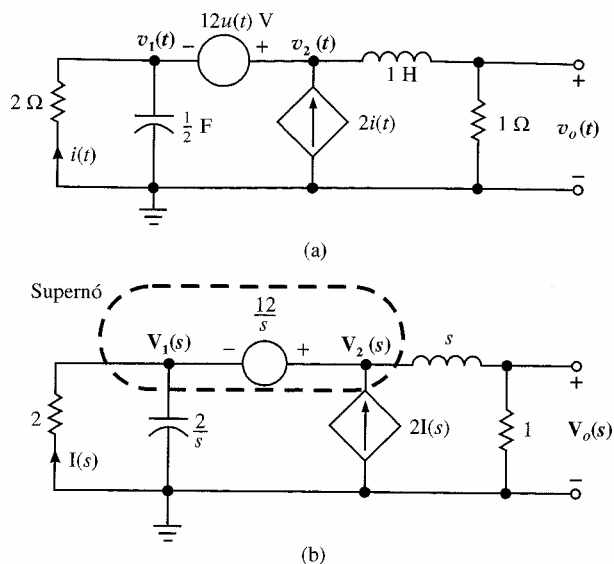


Figura 17.4 Circuitos usados no Exemplo 17.3.

Empregando-se um divisor de tensão, obtém-se

$$\begin{aligned} V_o(s) &= V_2(s) \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{12(s+3)}{s(s^2+4s+5)} \\ &= \frac{12(s+3)}{s(s+2-j1)(s+2+j1)} \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\frac{12(s+3)}{s(s+2-j1)(s+2+j1)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+2-j1} + \frac{K_1^*}{s+2+j1}$$

Determinando-se as constantes, obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{12(s+3)}{s^2+4s+5} \right|_{s=0} &= K_0 \\ \frac{36}{5} &= K_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left. \frac{12(s+3)}{s(s+2+j1)} \right|_{s=2+j1} &= K_1 \\ 3,79 \angle 161,57^\circ &= K_1 \end{aligned}$$

Logo,

$$v_o(t) = [7,2 + 7,58e^{-2t} \cos(t+161,57^\circ)]u(t) \text{ V}$$

#### Exemplo 17.4

Vamos examinar a rede da Figura 17.5a. Desejamos determinar a tensão de saída  $v_o(t)$ . Resolveremos tal problema usando equações de malha.

A rede transformada é mostrada na Figura 17.5b. A LKT para o laço da direita é

$$\frac{12}{s} - [\mathbf{I}_2(s) - \mathbf{I}_1(s)]s - \frac{\mathbf{I}_2(s)}{s} - 2\mathbf{I}_2(s) = 0$$

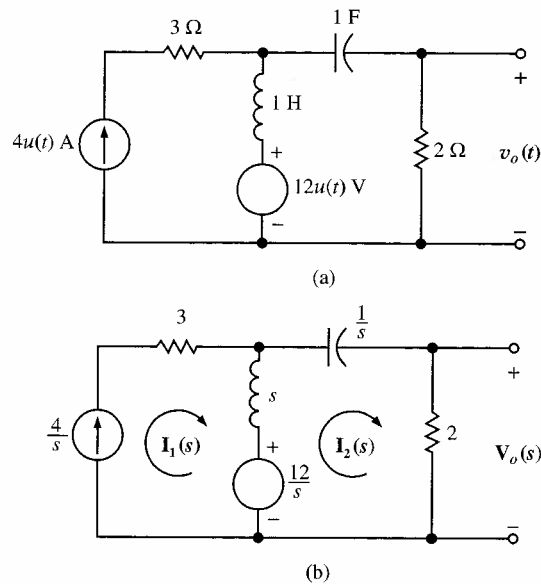


Figura 17.5 Circuitos usados no Exemplo 17.4.

No entanto,  $\mathbf{I}_1(s) = 4/s$ , e desse modo

$$\mathbf{I}_2(s) = \frac{4(s+3)}{(s+1)^2}$$

Logo,

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

$\mathbf{V}_o(s)$  pode ser escrito como

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{(s+1)^2} + \frac{K_{12}}{s+1}$$

Determinando-se os valores das constantes, obtém-se

$$\begin{aligned} 8(s+3) \Big|_{s=-1} &= K_{11} \\ 16 &= K_{11} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}[8(s+3)] \Big|_{s=-1} &= K_{12} \\ 8 &= K_{12} \end{aligned}$$

Portanto,

$$v_o(t) = [16te^{-t} + 8e^{-t}]\mu(t) \text{ V}$$

### Exemplo 17.5

Vamos determinar a tensão  $v_o(t)$  na rede da Figura 17.6a usando o teorema de Thévenin.

A rede transformada é mostrada na Figura 17.6b. A tensão do circuito aberto pode ser calculada a partir da rede da Figura 17.6c. Note que

$$\mathbf{V}_{oc}(s) + \mathbf{V}'_x(s) = -\frac{\mathbf{V}'_x(s)}{2}$$

Portanto,

$$\mathbf{V}'_x(s) = -2\mathbf{V}_{oc}(s)$$

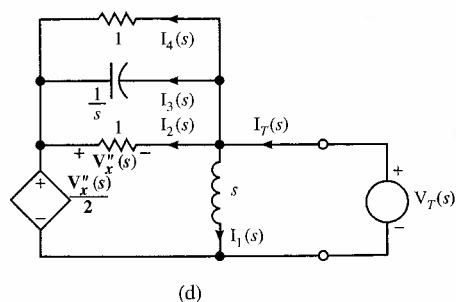
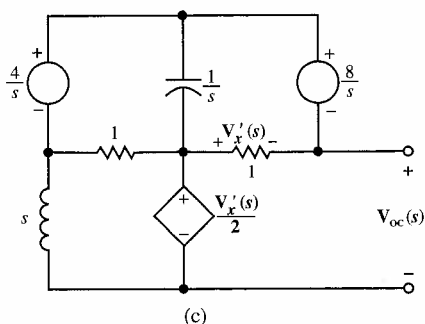
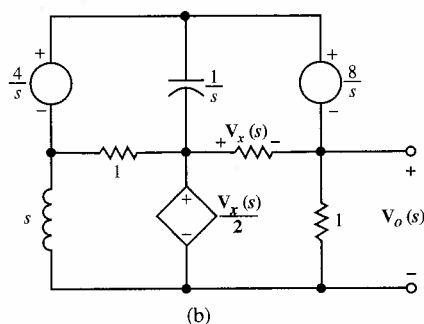
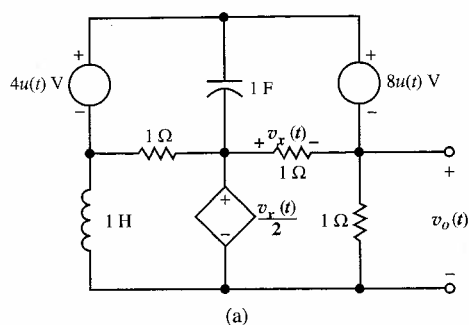


Figura 17.6 Circuitos usados no Exemplo 17.5.

A LKC no supernó, que inclui as duas fontes independentes, resulta em

$$\frac{V_{oc}(s) + (4/s)}{s} + \frac{V_{oc}(s) + (4/s) - \frac{1}{2}(-2V_{oc}(s))}{1} + \frac{V_{oc}(s) + (8/s) - \frac{1}{2}(-2V_{oc}(s))}{1/s} + \frac{V_{oc}(s) - \frac{1}{2}(-2V_{oc}(s))}{1} = 0$$

Resolvendo-se essa equação para  $V_{oc}(s)$ , tem-se

$$V_{oc}(s) \left( \frac{1}{s} + 2 + 2s + 2 \right) = - \left( \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s} + 8 \right)$$

ou

$$V_{oc}(s) = \frac{-(8s^2 + 4s + 4)}{s(2s^2 + 4s + 1)}$$

A fim de determinar a impedância equivalente de Thévenin, as fontes independentes são feitas iguais a zero e aplicamos uma fonte de teste  $V_T(s)$  nos terminais do circuito aberto, como mostrado na Figura 17.6d. A LKT resulta em

$$V_T(s) + V_x''(s) - \frac{V_x''(s)}{2} = 0$$

para que

$$-\frac{V_x''(s)}{2} = V_T(s)$$

Então

$$\begin{aligned} I_T(s) &= I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) + I_4(s) \\ &= \frac{V_T(s)}{s} + \frac{V_T(s) - (-V_T(s))}{1} + \frac{V_T(s) - (-V_T(s))}{1/s} + \frac{V_T(s) - (-V_T(s))}{1} \\ &= V_T(s) \left( \frac{1}{s} + 2 + 2s + 2 \right) \end{aligned}$$

E assim

$$Z_{Th}(s) = \frac{V_T(s)}{I_T(s)} = \frac{s}{2s^2 + 4s + 1}$$

Então

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{V_{oc}(s)}{Z_{Th}(s) + 1} \quad (1) \\ &= \frac{-(8s^2 + 4s + 4)}{s(2s^2 + 5s + 1)} \end{aligned}$$

Essa função pode ser expressa da forma

$$\frac{-2(2s^2 + 2s + 1)}{s(s^2 + \frac{5}{2}s + \frac{1}{2})} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + 0,22} + \frac{K_2}{s + 2,28}$$

Resolvendo-se para  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  da maneira ilustrada anteriormente, tem-se

$$\begin{aligned} K_0 &= -4 \\ K_1 &= 2,9 \end{aligned}$$

e

$$K_2 = -2,9$$

Portanto,

$$v_0(t) = [-4 + 2,9e^{-0,22t} - 2,9e^{-2,28t}] \mu(t)$$

### Exemplo 17.6

Desejamos obter os parâmetros Y para o quadripolo mostrado na Figura 17.7a. Usaremos então as equações de quadripolo para encontrar  $v_2(t)$  caso uma fonte de corrente  $1\mu(t)$  A seja conectada à entrada.

Os parâmetros Y para a rede da Figura 17.7a podem ser encontrados para os parâmetros Y das redes da Figura 17.7b e c. Conectando-se as redes da Figura 17.7b e c em paralelo, geramos a rede original da Figura 17.7a. Portanto, iremos calcular os parâmetros Y para os quadripolos da Figura 17.7b e c e somá-los para determinar os parâmetros Y para a rede da Figura 17.7a.

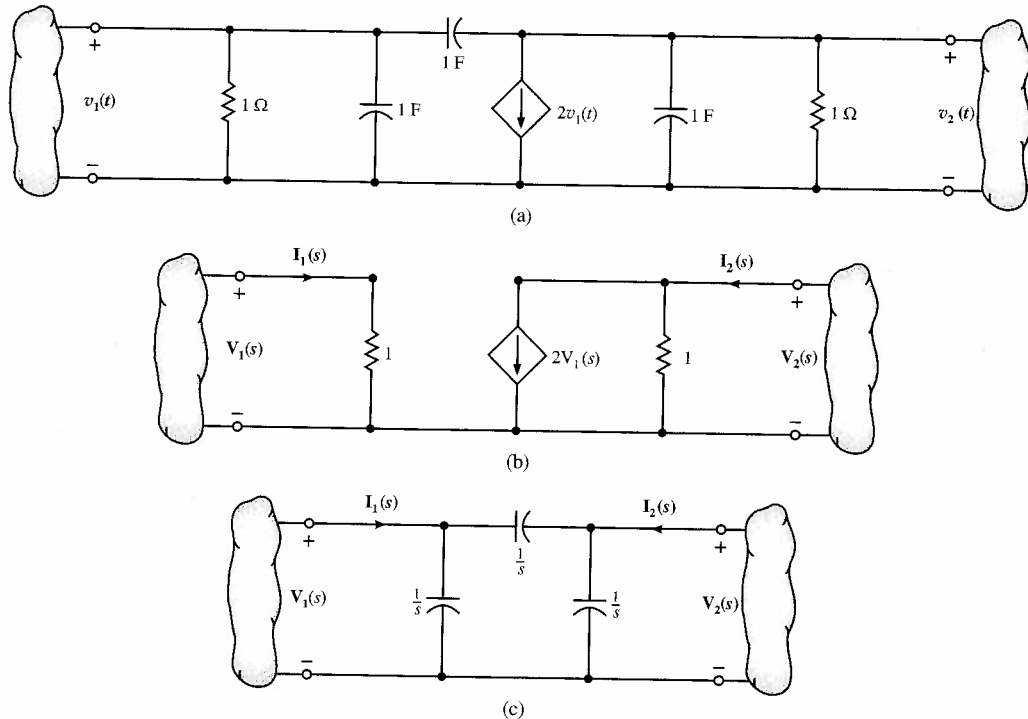


Figura 17.7 Circuitos usados no Exemplo 17.6.

Usando as técnicas da Seção 15.1, podemos verificar que os parâmetros para a rede na Figura 17.7b são

$$\begin{aligned} y_{11}(s) &= \left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = 1 \\ y_{12}(s) &= \left. \frac{I_1(s)}{V_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} = 0 \\ y_{21}(s) &= \left. \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = 2 \\ y_{22}(s) &= \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} = 1 \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{Y}_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De forma semelhante, achamos que os parâmetros  $\mathbf{Y}$  para a rede na Figura 17.7c são

$$\mathbf{Y}_2(s) = \begin{bmatrix} 2s & -s \\ -s & 2s \end{bmatrix}$$

Portanto, os parâmetros para a rede completa da Figura 17.7a são

$$\mathbf{Y}_T(s) = \begin{bmatrix} 1+2s & -s \\ 2-s & 1+2s \end{bmatrix}$$

Se uma fonte de corrente de  $1u(t)$  A é aplicada à entrada da rede da Figura 17.7a, as equações para a rede transformada são

$$\begin{bmatrix} 2s+1 & -s \\ 2-s & 2s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e assim

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{3s^2 + 6s + 1} \begin{bmatrix} 2s+1 & s \\ s-2 & 2s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{V}_2(s) = \frac{s-2}{s(3s^2 + 6s + 1)}$$

que pode ser escrita como

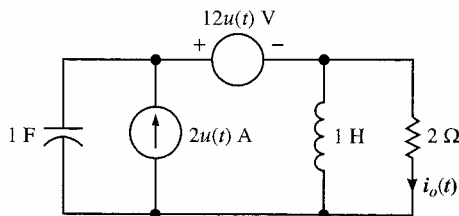
$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2(s) &= \frac{1}{3} \left[ \frac{s-2}{s(s+1,82)(s+0,18)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+1,82} + \frac{K_2}{s+0,18} \right) \end{aligned}$$

Seguindo o procedimento ilustrado anteriormente, chegamos a  $K_0 = -6$ ,  $K_1 = -1,28$  e  $K_2 = 7,38$ . Portanto,

$$\frac{1}{3} (-6 - 1,28e^{-1,82t} + 7,38e^{-0,18t})u(t)$$

## Exercícios

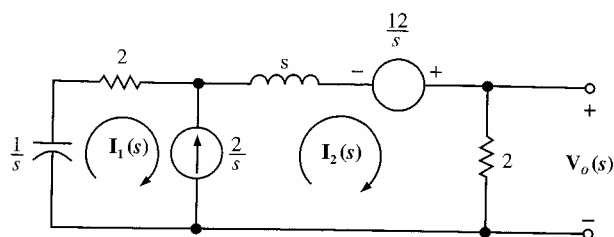
**E17.1** Determine  $i_o(t)$  na rede da Figura E17.1 usando equações nodais.



**Figura E17.1**

**Resp.:**  $i_o(t) = 6,53e^{-t/4} \cos[(\sqrt{15}/4)t - 156,72^\circ]u(t)$  A.

**E17.2** Determine  $v_o(t)$  na rede da Figura E17.2 usando equações de laço.



**Figura E17.2**

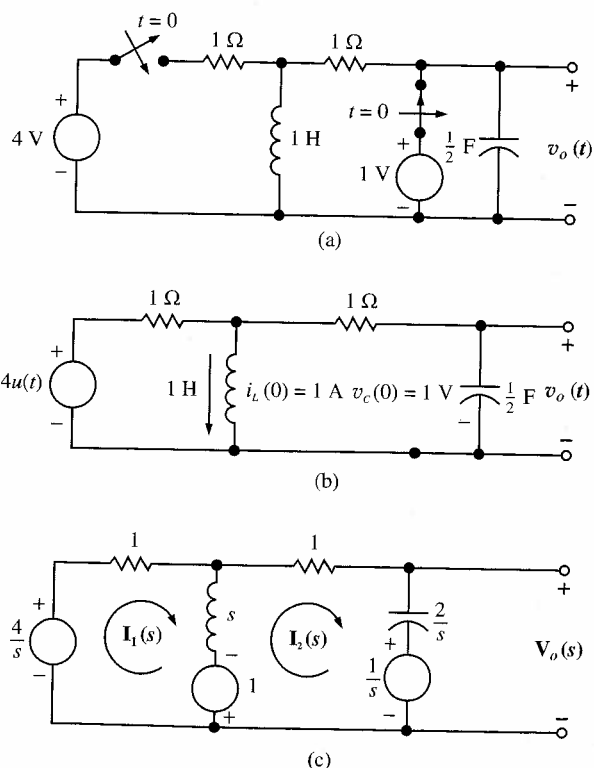
**Resp.:**  $v_o(t) = (4 - 8,93e^{-3,73t} + 4,93e^{-0,27t})u(t)$  V.

**E17.3** Resolva o Exercício E17.2 usando o teorema de Thévenin.

Vamos ilustrar agora o uso da transformada de Laplace na análise transiente de circuitos. Vamos analisar redes tais como as consideradas nos capítulos 7 e 8. O procedimento seguido será primeiro desenvolver as condições iniciais para os capacitores e indutores na rede, e então empregar os modelos dos elementos que foram especificados no começo deste capítulo juntamente com técnicas de análise de circuitos para obter uma solução. Os exemplos a seguir demonstram tal procedimento.

### Exemplo 17.7

Vamos analisar nesse exemplo o circuito da Figura 17.8a. No instante  $t = 0$ , a tensão inicial sobre o capacitor é 1 V, e a corrente inicial através do indutor é 1 A. O circuito para  $t > 0$  é mostrado na Figura 17.8b com as condições iniciais. A rede transformada é mostrada na Figura 17.8c.



**Figura 17.8** Circuitos empregados no Exemplo 17.7.



As equações de malha para a rede transformada são

$$\begin{aligned}(s+1)\mathbf{I}_1(s) - s\mathbf{I}_2(s) &= \frac{4}{s} + 1 \\ -s\mathbf{I}_1(s) + \left(s + \frac{2}{s} + 1\right)\mathbf{I}_2(s) &= \frac{-1}{s} - 1\end{aligned}$$

que podem ser escritas em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} s+1 \\ -s \end{bmatrix} \frac{1}{s} \begin{bmatrix} s^2+s+2 \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s} \\ \frac{-(s+1)}{s} \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se para as correntes, obtemos

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s+1 & -s \\ -s & s^2+s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s} \\ \frac{-(s+1)}{s} \end{bmatrix} \\ &= \frac{s}{2s^2+3s+2} \begin{bmatrix} \frac{s^2+s+2}{s} & s \\ s & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s} \\ \frac{-(s+1)}{s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4s^2+6s+8}{s(2s^2+3s+2)} \\ \frac{2s-1}{2s^2+3s+2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

A tensão de saída é então

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_o(s) &= \frac{2}{s}\mathbf{I}_2(s) + \frac{1}{s} \\ &= \frac{2}{s} \left( \frac{2s-1}{2s^2+3s+2} \right) + \frac{1}{s} \\ &= \frac{s + \frac{7}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + 1}\end{aligned}$$

Essa função pode ser escrita em uma expansão em frações parciais como

$$\frac{s + \frac{7}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + 1} = \frac{K_1}{s + \frac{3}{4} - j(\sqrt{7}/4)} + \frac{K_1^*}{s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)}$$

Determinando-se as constantes, obtém-se

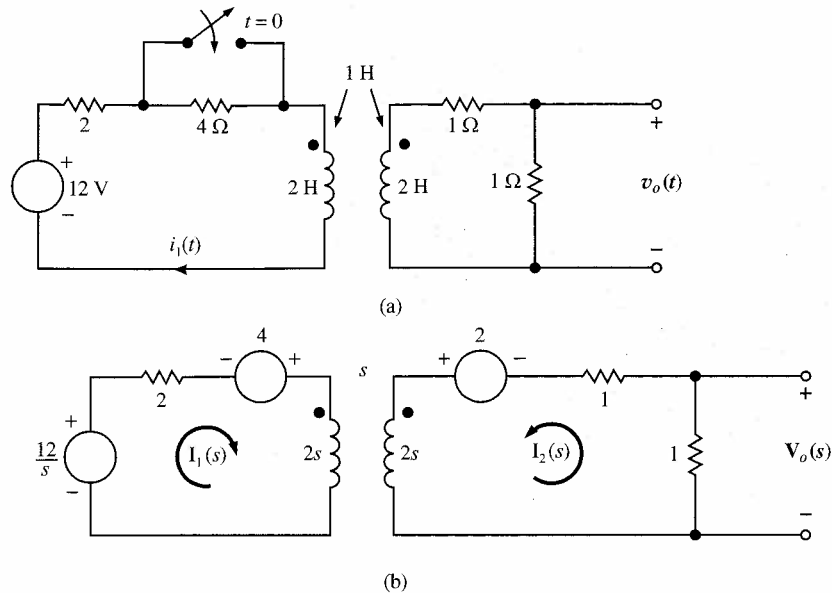
$$\begin{aligned}\left. \frac{s + \frac{7}{2}}{s + \frac{3}{4} + j(\sqrt{7}/4)} \right|_{s = -(3/4) + j(\sqrt{7}/4)} &= K_1 \\ 2,14 \angle -76,5^\circ &= K_1\end{aligned}$$

Portanto,

$$v_o(t) = \left[ 4,29e^{-(3/4)t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t - 76,5^\circ\right) \right] u(t) \text{ V}$$

**Exemplo 17.8**

Desejamos determinar a tensão de saída  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura 17.9a.



**Figura 17.9** Circuitos usados no Exemplo 17.8.

No estado estacionário anterior a  $t = 0$ , a corrente  $i_1(0)$  é

$$i_1(0) = \frac{12}{2+4} = 2 \text{ A}$$

Dessa forma

$$L_1 i_1(0) = 4$$

$$M i_1(0) = 2$$

Utilizando-se tais dados, obtemos a rede transformada, como mostrado na Figura 17.9b. As equações de malha para essa rede são

$$(2s+2)I_1(s) + sI_2(s) = \frac{12}{s} + 4$$

$$sI_1(s) + (2s+2)I_2(s) = 2$$

Resolvendo-se essas equações para as correntes de malha, obtemos

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{3s^2 + 8s + 4} \begin{bmatrix} 2s+2 & -s \\ -s & 2s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4s+12}{s} \\ 2 \end{bmatrix}$$

que produz

$$I_2(s) = \frac{-8}{3s^2 + 8s + 4}$$

e

$$V_o(s) = -1I_2(s) = \frac{\frac{8}{3}}{s^2 + \frac{8}{3}s + \frac{4}{3}}$$

Essa equação pode ser escrita como

$$\frac{\frac{8}{3}}{s^2 + \frac{8}{3}s + \frac{4}{3}} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+\frac{2}{3}}$$

Resolvendo-se para as constantes, obtemos  $K_1 = -2$  e  $K_2 = 2$ . Portanto,

$$v_o(t) = 2(e^{-(2/3)t} - e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

### Exercícios

**E17.4** Resolva o Problema 7.1 usando a transformada de Laplace.

**Resp.:**  $v_c(t) = 4e^{-1,2t} \text{ V}$ .

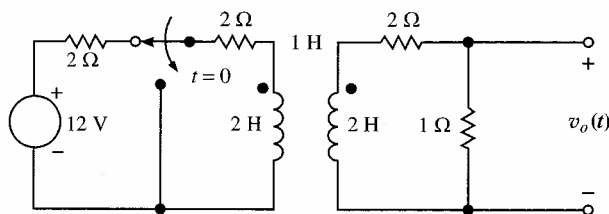
**E17.5** Resolva o Exercício E7.6 usando a transformada de Laplace.

**Resp.:**  $v_o(t) = 24/5 + 1/5 e^{-(5/8)t} \text{ V}$ .

**E17.6** Resolva o Exercício E7.7 usando a transformada de Laplace.

**Resp.:**  $v_o(t) = 6 - 10/3 e^{-2t} \text{ V}$ .

**E17.7** Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura E17.7.



**Figura E17.7**

**Resp.:**  $v_o(t) = 1,13(e^{-2,55t} - e^{-0,78t})u(t) \text{ V}$ .

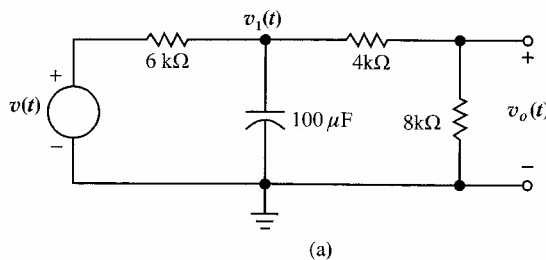
No Capítulo 16, ilustramos técnicas para determinar a transformada de Laplace de uma forma de onda complicada. Usando tais métodos em conjunto com nossas técnicas de análise, podemos obter a resposta de uma rede para qualquer número de funções de entrada incomuns. Os exemplos a seguir foram escolhidos para demonstrar as técnicas.

### Exemplo 17.9

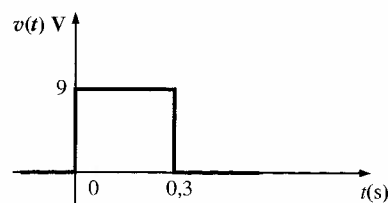
Neste exemplo, analisamos o circuito do Exemplo 7.7 usando a transformada de Laplace. O circuito e a entrada foram redesenhados na Figura 17.10a. Desejamos achar a expressão para a tensão de saída  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

A LKC pode ser usada para calcular a tensão nodal  $V_1(s)$  e então um simples divisor de tensão pode ser empregado para achar  $V_o(s)$ . A LKC nos dá

$$\frac{V_1(s) - V(s)}{6.000} + \frac{V_1(s)}{1/10^{-4}s} + \frac{V_1(s)}{12.000} = 0$$



(a)



(b)

**Figura 17.10** Rede (a) e entrada (b) usadas no Exemplo 17.9.

Resolvendo-se essa equação para  $V_1(s)$ , obtemos

$$V_1(s) = \frac{V(s)}{6.000(10^{-4}s + 2,5 \times 10^{-4})}$$

Note que

$$V_1(s) = \frac{8.000}{4.000 + 8.000} V_1(s)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \frac{2V(s)}{1,8s + 4,5} \\ &= \frac{1}{0,9} \frac{V(s)}{s + 2,5} \end{aligned}$$

A expressão para  $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ , onde  $v(t)$  é como mostrado na Figura 17.10b, é

$$V(s) = 9 \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-0,3s}}{s} \right)$$

Substituindo-se essa equação na expressão para  $V_0(s)$ , tem-se

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \left( \frac{1}{0,9} \right) \frac{1}{s + 2,5} (9) \frac{1 - e^{-0,3s}}{s} \\ &= \frac{10(1 - e^{-0,3s})}{s(s + 2,5)} \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{10}{s(s + 2,5)} = \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 2,5}$$

então

$$V_0(s) = \left( \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 2,5} \right) (1 - e^{-0,3s})$$

e portanto

$$v_o(t) = (4 - 4e^{-2,5t})u(t) - (4 - 4e^{-2,5(t-0,3)})u(t-0,3) \text{ V}$$

Essa expressão é obviamente idêntica à obtida no Exemplo 7.7.  $\square$

### Exemplo 17.10

Suponhamos que a entrada da rede do Exemplo 17.9 seja a mostrada na Figura 17.11. Vamos determinar a saída da rede para essa entrada.

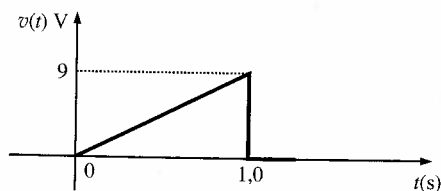


Figura 17.11 Entrada para o problema do Exemplo 17.10.

Como mostrado no Exemplo 16.14, a transformada de Laplace dessa forma de onda, chamada de dente-de-serra, é

$$V(s) = \frac{9}{s^2} [1 - (1+s)e^{-s}]$$

e dessa forma a saída é

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \left(\frac{1}{0,9}\right) \frac{1}{s+2,5} \left(\frac{9}{s^2}\right) [1 - (1+s)e^{-s}] \\ &= \frac{10}{s^2(s+2,5)} [1 - (1+s)e^{-s}] \\ &= \frac{10}{s^2(s+2,5)} - \frac{10(s+1)}{s^2(s+2,5)} e^{-s} \end{aligned}$$

Expandindo cada um dos termos em frações parciais, obtém-se

$$\frac{10}{s^2(s+2,5)} = \frac{4}{s^2} - \frac{1,6}{s} + \frac{1,6}{s+2,5}$$

e

$$\frac{10(s+1)}{s^2(s+2,5)} = \frac{4}{s^2} - \frac{2,4}{s} - \frac{2,4}{s+2,5}$$

Portanto,

$$v_o(t) = (4t - 1,6 + 1,6e^{-2,5t})u(t) - [4(t-1) + 2,4 - 2,4e^{-2,5(t-1)}]u(t-1) \text{ V}$$

## Exercícios

**E17.8** Determine a expressão para a tensão  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura E17.8a, caso a entrada seja a mostrada na Figura E17.8b.

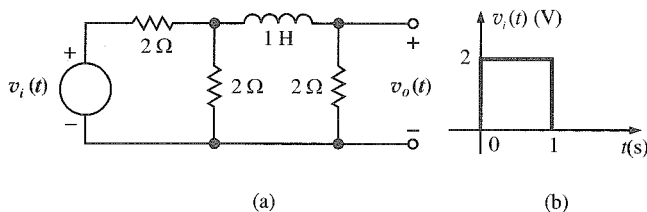


Figura E17.8

**Resp.:**  $v_o(t) = \frac{2}{3} [(1 - e^{-3t})u(t) - (1 - e^{-3(t-1)})u(t-1)] \text{ V}.$

**E17.9** Determine a expressão para a tensão  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura E17.9a, caso a entrada seja a mostrada na Figura E17.9b.

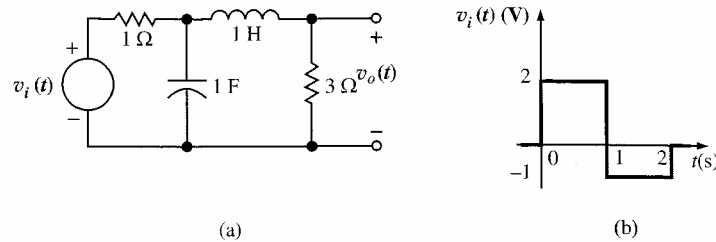


Figura E17.9

**Resp.:** 
$$v_o(t) = 2\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{3}{2}te^{-2t}\right)u(t) - 3\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-2(t-1)} - \frac{3}{2}(t-1)e^{-2(t-1)}\right]u(t-1) +$$

$$\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-2(t-2)} - \frac{3}{2}(t-2)e^{-2(t-2)}\right]u(t-2) \text{ V.}$$

### 17.3 Função de Transferência

No Capítulo 14, introduzimos o conceito de função de rede ou transferência. Tal função nada mais é do que a razão de alguma variável de saída por uma variável de entrada. Se ambas as variáveis são tensões, a função de transferência é um ganho de tensão. Se ambas as variáveis são correntes, a função de transferência é um ganho de corrente. Se uma variável é uma tensão e a outra é uma corrente, a função de transferência se torna uma impedância ou admitância de transferência.

Ao se derivar a função de transferência, todas as condições iniciais são feitas iguais a zero. Além disso, se a saída é gerada por mais de uma fonte de entrada na rede, o princípio da superposição pode ser empregado em conjunção com a função de transferência para cada fonte.

Para apresentar tal conceito de uma maneira mais formal, vamos assumir que o relacionamento entrada/saída para um circuito linear seja

$$b_n \frac{d^n y_o(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y_o(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy_o(t)}{dt} + b_0 y_o(t) = a_m \frac{d^m x_i(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x_i(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_i(t)}{dt} + a_0 x_i(t)$$

Se todas as condições iniciais são zero, a transformada da equação é

$$(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0) Y_o(s) = (a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) X_i(s)$$

ou

$$\frac{Y_o(s)}{X_i(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

Essa razão de  $Y_o(s)$  por  $X_i(s)$  é chamada de *função da rede* ou *função de transferência*, que denotamos como  $H(s)$ ; isto é,

$$\frac{Y_o(s)}{X_i(s)} = H(s)$$

ou

$$Y_o(s) = H(s) X_i(s) \quad (17.15)$$

Essa equação afirma que a resposta de saída  $\mathbf{Y}_o(s)$  é igual à função de rede multiplicada pela entrada  $\mathbf{X}_i(s)$ . Note que se  $\mathbf{X}_i(t) = \delta(t)$  e portanto  $\mathbf{X}_i(s) = 1$ , a resposta do impulso é igual à transformada inversa de Laplace da função da rede. Este é um conceito extremamente importante porque ilustra que se conhecermos a resposta do impulso de uma rede, podemos conhecer a resposta devida a alguma outra função forçante usando a Equação 17.15.

A esta altura, é interessante revisar rapidamente a resposta natural de redes de primeira e segunda ordem. Demonstramos no Capítulo 7 que, se somente um único elemento for apresentado, a resposta natural de uma rede a uma condição inicial é sempre da forma

$$x(t) = X_0 e^{-t/T_c}$$

onde  $x(t)$  pode ser  $v(t)$  ou  $i(t)$ ,  $X_0$  é o valor inicial de  $x(t)$  e  $T_c$  é a constante de tempo da rede.

Como ilustrado no Capítulo 8, a resposta natural da rede de segunda ordem é controlada pelas raízes da equação característica, que é da forma

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

onde  $\zeta$  é o *quociente de amortecimento* e  $\omega_0$  é a *frequência natural não-amortecida*. Esses dois fatores-chave,  $\zeta$  e  $\omega_0$ , controlam a resposta, e existem três casos básicos de interesse.

**Caso 1,  $\zeta > 1$ : Rede Sobreamortecida.** As raízes da equação característica são  $s_1, s_2 = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$ , e portanto a resposta da rede é da forma

$$x(t) = K_1 e^{-(\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1})t} + K_2 e^{-(\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

**Caso 2,  $\zeta < 1$ : Rede Subamortecida.** As raízes da equação característica são  $s_1, s_2 = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$ , e portanto a resposta da rede é da forma

$$x(t) = K e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$$

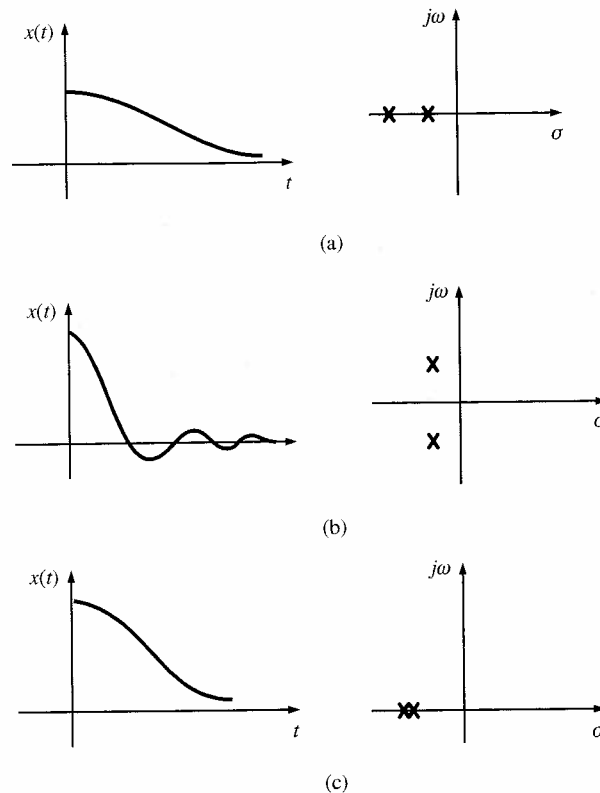
**Caso 3,  $\zeta = 1$ : Rede Criticamente Amortecida.** As raízes da equação característica são  $s_1, s_2 = -\omega_0$  e, assim, a resposta da rede é da forma

$$x(t) = K_1 t e^{-\omega_0 t} + K_2 e^{-\omega_0 t}$$

É muito importante que o leitor perceba que a equação característica é o determinante da resposta da função  $\mathbf{X}(s)$ , e as raízes dessa equação, que são os pólos da rede, determinam a forma da resposta natural da rede.

Um método conveniente para se mostrar os zeros e pólos da rede em modo gráfico é o uso do diagrama de pólos-zero. Um diagrama de pólos e zeros de uma função pode ser feito usando-se o que é normalmente chamado de *plano complexo* ou *planos*. No plano complexo, a abscissa é  $s$  e a ordenada é  $j\omega$ . Zeros são representados por 0's e pólos são representados por x's. Apesar de estarmos preocupados apenas com os pólos e zeros finitos da função de transferência, devemos ressaltar que uma função racional deve ter o mesmo número de pólos e de zeros. Portanto, se  $n > m$ , existem  $n - m$  zeros no infinito, se  $n < m$ , existem  $m - n$  pólos no infinito. Um engenheiro de sistemas pode dizer muito a respeito da operação de uma rede ou sistema simplesmente examinando seu diagrama de pólos e zeros.

A fim de relacionar a resposta natural de uma rede aos seus pólos, ilustramos na Figura 17.12 a correspondência para os três casos: sobreamortecido, subamortecido e criticamente amortecido. Note que se os pólos da rede são reais e diferentes, a resposta é vagarosa, e portanto  $x(t)$  leva um longo tempo para chegar a zero. Se os pólos da rede são complexos conjugados, a resposta é rápida; no entanto, ela apresenta uma sobre-elevação antes de se acomodar no valor final. A linha divisória entre os casos sobreamortecido e subamortecido é o caso criticamente amortecido em que as raízes são reais e iguais. Nesse caso, a resposta transiente é a mais rápida possível sem exibir sobre-elevação.



**Figura 17.12** Resposta natural de uma rede de segunda ordem juntamente com as localizações dos pólos da rede para três casos: (a) sobreamortecido; (b) subamortecido; (c) criticamente amortecido.

### Exemplo 17.11

Se a resposta ao impulso de uma rede é  $h(t) = e^{-t}$ , vamos determinar a resposta  $v_o(t)$  para uma entrada  $v_i(t) = 10e^{-2t}u(t)$  V.

As variáveis transformadas são

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\mathbf{V}_i(s) = \frac{10}{s+2}$$

Logo,

$$\mathbf{V}_o(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_i(s)$$

$$= \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

e assim

$$v_o(t) = 10(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

A importância da função de transferência baseia-se no fato de que ela dá ao engenheiro de sistemas bastante informação a respeito das propriedades dinâmicas do sistema que são caracterizadas pelos seus pólos.

### Exemplo 17.12

Vamos derivar a função de transferência  $\mathbf{V}_o(s)/\mathbf{V}_i(s)$  para a rede da Figura 17.13a.

A variável de saída é a tensão sobre um capacitor variável e a tensão de entrada é um degrau unitário. A rede transformada é mostrada na Figura 17.13b. As equações de malha para a rede são



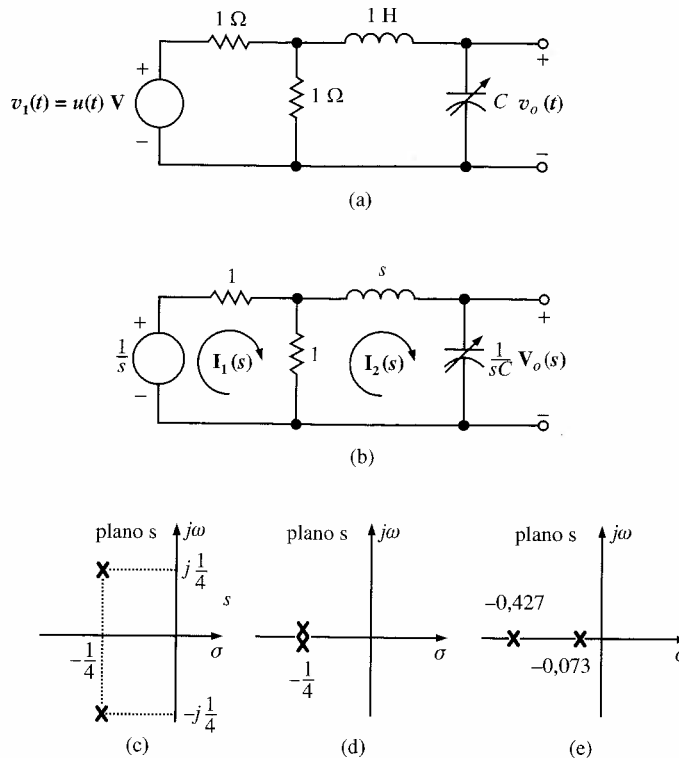


Figura 17.13 Diagrama de redes e representação de pólos e zeros usados no Exemplo 17.12.

$$2\mathbf{I}_1(s) - \mathbf{I}_2(s) = \mathbf{V}_i(s)$$

$$-\mathbf{I}_1(s) + \left(s + \frac{1}{sC} + 1\right)\mathbf{I}_2(s) = 0$$

e a equação de saída é

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{1}{sC} \mathbf{I}_2(s)$$

A partir dessas equações, obtém-se a função de transferência que é

$$\frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} = \frac{1/2C}{s^2 + \frac{1}{2}s + 1/C}$$

Uma vez que a função de transferência é dependente do valor do capacitor, vamos examinar a função de transferência e a resposta da saída para os três valores do capacitor.

(a)  $C = 8 \text{ F}$ :

$$\frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} = \frac{\frac{1}{16}}{(s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{8})}$$

$$= \frac{\frac{1}{16}}{(s + \frac{1}{4} - j\frac{1}{4})(s + \frac{1}{4} + j\frac{1}{4})}$$

A resposta da saída é

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{\frac{1}{16}}{(s + \frac{1}{4} - j\frac{1}{4})(s + \frac{1}{4} + j\frac{1}{4})}$$

Como ilustrado no Capítulo 8, os pólos da função de transferência, que são raízes da equação característica, são complexos conjugados, como mostrado na Figura 17.13c, e portanto a resposta da saída estará *subamortecida*. A resposta da saída como uma função do tempo é

$$v_o(t) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t/4} \cos\left(\frac{t}{4} + 135^\circ\right) \right] u(t) \text{ V}$$

Note que, para valores grandes de tempo, as oscilações transientes, representadas pelo segundo termo na resposta, tornam-se irrelevantes e a saída se acomoda no valor de  $\frac{1}{2}$  V. Isto pode também ser visto diretamente do circuito uma vez que, para valores grandes de tempo, a entrada se parece com uma fonte dc, o indutor age como um curto-circuito, o capacitor age como um circuito aberto e os resistores formam um divisor de tensão.

(b)  $C = 16 \text{ F}$ :

$$\begin{aligned} \frac{V_o(s)}{V_i(s)} &= \frac{\frac{1}{32}}{(s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{16})} \\ &= \frac{\frac{1}{32}}{(s + \frac{1}{4})^2} \end{aligned}$$

A resposta da saída é

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{32}}{s(s + \frac{1}{4})^2}$$

Uma vez que os pólos da função de transferência são reais e iguais, como mostrado na Figura 17.13d, a resposta da saída será *criticamente amortecida*.  $v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_o(s)]$  é

$$v_o(t) = \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{t}{8} + \frac{1}{2} \right) e^{-t/4} \right] u(t) \text{ V}$$

(c)  $C = 32 \text{ F}$ :

$$\begin{aligned} \frac{V_o(s)}{V_i(s)} &= \frac{\frac{1}{64}}{s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{32}} \\ &= \frac{\frac{1}{64}}{(s + 0,427)(s + 0,073)} \end{aligned}$$

A resposta da saída é

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{64}}{s(s + 0,427)(s + 0,073)}$$

Os pólos da função de transferência são reais e diferentes, como mostrado na Figura 17.13e, e portanto, a resposta da saída será *sobreamortecida*. A resposta como uma função do tempo é

$$v_o(t) = (0,5 + 0,103e^{-0,427t} - 0,603e^{-0,073t}) u(t) \text{ V}$$

Apesar de os valores selecionados para os parâmetros da rede não serem muito práticos, o leitor deve ser lembrado que as mudanças de escala por magnitude ou frequência, como colocado no Capítulo 14, podem ser aplicadas aqui.

### Exemplo 17.13

Para a rede da Figura 17.14a, vamos calcular (a) a função de transferência, (b) o tipo de amortecimento exibido pela rede e (c) a resposta ao degrau unitário.

Lembre-se que a tensão sobre os terminais de entrada é zero e portanto a LKC no nó marcado  $V_1(s)$  na Figura 17.14b produz a seguinte equação

$$\frac{V_s(s) - V_1(s)}{1} = sV_1(s) + \frac{V_1(s) - V_o(s)}{1} + \frac{V_1(s)}{1}$$

Uma vez que a corrente no terminal negativo de entrada do amp-op é zero, a LKC requer que

$$sV_o(s) = -\frac{V_1(s)}{1}$$

Combinando-se as duas equações, tem-se a função de transferência

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{-1}{s^2 + 3s + 1}$$

que pode ser expressa na forma

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{-1}{(s + 2,62)(s + 0,38)}$$

Já que as raízes são reais e distintas, a resposta ao degrau da rede será sobreamortecida. A resposta ao degrau é

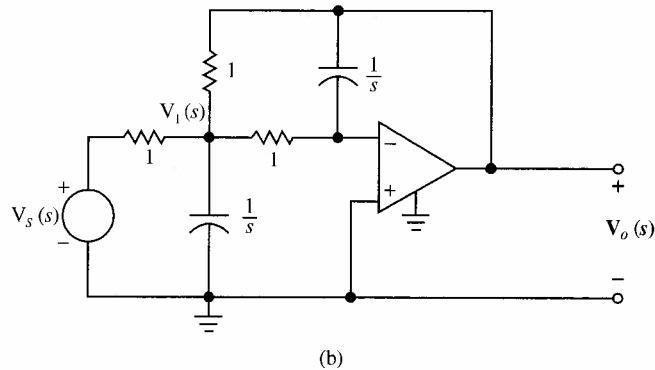
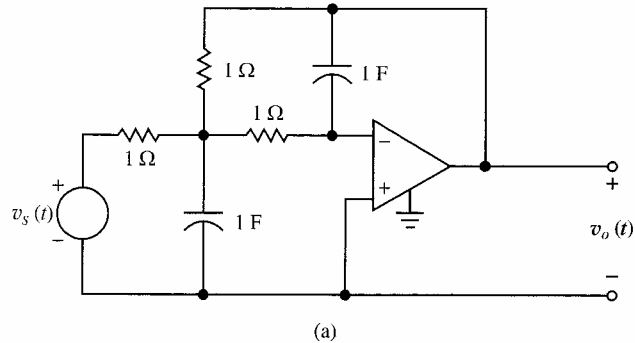


Figura 17.14 Circuitos usados no Exemplo 17.13.

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{-1}{s(s + 2,62)(s + 0,38)} \\ &= \frac{-1}{s} + \frac{-0,17}{s + 2,62} + \frac{1,17}{s + 0,38} \end{aligned}$$

Portanto,

$$v_o(t) = (-1 - 0,17e^{-2,62t} + 1,17e^{-0,38t})u(t) \text{ V}$$

### Exercícios

**E17.10** Se a resposta ao impulso unitário de uma rede é  $\frac{10}{9}(e^{-t} - e^{-10t})$ , determine a resposta ao degrau unitário.

**Resp.:**  $x(t) = (1 - \frac{10}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{-10t})u(t)$ .

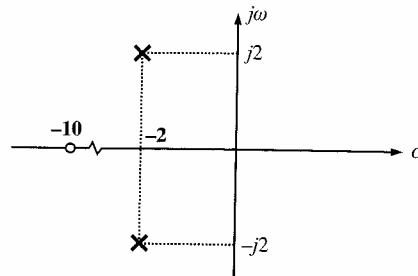
**E17.11** A função de transferência para uma rede é

$$H(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 4s + 8}$$

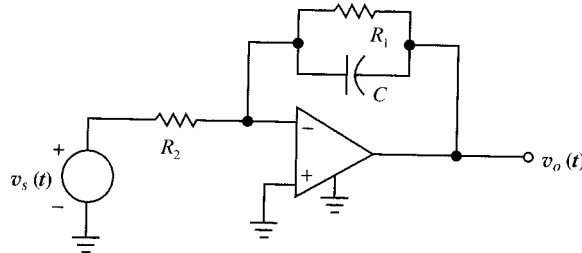
Determine o diagrama de pólos e zeros de  $H(s)$ , o tipo de amortecimento apresentado pela rede e a resposta ao degrau unitário da rede.

**Resp.:** A rede é subamortecida;

$$x(t) = \left[ \frac{10}{8} + 1,46e^{-2t} \cos(2t - 210,96^\circ) \right] u(t).$$



**E17.12** Determine a função de transferência da rede da Figura E17.12.



**Figura E17.12**

**Resp.:** 
$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{-1/R_2 C}{s + 1/R_1 C}$$

Da discussão anterior, lembramos que se uma rede de segunda ordem é subamortecida, a equação característica da rede é da forma

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

e as raízes dessa equação, que são os pólos da rede, são da forma

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

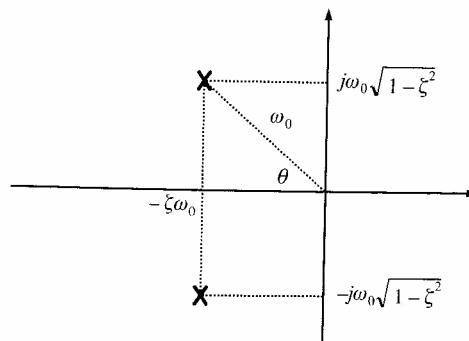
As raízes  $s_1$  e  $s_2$ , quando representadas no plano  $s$ , geralmente aparecem como mostrado na Figura 17.15, onde

$\zeta$  = quociente de amortecimento

$\omega_0$  = frequência natural não-amortecida

e como mostrado na Figura 17.15,

$$\zeta = \cos \theta$$

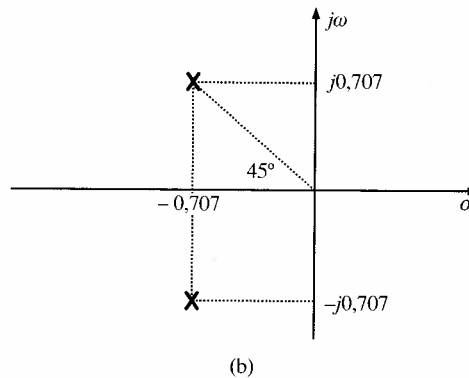
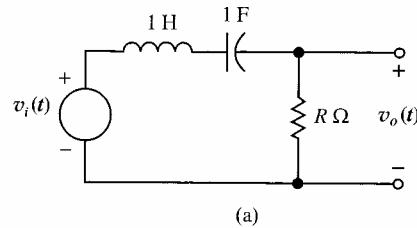


**Figura 17.15** Localização dos pólos de uma rede de segunda ordem subamortecida.

É importante que o leitor note que o quociente de amortecimento e a frequência natural não-amortecida são exatamente as mesmas grandezas que as empregadas no Capítulo 14, quando determinamos a resposta da frequência de uma rede. Vemos aqui que estas são as mesmas grandezas que caracterizam a resposta transiente da rede.

### Exemplo 17.14

Desejamos selecionar  $R$  de modo tal que a rede da Figura 17.16a tenha um quociente de amortecimento de  $\zeta = 0,707$ . Vamos determinar o valor de  $R$  necessário para fornecer tal resposta, representar os pólos e zeros da função de transferência da rede no plano  $s$  e determinar  $v_o(t)$  para  $t > 0$ , caso  $v_i(t) = u(t)$  V.



**Figura 17.16** Localização de pólos e rede para o problema do Exemplo 17.14.

A função de transferência da rede é

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Rs}{s^2 + Rs + 1}$$

A equação característica é da forma  $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ , onde  $\omega_0 = 1$  e  $2\zeta\omega_0 = R$ . Para  $\zeta = 0,707$ ,  $R = 1,414$ . O diagrama de pólos e zeros para a função de transferência é mostrado na Figura 17.16b.

A saída  $V_o(s)$  para a entrada degrau unitário é

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{1,414s}{s(s+0,707-j0,707)(s+0,707+j0,707)} \\ &= \frac{K_1}{s+0,707-j0,707} + \frac{K_1^*}{s+0,707+j0,707} \\ &= \frac{1/-90^\circ}{s+0,707-j0,707} + \frac{1/+90^\circ}{s+0,707+j0,707} \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$v_o(t) = (2e^{-0,707t} \cos(0,707t - 90^\circ))\mu(t) \text{ V}$$

## 17.4 Resposta em Estado Estacionário

Demonstramos, na Seção 17.2, usando uma variedade de exemplos, a grande utilidade da transformada de Laplace para determinar a resposta de uma rede. Tal resposta é composta de termos transientes que desaparecem quando  $t \rightarrow \infty$  e termos em estado estacionário que estão sempre presentes. Vamos examinar um método para determinar a resposta em estado estacionário de uma rede.

Nos exemplos anteriores, a resposta da rede era

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{X}(s) \quad (17.16)$$

onde  $\mathbf{Y}(s)$  é a saída ou resposta,  $\mathbf{X}(s)$  é a entrada ou função forçante e  $\mathbf{H}(s)$  é a função da rede ou função de transferência definida na Seção 14.1. A porção transiente da resposta  $\mathbf{Y}(s)$  resulta dos pólos de  $\mathbf{H}(s)$  e a porção correspondente ao estado estacionário da resposta resulta dos pólos da função de entrada ou forçante.

Fazendo um paralelo direto com a resposta senoidal de uma rede, como mostrado na Seção 9.2, assumimos que a função forçante é da forma

$$x(t) = X_M e^{j\omega_0 t} \quad (17.17)$$

que, pela identidade de Euler, pode ser escrita como

$$x(t) = X_M \cos \omega_0 t + jX_M \sin \omega_0 t \quad (17.18)$$

A transformada de Laplace da Equação 17.17 é

$$\mathbf{X}(s) = \frac{X_M}{s - j\omega_0} \quad (17.19)$$

e portanto

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s) \left( \frac{X_M}{s - j\omega_0} \right) \quad (17.20)$$

Assumimos que  $\mathbf{H}(s)$  não possui nenhum pólo da forma  $(s - j\omega_k)$ . Se, no entanto, este for o caso, encontramos dificuldade em definir a resposta em regime permanente.

Fazendo-se uma expansão em frações parciais da Equação 17.20, tem-se

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{X_M \mathbf{H}(j\omega_0)}{s - j\omega_0} + \text{termos que aparecem devido aos pólos de } \mathbf{H}(s) \quad (17.21)$$

O primeiro termo à direita do sinal de igual pode ser expresso como

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{X_M |\mathbf{H}(j\omega_0)| e^{j\phi(j\omega_0)}}{s - j\omega_0} + \dots \quad (17.22)$$

uma vez que  $\mathbf{H}(j\omega_0)$  é um valor complexo com uma magnitude e fase que são uma função de  $j\omega_0$ .

Fazendo-se a transformada inversa da Equação 17.22, obtém-se

$$\begin{aligned} y(t) &= X_M |\mathbf{H}(j\omega_0)| e^{j\omega_0 t} e^{j\phi(j\omega_0)} + \dots \\ &= X_M |\mathbf{H}(j\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \phi(j\omega_0))} + \dots \end{aligned} \quad (17.23)$$

e, assim, a resposta em estado estacionário é

$$y_{ss}(t) = X_M |\mathbf{H}(j\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \phi(j\omega_0))} \quad (17.24)$$

Uma vez que a função forçante é  $X_M \cos \omega_0 t$ , que é a parte real de  $X_M e^{j\omega_0 t}$ , a resposta em estado estacionário é a parte real da Equação 17.24.

$$y_{ss}(t) = X_M |\mathbf{H}(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \phi(j\omega_0)] \quad (17.25)$$

Em geral, a função forçante pode ter um ângulo de fase  $\theta$ . Nesse caso,  $\theta$  é simplesmente somado a  $\phi(j\omega_0)$ , e assim a fase resultante da resposta será  $\phi(j\omega_0) + \theta$ .

**Exemplo 17.15**

Para o circuito da Figura 17.17a, desejamos determinar a tensão em regime permanente  $v_{oss}(t)$  para  $t > 0$  se as condições iniciais forem nulas.

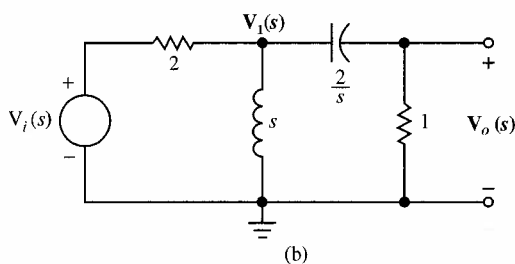
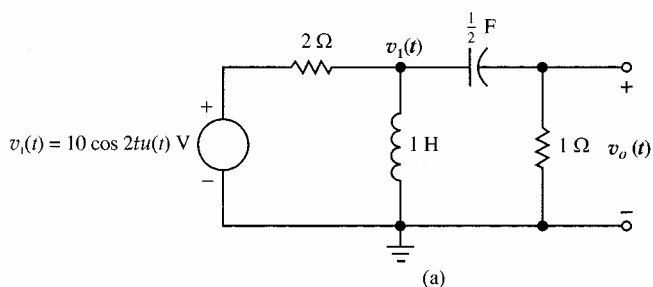
Como ilustrado anteriormente, esse problema poderia ser resolvido usando-se várias técnicas, tais como equações nodais, equações de malha, transformação de fonte e teorema de Thévenin. Empregaremos aqui equações nodais para a obtenção da solução. A rede transformada usando os valores de impedância para os parâmetros é mostrada na Figura 17.17b. As equações nodais para essa rede são

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{s} + \frac{s}{2}\right)V_1(s) - \left(\frac{s}{2}\right)V_o(s) = \frac{1}{2}V_i(s)$$

$$-\left(\frac{s}{2}\right)V_1(s) + \left(\frac{s}{2} + 1\right)V_o(s) = 0$$

Resolvendo-se essas equações para  $V_o(s)$ , obtém-se

$$V_o(s) = \frac{s^2}{3s^2 + 4s + 4} V_i(s)$$



**Figura 17.17** Circuito utilizado no Exemplo 17.15.

Note que essa equação está na forma da Equação 17.16, onde  $\mathbf{H}(s)$  é

$$\mathbf{H}(s) = \frac{s^2}{3s^2 + 4s + 4}$$

Uma vez que a função forçante é  $10 \cos 2t u(t)$ , então  $V_M = 10$  e  $\omega_0 = 2$ . Dessa forma

$$\mathbf{H}(j2) = \frac{(j2)^2}{3(j2)^2 + 4(j2) + 4}$$

$$= 0,354/45^\circ$$

Portanto,

$$|\mathbf{H}(j2)| = 0,354$$

$$\phi(j2) = 45^\circ$$

e, assim, a resposta em regime permanente é

$$v_{oss}(t) = V_M |\mathbf{H}(j2)| \cos[2t + \phi(j2)]$$

$$= 3,54 \cos(2t + 45^\circ)$$

A resposta completa (transiente + regime permanente) pode ser obtida da expressão

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{s^2}{3s^2 + 4s + 4} V_i(s) \\ &= \frac{s^2}{3s^2 + 4s + 4} \left( \frac{10s}{s^2 + 4} \right) \\ &= \frac{10s^3}{(s^2 + 4)(3s^2 + 4s + 4)} \end{aligned}$$

Determinando-se a transformada inversa de Laplace dessa função utilizando as técnicas do Capítulo 16, obtém-se

$$v_o(t) = 3,54 \cos(2t + 45^\circ) + 1,44e^{-(2/3)t} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}t - 55^\circ\right) \text{ V}$$

Note que à medida que  $t \rightarrow \infty$ , o segundo termo se aproxima de zero, e dessa forma a resposta em estado estacionário é

$$v_{oss}(t) = 3,54 \cos(2t + 45^\circ) \text{ V}$$

que pode ser facilmente conferida usando-se uma análise de fasores.

### Exercícios

**E17.13** Determine a tensão em estado estacionário  $v_{oss}(t)$  na rede da Figura E17.13 para  $t > 0$  se as condições iniciais da rede forem nulas.

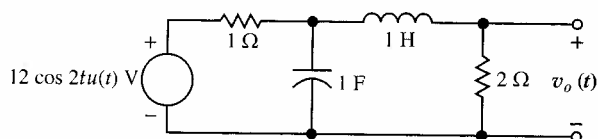


Figura E17.13

**Resp.:**  $v_{oss}(t) = 3,95 \cos(2t - 99,46^\circ) \text{ V}$ .

**E17.14** Determine a tensão em estado estacionário  $v_{oss}(t)$  na rede da Figura E17.14 para  $t > 0$  se todas as condições iniciais forem nulas.

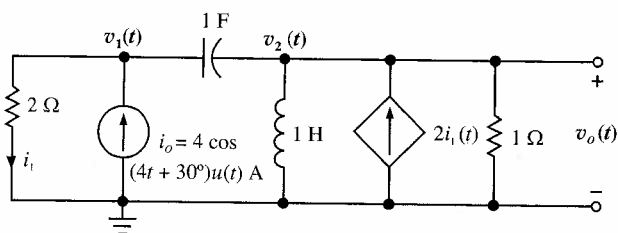


Figura E17.14

**Resp.:**  $v_{oss}(t) = 6,86 \cos(4t - 54,66^\circ) \text{ V}$ .

## 17.5 Resumo

Neste capítulo aplicamos a transformada de Laplace na análise de circuitos. Demonstramos como descrever os elementos de um circuito no domínio  $s$  e utilizamos todas as técnicas de análise de redes e teoremas de rede derivados na análise dc para obter uma solução. Foram feitas tanto a análise em estado estacionário como transiente. A facilidade com que se pode determinar a resposta de uma rede a entradas complexas usando-se transformada de Laplace foi apresentada.



## Pontos-Chave

- Elementos de circuito e suas condições iniciais podem ser representadas no domínio  $s$  por um circuito equivalente.
- Todas as técnicas de análise de redes dc podem ser aplicadas a redes representadas no domínio  $s$ .
- A resposta da rede obtida usando-se a transformada de Laplace é a resposta completa (ou seja, transiente + regime permanente).
- A resposta em estado estacionário de uma rede pode ser obtida por meio da função da rede na frequência da função forçante.
- Uma vez que as condições iniciais de uma rede sejam conhecidas, a transformada de Laplace produz a resposta transiente da rede resolvendo um conjunto de equações algébricas no domínio  $s$  e então determinando a transformada inversa de Laplace da variável desejada.
- Em uma rede, as raízes da equação característica determinam a sua resposta.
- Ao se representar formas de onda complicadas usando-se a transformada de Laplace, a resposta de uma rede a tais entradas pode ser obtida de maneira simples.
- A transformada inversa de Laplace da função de transferência da rede é a resposta ao impulso da rede.

## Problemas

17.1 Determine a impedância de entrada  $Z(s)$  da rede da Figura P17.1.

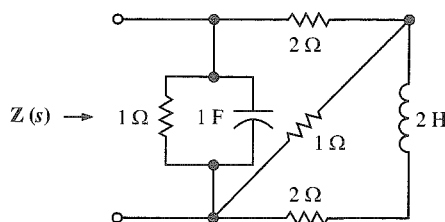


Figura P17.1

17.2 Determine a impedância de entrada  $Z(s)$  da rede da Figura P17.2 (a) quando os terminais  $B-B'$  estão em circuito aberto e (b) quando os terminais  $B-B'$  estão curto-circuitados.

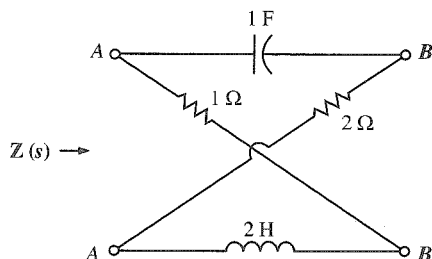


Figura P17.2

17.3 Dada a rede da Figura P17.3, determine o valor da tensão de saída  $v_o(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

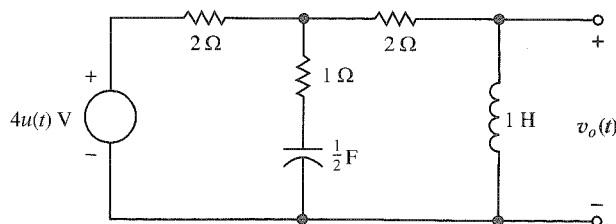


Figura P17.3

- 17.4 Dada a rede da Figura P17.4, determine o valor da tensão de saída  $v_o(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

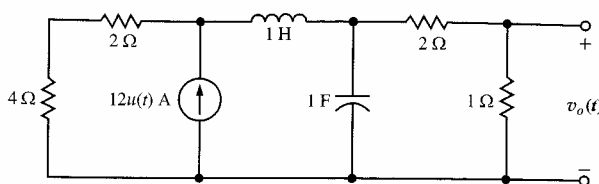


Figura P17.4

- 17.5 Para a rede mostrada na Figura P17.5, determine  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , usando equações nodais.

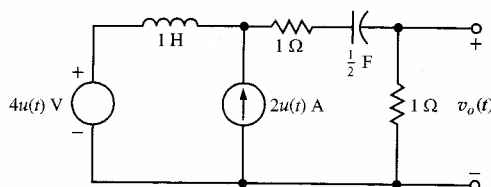


Figura P17.5

- 17.6 Utilize equações de laço para resolver o Problema 17.5.  
 17.7 Utilize o princípio da superposição para resolver o Problema 17.5.  
 17.8 Utilize a transformação de fonte para resolver o Problema 17.5.  
 17.9 Utilize o teorema de Thévenin para resolver o Problema 17.5.  
 17.10 Utilize equações de malha para determinar  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , na rede da Figura P17.10.

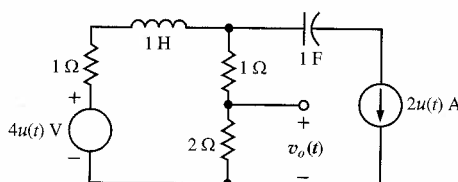


Figura P17.10

- 17.11 Utilize o teorema de Thévenin para resolver o Problema 17.10.  
 17.12 Para a rede mostrada na Figura P17.12, determine  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , usando equações de malha.

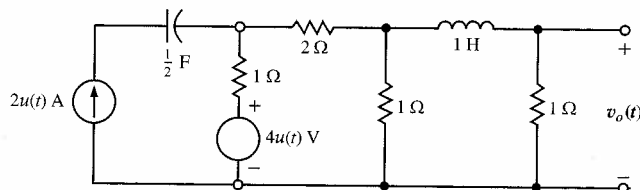


Figura P17.12

- 17.13 Utilize o teorema de Thévenin para resolver o Problema 17.12.  
 17.14 Dada a rede da Figura P17.14, determine  $i_o(t)$ ,  $t > 0$ , usando equações de malha.

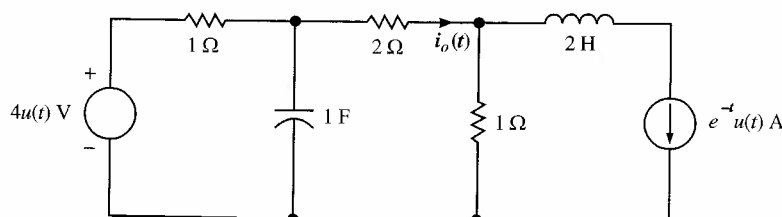


Figura P17.14

- 17.15 Utilize o teorema de Thévenin para resolver o Problema 17.14.  
 17.16 Para a rede mostrada na Figura P17.16, determine  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , usando equações nodais.

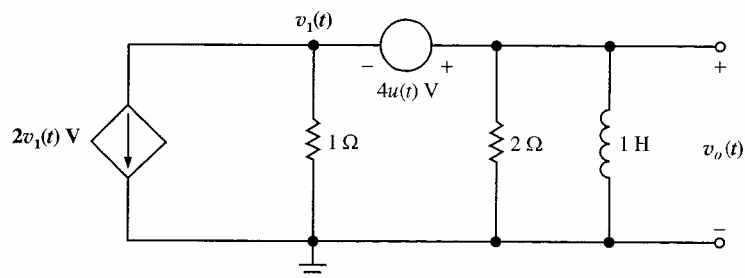


Figura P17.16

**17.17** Utilize o teorema de Thévenin para resolver o Problema 17.16.

**17.18** Para a rede mostrada na Figura P17.18, determine  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ .

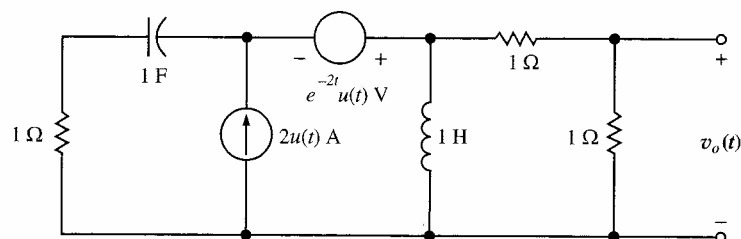


Figura P17.18

**17.19** Para a rede mostrada na Figura P17.19, determine  $i_o(t)$ ,  $t > 0$ .

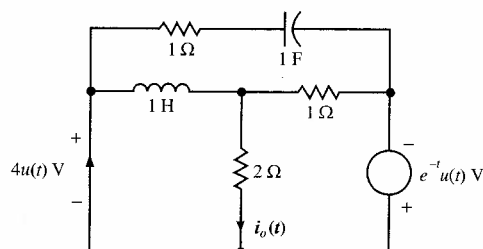


Figura P17.19

**17.20** Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , na rede da Figura P17.20.

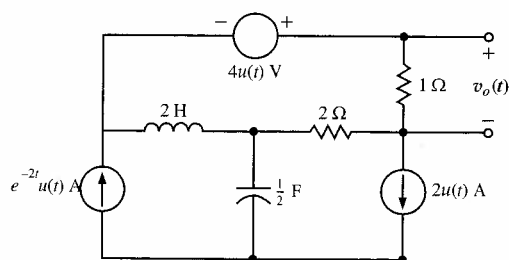


Figura P17.20

**17.21** Utilize análise de malha para determinar  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , na rede da Figura P17.21.

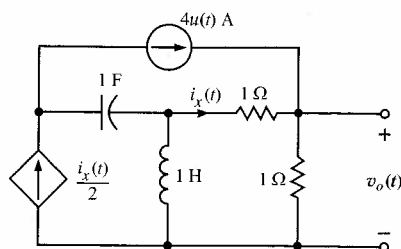
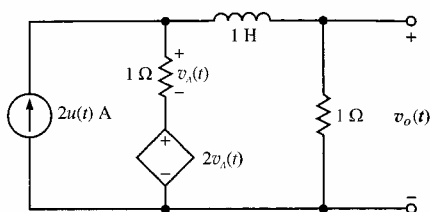


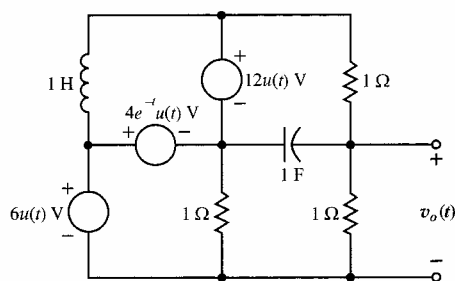
Figura P17.21

**17.22** Utilize o teorema de Thévenin para determinar  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , na rede mostrada na Figura P17.22.



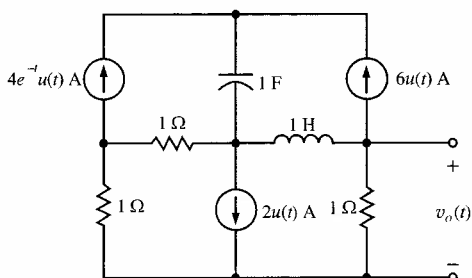
**Figura P17.22**

**17.23** Determine  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , na rede da Figura P17.23 utilizando análise nodal.



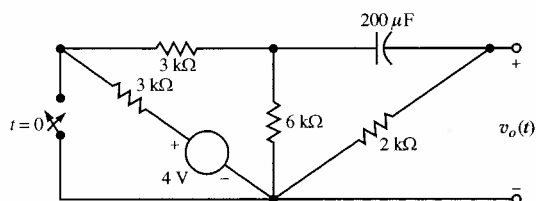
**Figura P17.23**

**17.24** Utilize análise de laço para determinar  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , na rede da Figura P17.24.



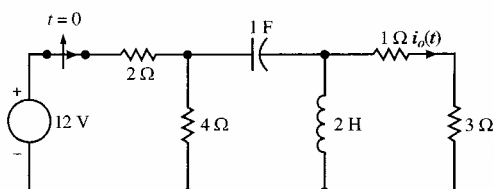
**Figura P17.24**

**17.25** Determine  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , na rede da Figura P17.25.



**Figura P17.25**

**17.26** Determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$ , na rede mostrada na Figura P17.26.



**Figura P17.26**

17.27 Determine  $i_o(t)$ ,  $t > 0$ , na rede da Figura P17.27.

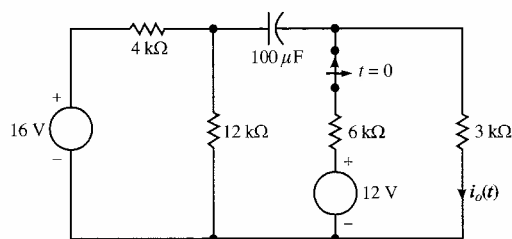


Figura P17.27

17.28 Determine  $i_o(t)$ ,  $t > 0$ , na rede da Figura P17.28.

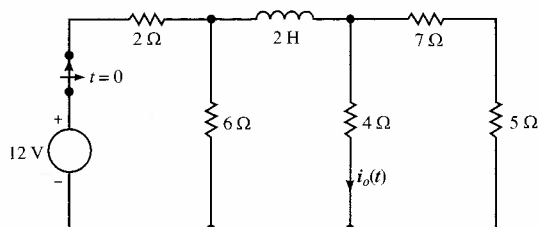


Figura P17.28

17.29 Determine  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , no circuito da Figura P17.29.

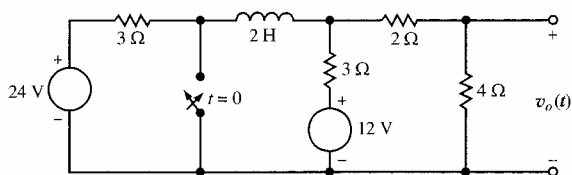


Figura P17.29

17.30 Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P17.30.

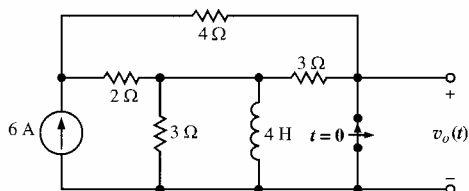


Figura P17.30

17.31 Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P17.31.

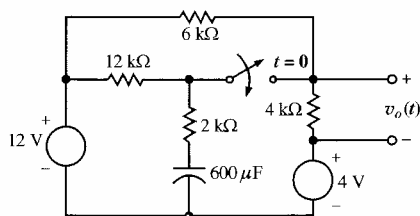


Figura P17.31

17.32 Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P17.32.

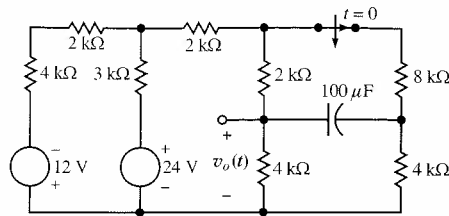


Figura P17.32

17.33 Determine os parâmetros de transmissão para a rede da Figura P17.33.

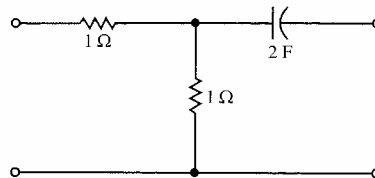
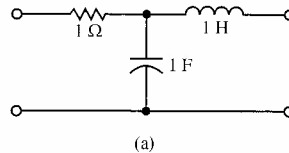
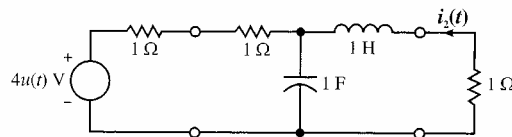


Figura P17.33

17.34 Determine os parâmetros Z do quadripolo da Figura P17.34a. Usando tais parâmetros, determine  $i_2(t)$  na rede da Figura P17.34b.



(a)



(b)

Figura P17.34

17.35 Determine os parâmetros de transmissão da rede da Figura P17.35.

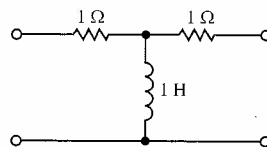


Figura P17.35

17.36 Utilizando os resultados do Problema 17.35, determine os parâmetros de transmissão da rede da Figura P17.36.

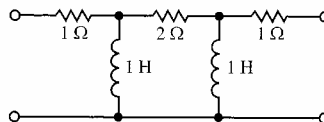


Figura P17.36

17.37 Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P17.37.

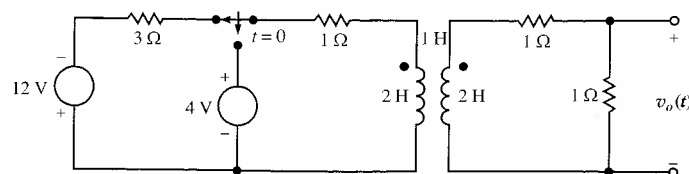


Figura P17.37

17.38 Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P17.38.

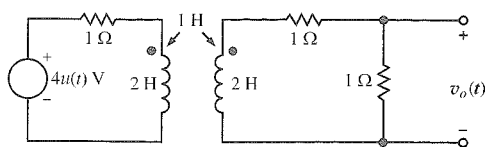


Figura P17.38

17.39 Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P17.39.

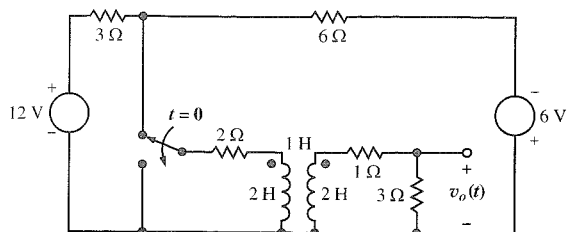


Figura P17.39

17.40 Determine  $i_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P17.40.

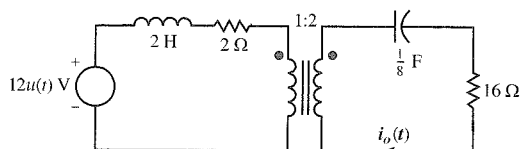


Figura P17.40

17.41 Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede da Figura P17.41.

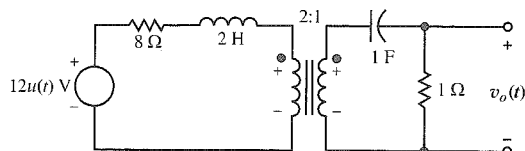


Figura P17.41

17.42 Determine os valores inicial e final da tensão  $v_o(t)$  na rede da Figura P17.42.

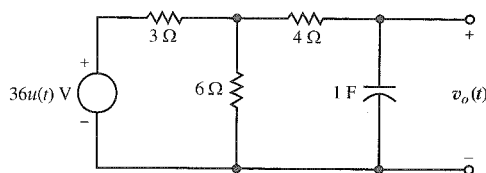


Figura P17.42

17.43 Determine os valores inicial e final da tensão  $v_o(t)$  na rede da Figura P17.43.

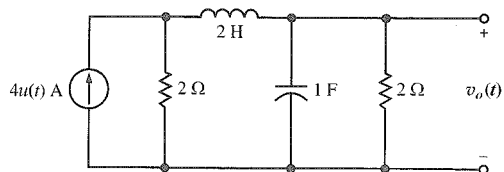


Figura P17.43

17.44 Determine os valores inicial e final da tensão  $v_o(t)$  na rede da Figura P17.44.

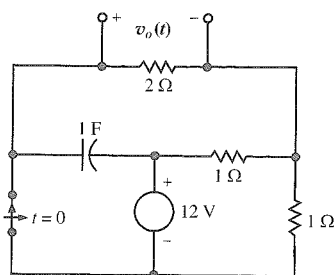


Figura P17.44

17.45 Determine a tensão de saída  $v_o(t)$ ,  $t > 0$ , na rede da Figura P17.45<sup>a</sup>, caso a entrada seja representada pela forma de onda mostrada na Figura P17.45b.

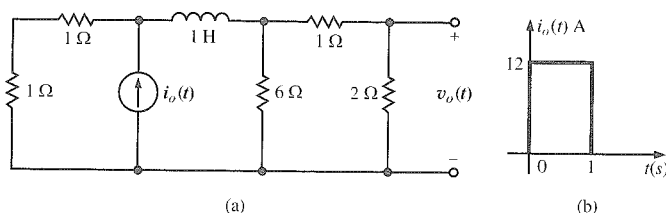


Figura P17.45

17.46 Resolva o Problema 17.45, caso a entrada seja a mostrada na Figura P17.46.

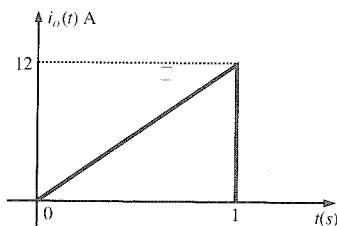


Figura P17.46

17.47 Resolva o Problema 17.45, caso a entrada seja a mostrada na Figura P17.47.

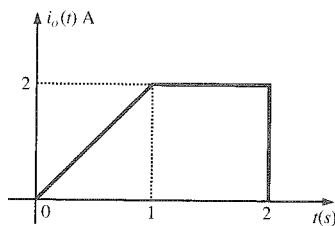


Figura P17.47

17.48 Determine a função de transferência para a rede mostrada na Figura P17.48.

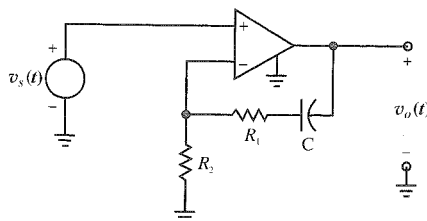


Figura P17.48



- 17.49 Determine a função de transferência para a rede mostrada na Figura P17.49.

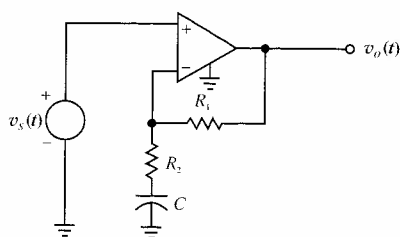


Figura P17.49

- 17.50 Determine a função de transferência para a rede mostrada na Figura P17.50. Se a função degrau for aplicada à rede, que tipo de amortecimento será exibido pela rede?

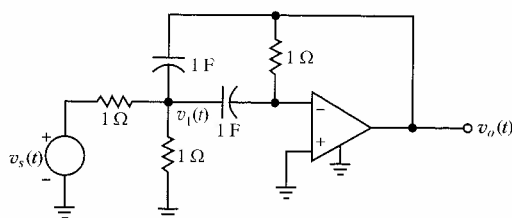


Figura P17.50

- 17.51 Determine a função de transferência para a rede mostrada na Figura P17.51. Se a função degrau for aplicada à rede, a resposta será sobreamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida?

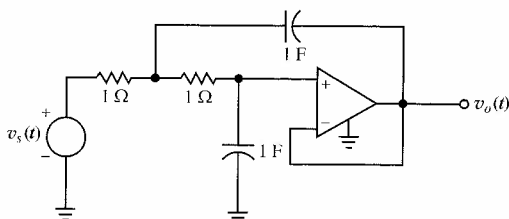


Figura P17.51

- 17.52 Determine a função de transferência para a rede mostrada na Figura P17.52.

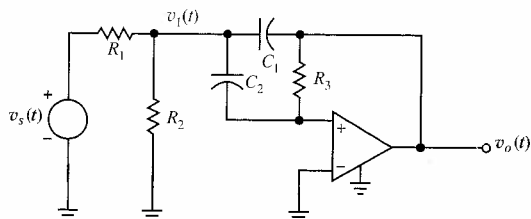


Figura P17.52

- 17.53 Determine a resposta em regime permanente  $v_o(t)$  para a rede mostrada na Figura P17.53.

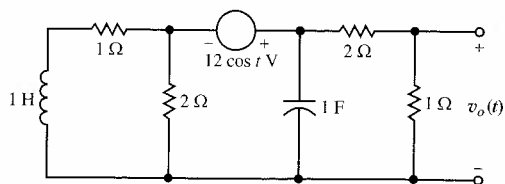


Figura P17.53

- 17.54 Determine a resposta em estado estacionário  $v_o(t)$  para a rede mostrada na Figura P17.54.

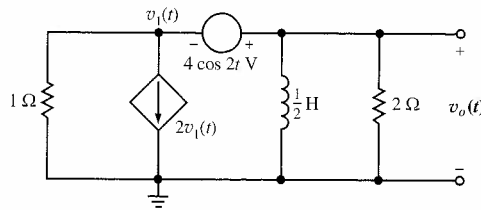


Figura P17.54

- 17.55 Determine a resposta em estado estacionário  $i_o(t)$  para a rede mostrada na Figura P17.55.

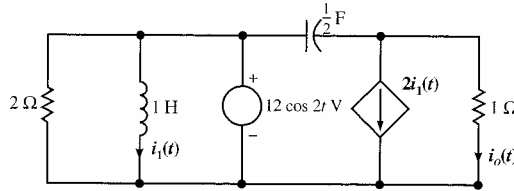


Figura P17.55

- 17.56 Determine a resposta em estado estacionário  $v_o(t)$  para  $t > 0$  na rede mostrada na Figura P17.56.

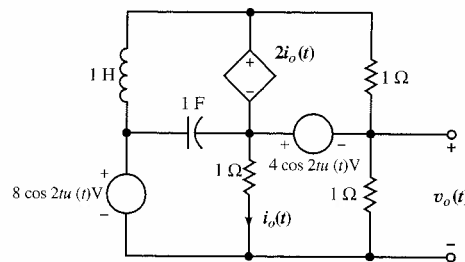


Figura P17.56

- 17.57 Se a entrada de uma rede é  $x(t) = u(t)$  e a resposta ao impulso é  $h(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ , determine a saída da rede  $y(t)$ .  
 17.58 A resposta de uma rede à entrada  $x(t) = [e^{-2t} - e^{-6t}]u(t)$  é  $y(t) = 4[1 - te^{-t} - e^{-t}]u(t)$ . Determine a resposta ao impulso da rede.  
 17.59 Se a entrada de uma rede é  $x_1(t) = e^{-t}u(t)$ , a resposta da rede é  $y_1(t) = [t - 1 + e^{-t}]u(t)$ . Determine a resposta da rede  $y_2(t)$ , caso a entrada seja  $x_2(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$ .  
 17.60 A resposta da tensão da rede a uma entrada em degrau unitário é

$$V_o(s) = \frac{2(s+1)}{s(s^2 + 12s + 27)}$$

A resposta é sobreamortecida?

- 17.61 A resposta da corrente de uma rede a uma entrada em degrau unitário é

$$I_o(s) = \frac{10(s+2)}{s(s^2 + 11s + 30)}$$

A resposta é subamortecida?

- 17.62 A resposta da tensão de uma rede a uma entrada em degrau unitário é

$$V_o(s) = \frac{10}{s(s^2 + 8s + 16)}$$

A resposta é criticamente amortecida?

# Técnicas de Análise de Fourier

Examinaremos neste capítulo dois tópicos de grande importância: a série de Fourier e a transformada de Fourier. Essas duas técnicas ampliam a capacidade de análise de circuitos porque fornecem um meio de lidar eficazmente com sinais periódicos não-senoidais e sinais aperiódicos. Fazendo uso da série de Fourier, mostramos que podemos determinar a resposta do estado estacionário de uma rede a uma entrada periódica não-senoidal. A transformada de Fourier nos permitirá analisar circuitos com entradas aperiódicas transformando o problema para o domínio da frequência, resolvendo-o algebricamente e então transformando-o de volta para o domínio do tempo de modo semelhante ao usado com a transformada de Laplace.

## 18.1 A Série de Fourier

Uma função periódica é aquela que satisfaz a relação

$$f(t) = f(t + nT_0), \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

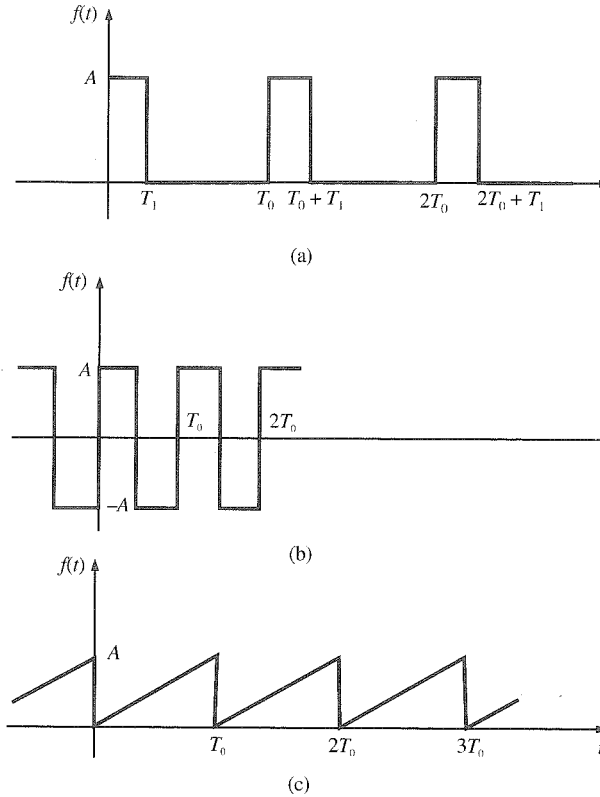
para todo valor de  $t$  onde  $T_0$  é o período. Como mostramos nos capítulos anteriores, a função senoidal é uma função muito importante. No entanto, existem muitas outras funções periódicas de variada aplicação. Por exemplo, geradores de sinal em laboratório produzem sinais tais como o trem de pulso e a onda quadrada mostrados na Figura 18.1a e b, respectivamente, que são utilizados no teste de circuitos. O osciloscópio é outro instrumento de laboratório e a varredura de seu raio eletrônico sobre a face de um tubo de raios catódicos é controlada por um sinal triangular da forma mostrada na Figura 18.1c.

As técnicas que vamos explorar estão baseadas no trabalho de Jean Baptiste Joseph Fourier. Apesar de a análise ficar confinada a circuitos elétricos, é importante lembrar que as técnicas são aplicáveis a uma variada gama de problemas de engenharia. De fato, foi o trabalho de Fourier em fluxo de calor que conduziu às técnicas que apresentaremos aqui.

Em seu trabalho, Fourier demonstrou que a função periódica  $f(t)$  poderia ser expressa como o somatório de funções senoidais. Portanto, dado isto e o fato de que se uma função periódica é expressa como o somatório de funções linearmente independentes, cada função no somatório deve ser periódica com o mesmo período, a função  $f(t)$  pode ser expressa da forma

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (18.1)$$

onde  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  e  $a_0$  é o valor médio da forma de onda. O exame de tal expressão mostra que todas as formas de onda senoidais que são periódicas com período  $T_0$  estão incluídas. Por exemplo, para  $n = 1$ , um ciclo cobre  $T_0$  segundos e  $D_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$  é chamado de *fundamental*. Para  $n = 2$ , dois ciclos caem dentro de  $T_0$  segundos e o termo  $D_2 \cos(2\omega_0 t + \theta_2)$  é chamado de *segundo harmônico*. Em geral, para  $n = k$ ,  $k$  ciclos caem dentro de  $T_0$  segundos e  $D_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$  é chamado de *k-ésimo termo harmônico*.



**Figura 18.1** Alguns sinais periódicos úteis.

Uma vez que a função  $\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$  pode ser escrita em forma exponencial usando-se a identidade de Euler, ou como um somatório de termos cossenoidais e senoidais da forma  $\cos n\omega_0 t$  e  $\sin n\omega_0 t$ , como demonstrado no Capítulo 9, as séries da Equação 18.1 podem ser escritas como

$$f(t) = a_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (18.2)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \quad (18.3)$$

Podemos expressar  $f(t)$  no domínio da frequência como

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}[(D_n / \theta_n) e^{jn\omega_0 t}] \quad (18.4)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}(2c_n e^{jn\omega_0 t}) \quad (18.5)$$

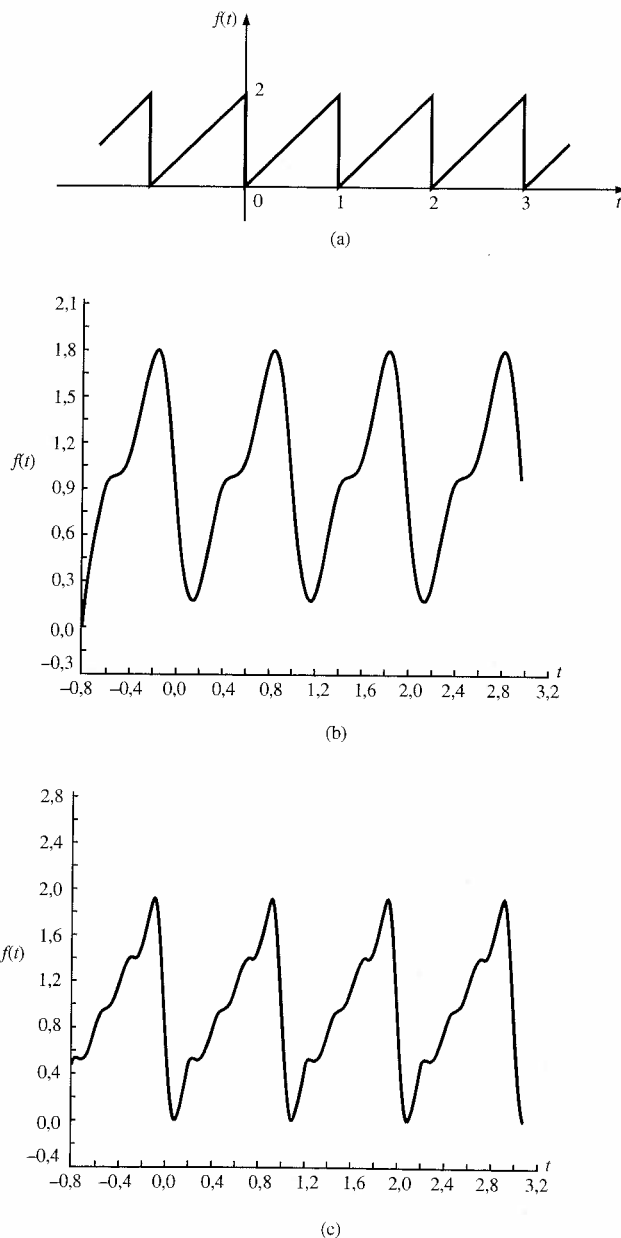
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}[(a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t}] \quad (18.6)$$

Essas equações nos permitem escrever a série de Fourier de várias formas equivalentes. Note que o *fasor* para a  $n$ -ésima harmônica é

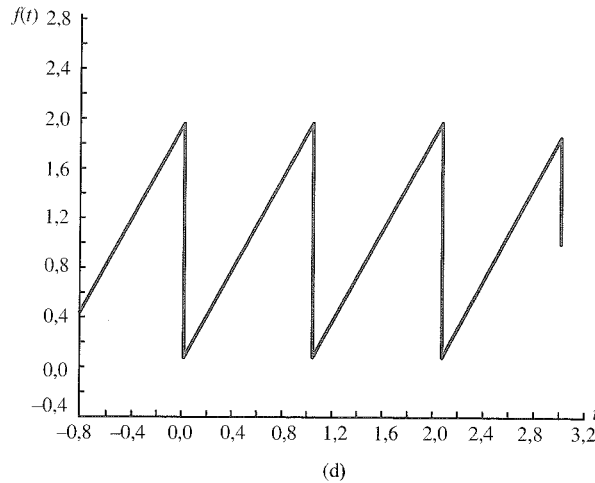
$$D_n \angle \theta_n = 2c_n = a_n - jb_n \quad (18.7)$$

O método proposto consistirá em representar uma entrada periódica não-senoidal por um somatório de funções exponenciais complexas que, por causa da identidade de Euler, é equivalente ao somatório de senoidais e cossenoidais. Usaremos para determinar a resposta de tal sistema (1) a propriedade de superposição de sistemas lineares e (2) o fato de que a resposta em estado estacionário de um sistema linear invariante no tempo a uma entrada senoidal de frequência  $\omega_0$  é também uma função senoidal de mesma frequência.

A fim de ilustrar o modo como um sinal periódico não-senoidal pode ser representado por uma série de Fourier, considere a função periódica mostrada na Figura 18.2a. Na Figura 18.2b-d, podemos ver o impacto do uso de certo número de termos na série para representar a função original. Note que a série representa mais de perto a função original à medida que mais e mais termos são incluídos.



**Figura 18.2** Função periódica (a) e sua representação por um número fixo de termos da série de Fourier: (b) 2 termos; (c) 4 termos; (d) 100 termos.



**Figura 18.2** Função periódica (a) e sua representação por um número fixo de termos da série de Fourier: (b) 2 termos; (c) 4 termos; (d) 100 termos. (Continuação)

### Série Exponencial de Fourier

Qualquer sinal periódico fisicamente realizável pode ser representado em um intervalo  $t_1 < t < t_1 + T_0$  por uma série exponencial de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \quad (18.8)$$

onde  $\mathbf{c}_n$  são os coeficientes complexos (fasores) de Fourier. Tais coeficientes são derivados como a seguir. Multiplicando ambos os lados da Equação 18.8 por  $e^{-jk\omega_0 t}$  e integrando no intervalo de  $t_1$  a  $t_1 + T_0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt &= \int_{t_1}^{t_1+T_0} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= 2kT_0 \end{aligned}$$

uma vez que

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq k \\ T_0 & \text{para } n = k \end{cases}$$

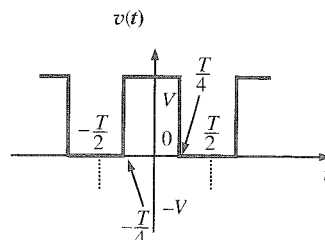
Portanto, os coeficientes de Fourier são definidos pela equação

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (18.9)$$

O exemplo a seguir ilustra o modo pelo qual podemos representar um sinal periódico por uma série exponencial de Fourier.

#### Exemplo 18.1

Desejamos determinar a série exponencial de Fourier para a forma de onda periódica de tensão mostrada na Figura 18.3.



**Figura 18.3** Forma de onda periódica de tensão.

Os coeficientes de Fourier são determinados usando-se a Equação 18.9 e integrando sobre um período completo da onda.

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{-T/4} -V e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{-T/4}^{T/4} V e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{T/4}^{T/2} -V e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{V}{jn\omega_0 T} \left[ +e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-T/2}^{-T/4} -e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-T/4}^{T/4} +e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{T/4}^{T/2} \right] \\
 &= \frac{V}{jn\omega_0 T} (2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{+jn\pi}) \\
 &= \frac{V}{n\omega_0 T} \left[ 4 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - 2 \operatorname{sen}(n\pi) \right] \\
 &= 0 \quad \text{para } n \text{ par} \\
 &= \frac{2V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ ímpar}
 \end{aligned}$$

Uma vez que  $c_0$  corresponde ao valor médio da forma de onda,  $c_0 = 0$ . Esse termo pode também ser determinado usando-se a equação original para  $c_n$ . Portanto,

$$v(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t}$$

Essa equação pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{\substack{n=-1 \\ n \text{ ímpar}}}^{-\infty} \frac{2V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t} \\
 &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \left( \frac{2V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left( \frac{2V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right)^* e^{-jn\omega_0 t}
 \end{aligned}$$

Uma vez que um número mais o seu conjugado complexo é igual a duas vezes a parte real do número,  $v(t)$  pode ser escrito como

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left( \frac{2V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t} \right)$$

ou

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_0 t$$

Note que esse mesmo resultado pode ser obtido calculando a integral no intervalo  $-T/4$  a  $3T/4$ . ■

## Exercícios

**E18.1** Determine os coeficientes de Fourier para a forma de onda da Figura E18.1.

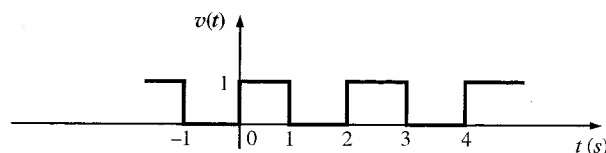
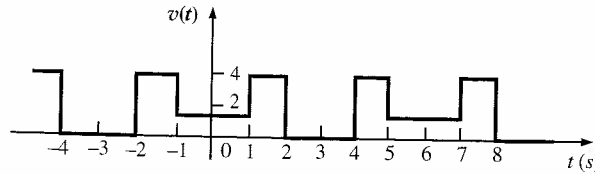


Figura E18.1

$$\text{Resp.: } c_n = \frac{1 - e^{-jn\pi}}{j2\pi n}.$$

**E18.2** Determine os coeficientes de Fourier para a forma de onda da Figura E18.2.



**Figura E18.2**

$$\text{Resp.: } c_n = \frac{2}{n\pi} \left( 2 \sin \frac{2\pi n}{3} - \sin \frac{\pi n}{3} \right), c_0 = 2.$$

Além de informativo, é também interessante comparar a equação dos coeficientes da série exponencial de Fourier, isto é,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (18.10)$$

com aquela obtida no Capítulo 16 usada para determinar a transformada de Laplace de uma função periódica. Lembre-se que para uma função periódica  $f(t)$  com período  $T_0$ ,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT_0}}$$

onde  $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$ , a transformada de Laplace do primeiro período de  $f(t)$ . Além disso,

$$F_1(s) = \int_0^{T_0} f(t) e^{-st} dt \quad (18.11)$$

Comparando-se as equações 18.10 e 18.11, indica-se que

$$c_n = \frac{F_1(jn\omega_0)}{T_0} \quad (18.12)$$

Isto é, por meio da transformada de Laplace do primeiro período da função, podemos derivar os coeficientes de Fourier  $c_n$ .

### Exemplo 18.2

Vamos determinar os coeficientes  $c_n$  da série de Fourier para a forma de onda da Figura 18.3 usando o método da transformada de Laplace.

O primeiro período da função  $v(t)$  é

$$v_1(t) = V \left[ u(t) - 2u\left(t - \frac{T}{4}\right) + 2u\left(t - \frac{3T}{4}\right) - u(t - T) \right]$$

e dessa forma

$$V_1(s) = \frac{V}{s} (1 - 2e^{-(T/4)s} + 2e^{-(3T/4)s} - e^{-Ts})$$

Usando-se a Equação 18.12, tem-se

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{V}{Tjn\omega_0} (1 - 2e^{-(T/4)jn\omega_0} + 2e^{-(3T/4)jn\omega_0} - e^{-Tjn\omega_0}) \\ &= \frac{V}{T2\pi n} (1 - 2e^{-j(n\pi/2)} + 2e^{-j(3\pi/2)n} - e^{-j2\pi n}) \end{aligned}$$



Essa função é zero para  $n$  par, e para  $n$  ímpar ela pode ser escrita como

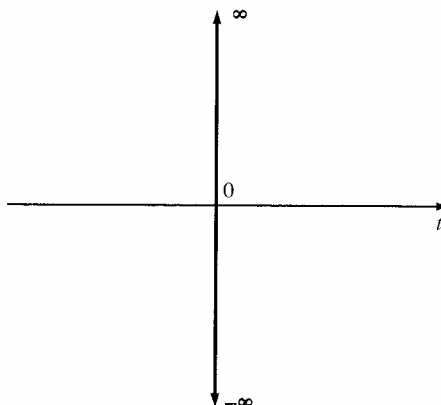
$$\begin{aligned} C_n &= \frac{V}{j2\pi n} [2e^{+j(n\pi/2)} - 2e^{-j(n\pi/2)}] \\ &= \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ ímpar} \end{aligned}$$

que é idêntica à obtida no Exemplo 18.1. ■

### Exercício

**E18.3** Repita o Exercício E18.1 usando o método da transformada de Laplace.

**Resp.:** Veja a resposta do Exercício E18.1.



**Figura 18.4** Derivada do impulso unitário.

Vamos considerar mais uma vez a função impulso. Se  $f(t)$  é contínua sobre um intervalo  $-\infty < t < \infty$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (18.13)$$

Esse resultado, que ilustra a propriedade de amostragem da função impulso, indica que se  $t_0$  fosse variado de  $-\infty$  a  $+\infty$ , a função inteira  $f(t)$  seria reproduzida à medida que *varremos* os valores entre um limite e o outro.

A derivada do impulso unitário  $\delta'(t)$  consiste de um par de impulsos como mostrado na Figura 18.4. Essa função possui duas propriedades importantes. Primeiramente, a área sob  $\delta'(t)$  é igual a zero, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0$$

e em segundo lugar,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - t_0) dt = f'(t_0) \quad (18.14)$$

Esse último resultado pode ser derivado integrando-se o lado esquerdo da equação por partes.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - t_0) dt &= f(t) \delta(t - t_0) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \delta(t - t_0) dt \\ &= -f'(t_0) \end{aligned}$$

Em geral, pode ser mostrado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta^{(n)}(t - t_0) dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0) \quad (18.15)$$

onde  $\delta^{(n)}$  e  $f^{(n)}$  indicam derivadas de  $n$ -ésima ordem.

Vamos agora usar as propriedades básicas da função impulso para calcular os coeficientes complexos de Fourier. Quando determinamos os coeficientes de Fourier, somente um único período do sinal é considerado na análise. Além disso, a técnica que ilustramos não calcula o nível dc do sinal e, portanto, tal valor deve ser determinado por inspeção, ou por meio de integração, o que for mais fácil. Os exemplos a seguir ilustram tal método.

### Exemplo 18.3

Considere a forma de onda mostrada na Figura 18.5a. Os coeficientes de Fourier podem ser determinados durante um único período de  $t = 0$  a  $t = T_0$ , como mostrado na Figura 18.5b. Uma vez que a forma de onda não contém impulsos, vamos diferenciar o sinal do período único  $t = 0$  a  $t = T_0$  para obter  $v_1\phi(t)$  como mostrado na Figura 18.5c.

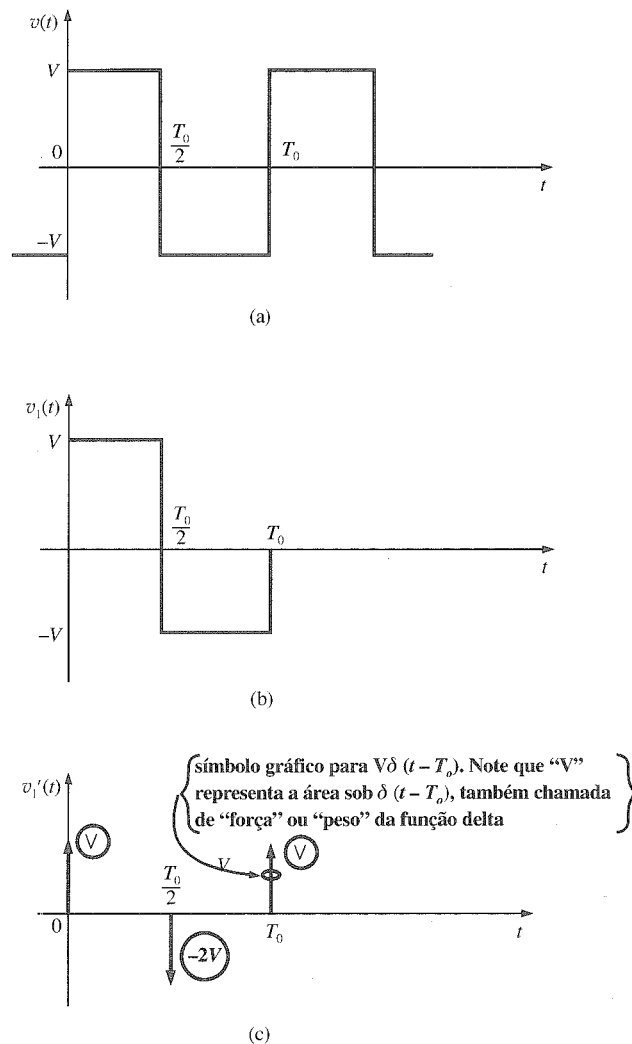


Figura 18.5 Figuras usadas no Exemplo 18.3.

Uma vez que o sinal  $v_1\phi(t)$  consiste somente de impulsos, podemos facilmente determinar os coeficientes de Fourier para esse sinal da seguinte maneira. Uma vez que

$$v_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

então

$$v_1'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} jn\omega_0 \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \quad (18.16)$$

Definimos agora que

$$\beta_n = jn\omega_0 \mathbf{c}_n \quad (18.17)$$

tal que

$$\mathbf{c}_n = \frac{\beta_n}{jn\omega_0} \quad (18.18)$$

Vamos agora determinar os coeficientes de Fourier  $\beta_n$  para  $v_1'(t)$  e, então, utilizando a Equação (18.18), obter os coeficientes de Fourier para a forma de onda original;  $v_1(t)$  pode ser escrita como

$$v_1'(t) = V\delta(t) - 2V\delta\left(t - \frac{T_0}{2}\right) + V\delta(t - T_0)$$

Os coeficientes de Fourier são então

$$\beta_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v_1'(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Usando-se a propriedade de amostragem da função impulso como ilustrado na Equação 18.13, obtém-se

$$\beta_n = \frac{V}{T_0} (1 - 2e^{-jn\omega_0(T_0/2)} + e^{-jn\omega_0 T_0})$$

Os coeficientes da série de Fourier para  $v(t)$  são então

$$\mathbf{c}_n = \frac{\beta_n}{jn\omega_0} = \frac{V}{jn\omega_0 T_0} (1 - 2e^{-jn\omega_0(T_0/2)} + e^{-jn\omega_0 T_0})$$

Fazendo uso do fato de que  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ , verificamos que a equação se reduz a

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_n &= \frac{V}{j2\pi n} (1 - 2e^{-jn\pi} + e^{-j2\pi n}) \\ &= 0 \quad \text{para } n \text{ par} \\ &= \frac{2V}{jn\pi} \quad \text{para } n \text{ ímpar} \end{aligned}$$

Uma vez que o nível dc do sinal é zero, os coeficientes de Fourier acima estão completos. ■

#### Exemplo 18.4

Vamos determinar os coeficientes de Fourier para a forma de onda da Figura 18.6a.

Um período único de forma de onda marcado como  $v_1(t)$  é mostrado na Figura 18.6b.  $v_1'(t)$ , que pode ser expressa como

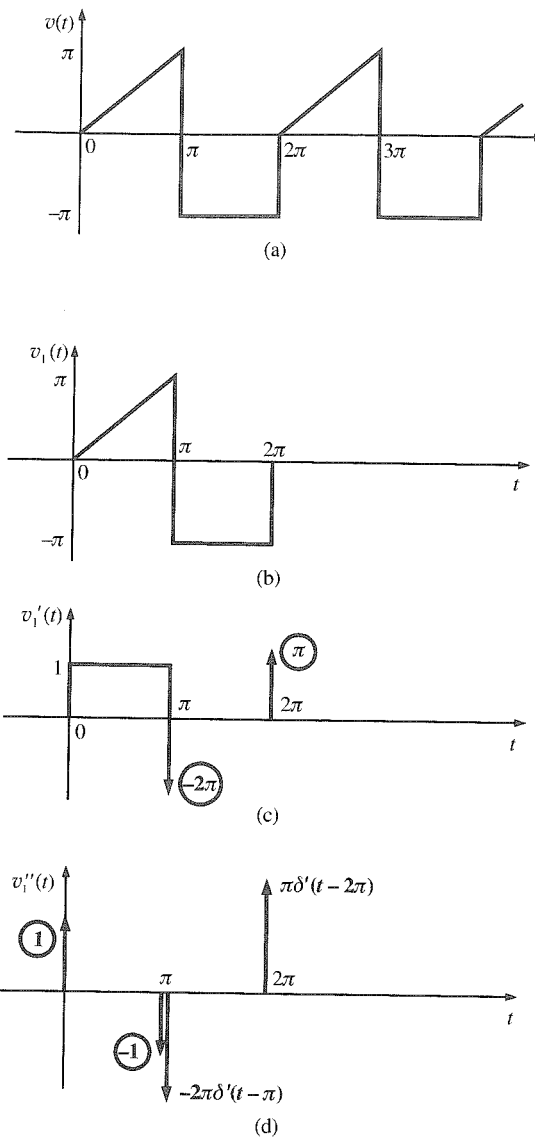
$$v_1'(t) = u(t) - u(t - \pi) - 2\pi\delta(t - \pi) + \pi\delta(t - 2\pi)$$

é mostrada na Figura 18.6c.  $v_1''(t)$ , que consiste apenas de impulsos, como mostrado na Figura 18.6d, é

$$v_1''(t) = \delta(t) - \delta(t - \pi) - 2\pi\delta'(t - \pi) + \pi\delta'(t - 2\pi)$$

Sejam  $g_n$  os coeficientes de Fourier para  $v_1''(t)$ , então

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_1''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\delta(t) - \delta(t - \pi) - 2\pi\delta'(t - \pi) + \pi\delta'(t - 2\pi)] e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$



**Figura 18.6** Figuras usadas no Exemplo 18.4.

Usando-se as Equações 18.13 e 18.14 e a igualdade  $\omega_0 = 2\pi/2\pi = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-jn\pi} - j2\pi n e^{-jn\pi} - jn\pi e^{-j2\pi n}) \\ &= \frac{1}{2\pi} [1 - (1 + j2\pi n)e^{-jn\pi} - jn\pi e^{-j2\pi n}]\end{aligned}$$

No entanto, da Equação 18.16,

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\omega_0)^2 \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}$$

Portanto,

$$\gamma_n = (jn\omega_0)^2 \mathbf{c}_n$$

e

$$\mathbf{c}_n = \frac{\gamma_n}{(jn\omega_0)^2}$$

Dessa forma, os coeficientes de Fourier para a forma de onda da Figura 18.6a são

$$c_n = \frac{-1}{2\pi n^2} [1 - (1 + j2\pi n)e^{-jn\pi} - jn\pi e^{-j2\pi n}]$$

para todo  $n$ , exceto para  $n = 0$ .  $c_0$ , o nível dc, é facilmente calculado como  $c_0 = -\pi/4$ .

### Exercício

**E18.4** Utilize o método da derivada para determinar os coeficientes de Fourier para a forma de onda da Figura E18.4.

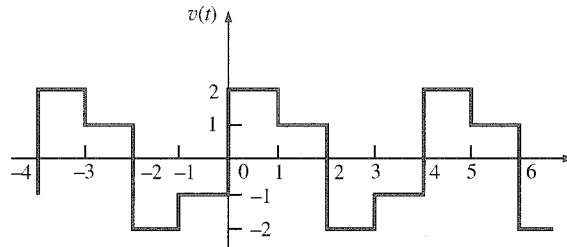


Figura E18.4

$$\text{Resp.: } c_n = \frac{1}{j2\pi n} [2 - e^{-jn\pi/2} - 3e^{-jn\pi} + e^{-(3\pi n/2)} + e^{-j2\pi n}], n \neq 0; c_0 = 0.$$

### Série Trigonométrica de Fourier

Vamos agora examinar outra forma da série de Fourier. Uma vez que

$$2c_n = a_n - jb_n \quad (18.19)$$

examinaremos tal valor  $2c_n$  e o separaremos em parte real e imaginária. Usando a Equação 18.9, obtemos

$$2c_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (18.20)$$

Usando-se a identidade de Euler, podemos escrever essa equação na forma

$$\begin{aligned} 2c_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) (\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

Da Equação 18.19 notamos que

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (18.21)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (18.22)$$

Esses são os coeficientes da série de Fourier descritos pela Equação 18.3, que chamamos de *séries trigonométricas de Fourier*. Essas equações são derivadas na maioria dos livros usando-se o fato de que as funções seno e cosseno são ortogonais entre si. Note que podemos agora determinar  $c_n$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ , e uma vez que

$$2c_n = D_n / \theta_n \quad (18.23)$$

podemos derivar os coeficientes para a *série de cosseno de Fourier* descrita pela Equação 18.1. Essa forma de série de Fourier é particularmente útil porque permite representar cada componente harmônico da função como um fasor.

Da Equação 18.9 notamos que  $c_0$ , que é escrito como  $a_0$ , é

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt \quad (18.24)$$

Esse é o valor médio do sinal  $f(t)$  e pode frequentemente ser determinado diretamente a partir da forma de onda.

### Simetria e Séries Trigonômicas de Fourier

Se um sinal tem certas propriedades simétricas, podemos tirar proveito dessas propriedades para simplificar os cálculos dos coeficientes de Fourier. Existem três tipos de simetria: (1) simetria da função par, (2) simetria da função ímpar e (3) simetria de meia-onda.

**Simetria da Função Par.** Uma função é par se

$$f(t) = f(-t) \quad (18.25)$$

Uma função par é simétrica com relação ao eixo vertical, e um exemplo notável é a função  $\cos n\omega_0 t$ . Note que a forma de onda na Figura 18.3 também exibe simetria da função par. Vamos agora examinar as expressões para os coeficientes de Fourier, caso a função satisfaça a Equação 18.25.

Se fizermos  $t_1 = -T_0/2$  na Equação 18.24, obtemos

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt$$

que pode ser escrita como

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 f(t) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt$$

Se agora mudarmos a variável na primeira integral (isto é, seja  $t = -x$ ), então  $f(-x) = f(x)$ ,  $dt = -dx$  e o intervalo de integração é de  $x = T_0/2$  a 0. Portanto, a equação acima torna-se

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^0 f(x)(-dx) + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(x) dx + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt \end{aligned} \quad (18.26)$$

Os outros coeficientes de Fourier são derivados de modo similar. O coeficiente  $a_n$  pode ser escrito

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

Empregando-se a mudança de variável que conduz à Equação 18.26, podemos expressar a equação acima como

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^0 f(x) \cos(-n\omega_0 x)(-dx) + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(x) \cos n\omega_0 x dx + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \end{aligned} \quad (18.27)$$

Mais uma vez seguindo o desenvolvimento acima, podemos escrever a equação para o coeficiente  $b_n$  como

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 f(t) \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

A mudança de variável acima resulta em

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^0 f(x) \sin(-n\omega_0)(-dx) + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{-2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(x) \sin n\omega_0 t dx + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (18.28)$$

A análise anterior indica que a série de Fourier para uma função periódica par consiste somente de um termo constante e termos em cosseno. Portanto, se  $f(t)$  é par,  $b_n = 0$  e, das equações 18.19 e 18.23, nota-se que  $c_n$  são reais e  $\theta_n$  são múltiplos de  $180^\circ$ .

**Simetria da Função Ímpar.** Uma função é ímpar se

$$f(t) = -f(-t) \quad (18.29)$$

Um exemplo de uma função ímpar é  $\sin n\omega_0 t$ . Outro exemplo é a forma de onda da Figura 18.7a. Seguindo-se o desenvolvimento matemático que conduziu às equações 18.26 a 18.28, podemos mostrar que, para uma função ímpar, os coeficientes de Fourier são

$$a_0 = 0 \quad (18.30)$$

$$a_n = 0 \quad \text{para todo } n > 0 \quad (18.31)$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (18.32)$$

Portanto, se  $f(t)$  é ímpar,  $a_n = 0$  e, das equações 18.19 e 18.23, percebe-se que  $c_n$  são puramente imaginários e  $\theta_n$  são múltiplos ímpares de  $90^\circ$ .

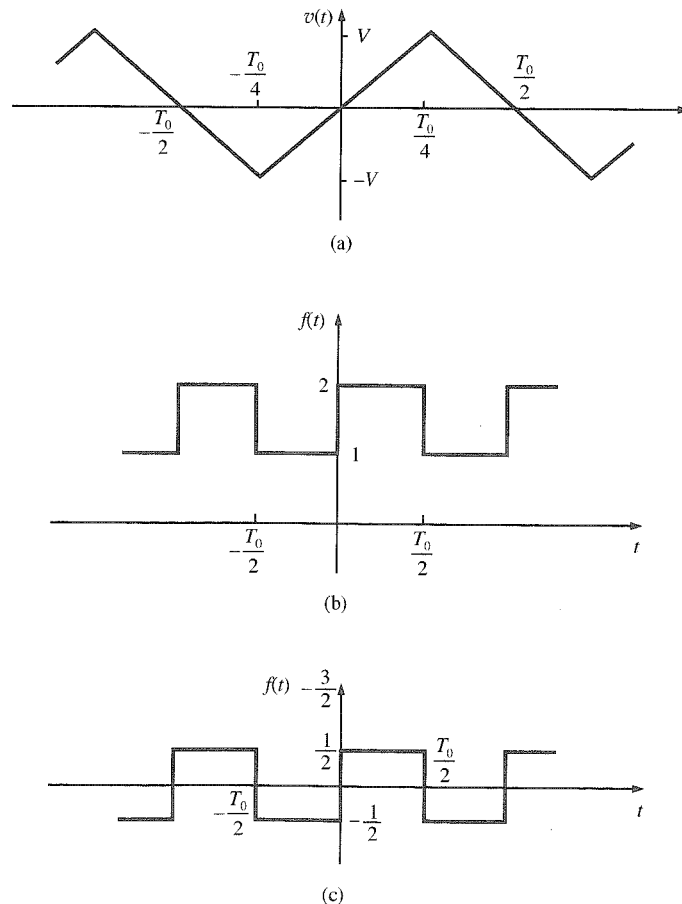


Figura 18.7 Três formas de onda; (a) e (c) possuem simetria de meia-onda.

**Simetria de Meia-Onda.** Uma função tem *simetria de meia-onda* se

$$f(t) = -f\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \quad (18.23)$$

Basicamente, essa equação afirma que cada ciclo é uma versão invertida do meio-ciclo adjacente; isto é, se a forma de onda de  $-T_0/2$  a 0 for invertida, ela é idêntica à forma de onda de 0 a  $T_0/2$ . A forma de onda mostrada na Figura 18.7a possui simetria de meia-onda.

Mais uma vez, podemos derivar as expressões para os coeficientes de Fourier nesse caso repetindo o desenvolvimento matemático que conduziu às equações para simetria da função par usando a mudança da variável  $t = x + T_0/2$  e a Equação 18.33. Os resultados desse desenvolvimento são as seguintes equações:

$$a_0 = 0 \quad (18.34)$$

$$a_n = b_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par} \quad (18.35)$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad \text{para } n \text{ ímpar} \quad (18.36)$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \quad \text{para } n \text{ ímpar} \quad (18.37)$$

As equações a seguir são freqüentemente úteis para determinar os coeficientes trigonométricos das séries de Fourier:

$$\begin{aligned} \int \sin ax \, dx &= -\frac{1}{a} \cos ax \\ \int \cos ax \, dx &= \frac{1}{a} \sin ax \\ \int x \sin ax \, dx &= \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{1}{a} x \cos ax \\ \int x \cos ax \, dx &= \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{1}{a} x \sin ax \end{aligned} \quad (18.38)$$

### Exemplo 18.5

Desejamos determinar a série trigonométrica de Fourier para o sinal periódico da Figura 18.3.

A forma de onda exibe uma simetria de função par e, portanto,

$$a_n = 0$$

$$b_n = 0 \quad \text{para todo } n$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad n \neq 0 \\ &= \frac{4}{T} \left( \int_0^{T/4} V \cos n\omega_0 t \, dt - \int_0^{T/2} V \cos n\omega_0 t \, dt \right) \\ &= \frac{4}{n\omega_0 T} \left( \left. \sin n\omega_0 t \right|_0^{T/4} - \left. \sin n\omega_0 t \right|_{T/4}^{T/2} \right) \\ &= \frac{4V}{n\omega_0 T} \left( \sin \frac{n\pi}{2} - \sin n\pi + \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \frac{8V}{n2\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ ímpar} \\ &= \frac{4V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ ímpar} \end{aligned}$$



O leitor deve comparar tal resultado com o obtido no Exemplo 18.1. Note que essa função possui simetria de meia-onda. ■

### Exemplo 18.6

Vamos determinar a expansão trigonométrica da série de Fourier para a forma de onda mostrada na Figura 18.7a.

A função não somente apresenta uma simetria de função ímpar, mas também possui simetria de meia-onda. Portanto, é necessário determinar somente os coeficientes  $b_n$  para  $n$  ímpar. Note que

$$v(t) = \begin{cases} \frac{4Vt}{T_0} & 0 \leq t \leq T_0/4 \\ 2V - \frac{4Vt}{T_0} & T_0/4 < t < T_0/2 \end{cases}$$

Os coeficientes  $b_n$  são então

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/4} 0 \frac{4Vt}{T_0} \sin n\omega_0 t dt + \frac{4}{T_0} \int_{T_0/4}^{T_0/2} \left(2V - \frac{4Vt}{T_0}\right) \sin n\omega_0 t dt$$

O cálculo dessas integrais é enfadonho, apesar de simples. Nesse caso, elas resultam em

$$b_n = \frac{8V}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \text{ para } n \text{ ímpar}$$

Dessa forma, a expansão da série de Fourier é

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{8V}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\omega_0 t$$

### Exemplo 18.7

Desejamos determinar a expansão trigonométrica da série de Fourier da forma de onda da Figura 18.7b. Note que essa forma de onda possui um valor médio de  $3/2$ . Portanto, em vez de determinarmos a expansão das séries de Fourier de  $f(t)$ , iremos determinar a série de Fourier para  $f(t) - 3/2$ , que é a forma de onda mostrada na Figura 18.7c. Essa última forma de onda possui simetria de meia-onda. A função é também ímpar e, portanto,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{1}{2} \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T_0} \left( \frac{-1}{n\omega_0} \cos n\omega_0 t \right) \Big|_0^{T_0/2} \\ &= \frac{-2}{n\omega_0 T_0} (\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{2}{n\pi} n \text{ ímpar} \end{aligned}$$

Portanto, a expansão das séries de Fourier para  $f(t) - 3/2$  é

$$f(t) - \frac{3}{2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$

ou

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$

## Exercícios

**E18.5** Determine o tipo de simetria das formas de onda das figuras E18.2 e E18.4.

*Resp.:* Figura E18.2, simetria par; Figura E18.4, simetria de meia-onda.

**E18.6** Determine a série trigonométrica de Fourier para a forma de onda de tensão da Figura E18.2.

$$\text{Resp.: } v(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \left( 2 \sin \frac{2\pi n}{3} - \sin \frac{\pi n}{3} \right) \cos \frac{\pi n}{3} t \text{ V.}$$

**E18.7** Determine a série trigonométrica de Fourier para a forma de onda de tensão da Figura E18.4.

$$\text{Resp.: } v(t) = 2 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} t + \frac{2}{n\pi} (2 - \cos n\pi) \sin \frac{n\pi}{2} t \text{ V.}$$

Tentamos ressaltar as vantagens de reconhecer a simetria de uma forma de onda. No entanto, é interessante notar que qualquer sinal  $f(t)$  pode ser decomposto em dois componentes: um componente par  $f_e(t)$  e um componente ímpar  $f_o(t)$ <sup>1</sup>. Em outras palavras,

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \quad (18.39)$$

A partir dessa equação, podemos escrever

$$f(-t) = f_e(-t) + f_o(-t)$$

No entanto, para uma função par  $f_e(-t) = f_e(t)$  e para uma função ímpar  $f_o(-t) = -f_o(t)$ . Assim

$$f(-t) = f_e(t) - f_o(t) \quad (18.40)$$

Resolvendo-se as equações 18.39 e 18.40 para os componentes pares e ímpares do sinal, tem-se

$$f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] \quad (18.41)$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] \quad (18.42)$$

Vamos agora indicar como essas equações podem ser usadas para determinar os coeficientes de Fourier de uma forma de onda periódica.

### Exemplo 18.8

Vamos determinar os coeficientes trigonométricos da série de Fourier para a forma de onda da Figura 18.8a através das equações 18.35 e 18.36.

Um período da função é mostrado na Figura 18.8b. A Figura 18.8b-g é usada para calcular as funções par e ímpar  $f_e(t)$  e  $f_o(t)$ . Note que

$$f_e(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{\pi} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

e

$$f_o(t) = -\frac{1}{2} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Da forma de onda original vemos que  $\omega_0 = 2\pi/2\pi = 1$  e o valor médio de  $f(t) = 0$  e desse modo  $a_0 = 0$ . Para  $f_e(t)$ ,

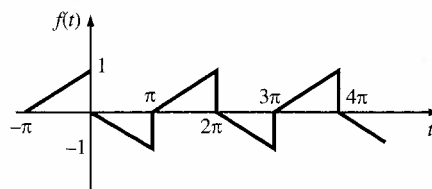
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} \left( -\frac{t}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \cos nt \, dt \\ &= \frac{-2}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nt \, dt \end{aligned}$$

1 N.T.: Os subíndices  $e$  e  $o$  surgem das palavras inglesas *even* (par) e *odd* (ímpar). No restante deste capítulo, manteremos essa notação.

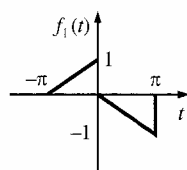
$$= \frac{-2}{\pi^2} \left( \frac{1}{n^2} \cos nt + \frac{t}{n} \operatorname{sen} nt \right)_0^\pi + \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{n} \operatorname{sen} nt \right)_0^\pi$$

$$= 0 \text{ para } n \text{ par}$$

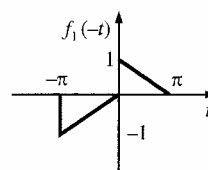
$$= \frac{4}{\pi^2 n^2} \text{ para } n \text{ ímpar}$$



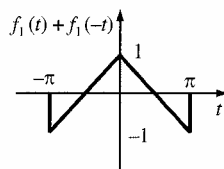
(a)



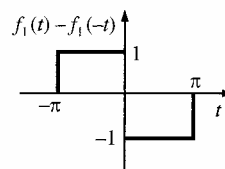
(b)



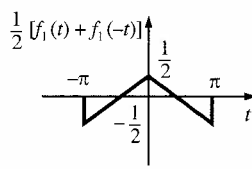
(c)



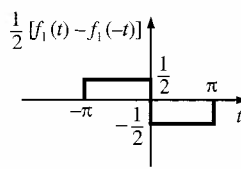
(d)



(e)



(f)



(g)

**Figura 18.8** Figuras usadas no Exemplo 18.8.

Para  $f_o(t)$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi -\frac{1}{2} \operatorname{sen} nt \, dt \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi n} (\cos nt)_0^\pi \\ &= 0 \quad \text{para } n \text{ par} \\ &= \frac{-2}{\pi n} \quad \text{para } n \text{ ímpar} \end{aligned}$$

Apesar de o uso da técnica empregada no exemplo acima não fornecer necessariamente uma alternativa viável para o cálculo de coeficientes trigonométricos de Fourier, ela na verdade fornece uma visão adicional ao examinarmos formas de onda à procura de simetria. ■

## Análise PSPICE

Quando uma análise transiente é executada pelo PSPICE, uma análise de Fourier pode também ser executada. O comando de controle para a análise de Fourier é

```
.FOUR FREQ 0V1 <0V2 0V3 ....>
```

onde .FOUR indica que uma análise de Fourier está sendo requerida, FREQ é a frequência fundamental da forma de onda e OV representa a(s) variável(eis) de interesse. O comando de controle para a análise de Fourier segue o comando de controle da análise transiente, que conforme visto no Capítulo 7, é da forma

```
.TRAN TSTEP TSTOP TSTART TMAX
```

A análise de Fourier é executada dentro de um intervalo de  $TSTOP - 1/FREQ$  até TSTOP. Para conseguir máxima exatidão, TMAX deve ser igual ao período da forma de onda dividido por 100 (ou seja,  $1/100 FREQ$ ).

A fim de facilitar o uso do PSPICE, a rede que é usada em uma análise de série de Fourier é uma fonte de tensão em paralelo com um resistor de  $1 \Omega$ . A fonte de tensão define a forma de onda em particular que está sendo investigada, e o resultado da análise é o valor dc da forma de onda e a determinação das primeiras nove harmônicas.

Por causa do modo como o algoritmo do PSPICE seleciona um ângulo de referência, devemos normalizar a magnitude e a fase dos componentes calculados analiticamente para fazer uma comparação direta entre os componentes calculados e aqueles gerados pelo PSPICE. Os componentes de magnitude são normalizados dividindo-se todos os componentes pela magnitude da fundamental, e os componentes de fase são normalizados subtraindo-se do ângulo de fase de cada elemento o ângulo de fase da fundamental. Um exemplo dessa normalização é mostrado abaixo.

| Número de Harmônicas | Componentes de Fourier | Componente Normalizado | Ângulo de Fase | Ângulo de Fase Normalizado |
|----------------------|------------------------|------------------------|----------------|----------------------------|
| 1                    | 1,949                  | 1                      | 70,396         | 0                          |
| 2                    | 1,856                  | 0,9524                 | 50,792         | -19,6                      |
| 3                    | 1,708                  | 0,8762                 | 31,188         | -39,208                    |
| 4                    | 1,511                  | 0,775                  | 11,584         | -58,812                    |

### Exemplo 18.9

Considere a forma de onda da Figura 18.9. Vamos usar PSPICE para determinar o nível dc da forma de onda e das primeiras nove harmônicas.

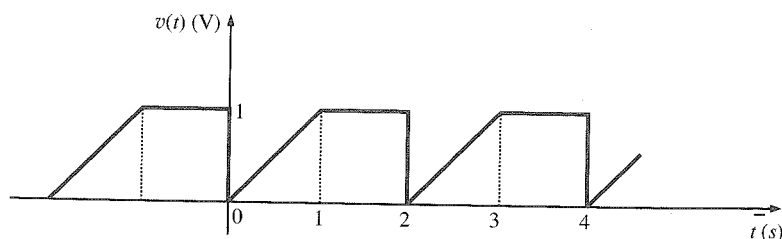


Figura 18.9 Forma de onda usada no Exemplo 18.9.

O programa PSPICE é

```
EXAMPLE 18.9
V1 1 0 PWL(0 0 1 1 2 1)
R1 1 0 1
.OPTIONS LIMPTS=201 ITL5=1000
.TRAN .01 2 0 .02
.FOUR .5 V(1)
.END
```

O primeiro comando indica que 201 pontos são usados para especificar a forma de onda e 1.000 iterações são usadas para convergir para uma solução. Ambos os valores são mínimos e valores maiores são normalmente necessários para obter uma solução com boa exatidão.

A saída do programa é

FOURIER COMPONENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(1)

DC COMPONENT=7.474811E-01

| HARMONIC NO | FREQUENCY (HZ) | FOURIER COMPONENT | NORMALIZED COMPONENT | PHASE (DEG) | NORMALIZED PHASE (DEG) |
|-------------|----------------|-------------------|----------------------|-------------|------------------------|
| 1           | 5.000E-01      | 3.800E-01         | 1.000E+00            | -1.469E+02  | 0.000E+00              |
| 2           | 1.000E+00      | 1.592E-01         | 4.189E-01            | -1.782E+02  | -3.131E+01             |
| 3           | 1.500E+00      | 1.095E-01         | 2.882E-01            | -1.654E+02  | -1.856E+01             |
| 4           | 2.000E+00      | 7.963E-02         | 2.095E-01            | -1.764E+02  | -2.950E+01             |
| 5           | 2.500E+00      | 6.487E-02         | 1.707E-01            | -1.683E+02  | -2.144E+01             |
| 6           | 3.000E+00      | 5.313E-02         | 1.398E-01            | -1.746E+02  | -2.768E+01             |
| 7           | 3.500E+00      | 4.621E-02         | 1.216E-01            | -1.686E+02  | -2.168E+01             |
| 8           | 4.000E+00      | 3.990E-02         | 1.050E-01            | -1.727E+02  | -2.587E+01             |
| 9           | 4.500E+00      | 3.593E-02         | 9.454E-02            | -1.679E+02  | -2.102E+01             |

Note que apesar de o nível dc ser claramente 0,75, o programa produz 0,7475. Tal inexatidão pode ser corrigida com mais pontos e iterações.

### Exemplo 18.10

Vamos fazer uma análise de Fourier usando PSPICE na forma de onda mostrada na Figura 18.6.

O programa PSPICE é

EXAMPLE 18.10

.OPTIONS LIMP TS=701 ITL5=10000

V1 1 PWL(0 0 3.1415 3.1416 3.1416 0 3.1417 -3.1416  
+6.2 831 -3.1416 6.2832 0 )

R1 1 0 1

.TRAN .01 6.2832 0 .062832

.FOUR .1592V(1)

.END

A saída do programa é

FOURIER COMPONENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(1)

DC COMPONENT=7.872032E-01

| HARMONIC NO | FREQUENCY (HZ) | FOURIER COMPONENT | NORMALIZED COMPONENT | PHASE (DEG) | NORMALIZED PHASE (DEG) |
|-------------|----------------|-------------------|----------------------|-------------|------------------------|
| 1           | 1.592E-01      | 3.065E+00         | 1.000E+00            | -1.170E+01  | 0.000E+00              |
| 2           | 3.184E-01      | 4.999E-01         | 1.631E-01            | -1.794E+02  | -1.677E+02             |
| 3           | 4.776E-01      | 1.002E+00         | 3.269E-01            | -3.188E+00  | 8.512E+00              |
| 4           | 6.368E-01      | 2.500E-01         | 8.156E-02            | -1.789E+02  | -1.672E+02             |
| 5           | 7.960E-01      | 6.001E-01         | 1.958E-01            | -9.979E-01  | 1.070E+01              |
| 6           | 9.552E-01      | 1.667E-01         | 5.438E-02            | -1.783E+02  | -1.666E+02             |
| 7           | 1.114E+00      | 4.285E+00         | 1.398E-01            | 2.698E-01   | 1.197E+01              |
| 8           | 1.274E+00      | 1.250E+00         | 4.079E-02            | -1.777E+02  | -1.660E+02             |
| 9           | 1.433E+00      | 3.333E+00         | 1.088E-01            | 1.229E+00   | 1.293E+01              |

Essa análise parece ser mais exata por causa do número maior de pontos e iterações. ■

## Deslocamento no Tempo

Vamos agora examinar o efeito do deslocamento no tempo de uma forma de onda periódica  $f(t)$  definida pela equação

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Note que

$$\begin{aligned} f(t-t_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0(t-t_0)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{-jn\omega_0 t_0}) e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (18.43)$$

Uma vez que  $e^{-jn\omega_0 t_0}$  corresponde a uma fase deslocada, os coeficientes de Fourier da função deslocada no tempo são os coeficientes de Fourier da função original com o ângulo deslocado de um valor diretamente proporcional à frequência. Portanto, o deslocamento de tempo no domínio do tempo corresponde ao deslocamento de fase no domínio da frequência.

### Exemplo 18.11

Vamos atrasar a forma de onda da Figura 18.3 no tempo de um quarto de período e calcular a série de Fourier.

A forma de onda da Figura 18.3 atrasada de  $T_0/4$  é mostrada na Figura 18.10. Uma vez que o atraso é de  $T_0/4$ ,

$$n\omega_0 t_d = n \frac{2\pi}{T_0} \frac{T_0}{4} = n \frac{\pi}{2} = n 90^\circ$$

Portanto, usando-se a Equação 18.43 e os resultados do Exemplo 18.1, os coeficientes de Fourier para a forma de onda deslocada no tempo são

$$c_n = \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \angle -n 90^\circ \quad n \text{ ímpar}$$

e logo,

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos(n\omega_0 t - n 90^\circ)$$

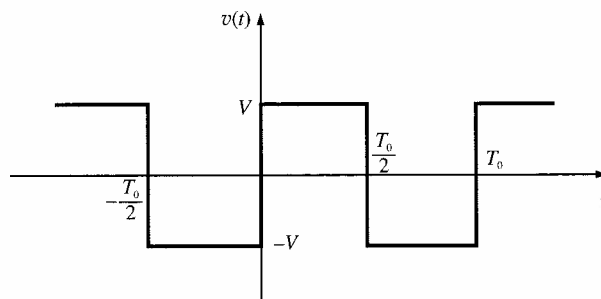
Se calcularmos os coeficientes de Fourier para a forma de onda deslocada no tempo da Figura 18.10, obtemos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 V e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} V e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{2V}{jn\pi} \quad \text{para } n \text{ ímpar} \end{aligned}$$

Portanto,

$$c_n = \frac{2V}{n\pi} \angle -90^\circ \quad n \text{ ímpar}$$

Uma vez que  $n$  é ímpar, podemos mostrar que essa expressão é equivalente àquela obtida acima. ■



**Figura 18.10** Forma de onda da Figura 18.3 deslocada no tempo de  $T_0/4$ .

De um modo geral, podemos calcular o deslocamento de fase em graus usando a expressão

$$\text{deslocamento de fase (graus)} = \omega_0 t_d = (360^\circ) \frac{t_d}{T_0} \quad (18.44)$$

tal que um deslocamento no tempo de um quarto de período corresponda a um deslocamento de fase de  $90^\circ$ .

Outro aspecto interessante do deslocamento no tempo é ilustrado a seguir. Considere a função  $f_1(t)$  que é diferente de zero no intervalo  $0 \leq t \leq T_0/2$  e é zero no intervalo  $T_0/2 \leq t \leq T_0$ . A fim de melhor ilustrar o problema, vamos assumir que  $f_1(t)$  seja a forma de onda triangular mostrada na Figura 18.11a.  $f_1(t)$  ( $t - T_0/2$ ) é então conforme mostrado na Figura 18.11b. Então a função  $f(t)$  definida como

$$f(t) = f_1(t) - f_1\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \quad (18.45)$$

é como mostrado na Figura 18.11c. Note que  $f(t)$  possui simetria de meia-onda. Além disso, note que se

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega_0 t}$$

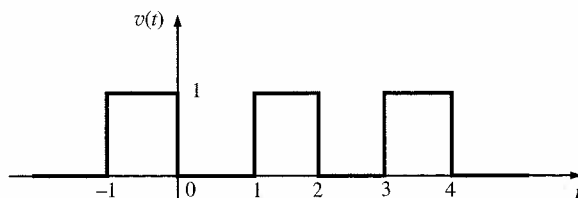
então

$$\begin{aligned} f(t) = f_1(t) - f_1\left(t - \frac{T_0}{2}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (1 - e^{-jn\pi}) e^{jn\omega_0 t} \\ &= \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2c_n e^{jn\omega_0 t} & n \text{ ímpar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \end{aligned} \quad (18.46)$$

Portanto, vemos que qualquer função com simetria de meia-onda pode ser expressa na forma da Equação 18.45, onde a série de Fourier é definida pela Equação 18.46, e  $c_n$  são os coeficientes de Fourier para  $f_1(t)$ .

### Exercício

**E18.8** Se a forma de onda da Figura E18.1 for atrasada de 1 segundo, obtemos a forma de onda da Figura E18.8. Calcule os coeficientes exponenciais de Fourier para a forma de onda da Figura E18.8 e mostre que eles diferem dos coeficientes para a forma de onda da Figura E18.1 de um ângulo de  $n(180^\circ)$ .



**Figura E18.8**

$$\text{Resp.: } c_0 = \frac{1}{2}, c_n = -\left(\frac{1 - e^{-jn\pi}}{j2\pi n}\right)$$

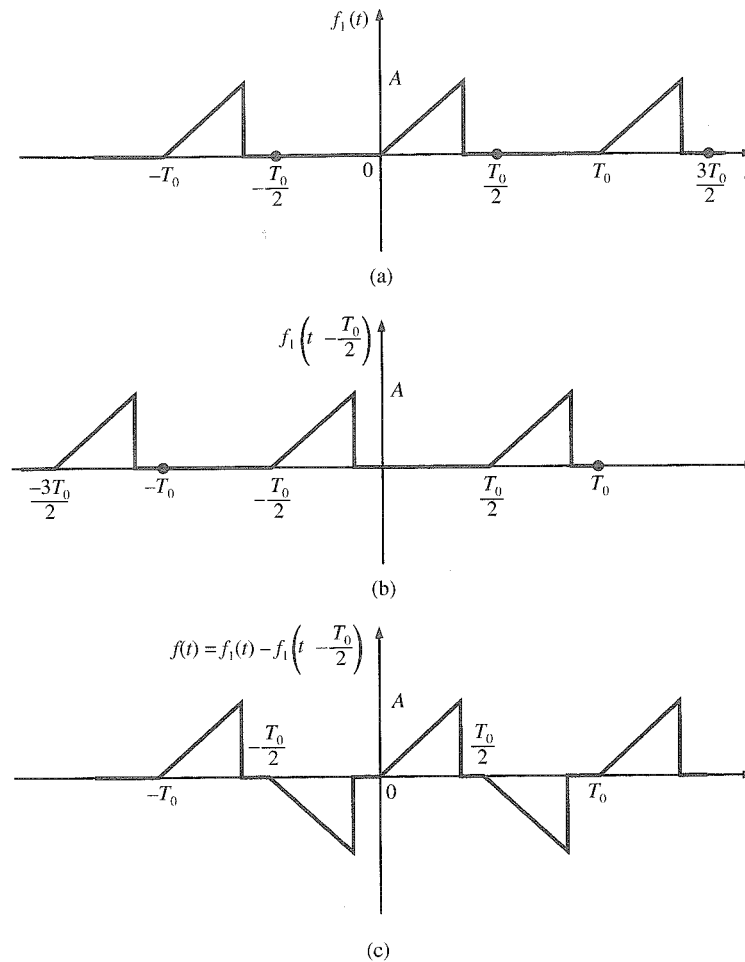
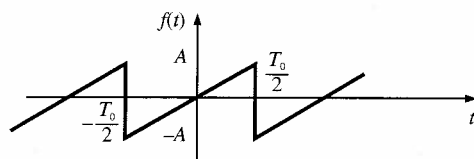


Figura 18.11 Formas de onda que ilustram a geração da simetria de meia-onda.

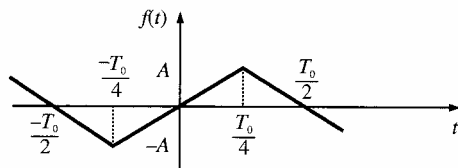
### Geração de Formas de Onda

A magnitude das harmônicas em uma série de Fourier é independente da escala de tempo para uma dada forma de onda. Portanto, as equações para uma variedade de formas de onda podem ser dadas de forma tabular sem expressar uma escala de tempo específica. A Tabela 18.1 contém um conjunto de ondas periódicas comuns onde a simetria foi usada para simplificar os coeficientes. Tais ondas podem ser usadas para gerar outras formas de onda. O nível de uma onda pode ser ajustado mudando-se o componente correspondente ao valor médio; o tempo pode ser deslocado ajustando-se o ângulo das harmônicas; e duas formas de onda podem ser somadas para produzir uma terceira; por exemplo, as formas de onda da Figura 18.12a e b podem ser somadas para se obter a forma de onda da Figura 18.12c.

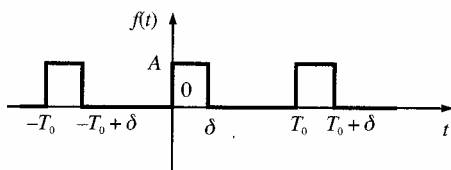


**Tabela 18.1** Séries de Fourier para algumas formas de onda comuns.

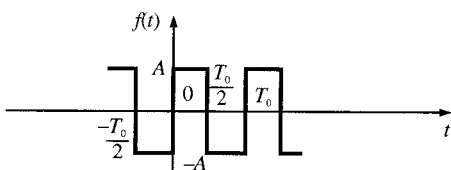
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2A}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$



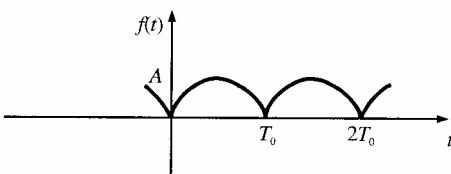
$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{8A}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\omega_0 t$$



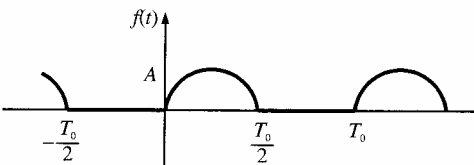
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \sin \frac{n\pi\delta}{T_0} e^{jn\omega_0[t-(\delta/2)]}$$



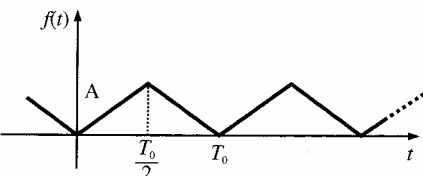
$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4A}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$



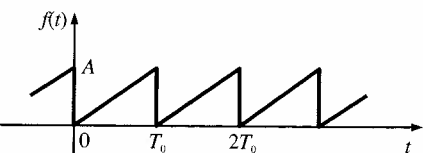
$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi(1-4n^2)} \cos n\omega_0 t$$



$$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{2A}{\pi(1-n^2)} \cos n\omega_0 t$$

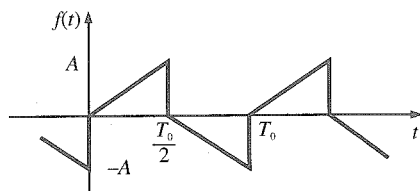


$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{-2A}{n^2 \pi^2} e^{jn\omega_0 t}$$

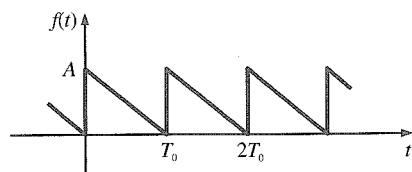


$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-A}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$

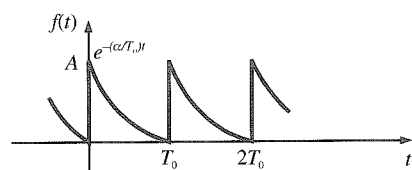
Tabela 18.1 Séries de Fourier para algumas formas de onda comuns. (Continuação)



$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4A}{\pi^2 n^2} \cos n\omega_0 t + \frac{2A}{\pi n} \sin n\omega_0 t$$



$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{\pi n} \sin n\omega_0 t$$



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A(1-e^{-\alpha})}{\alpha + j2\pi n} e^{jn\omega_0 t}$$

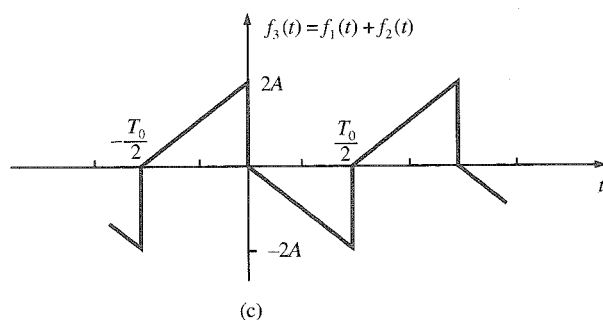
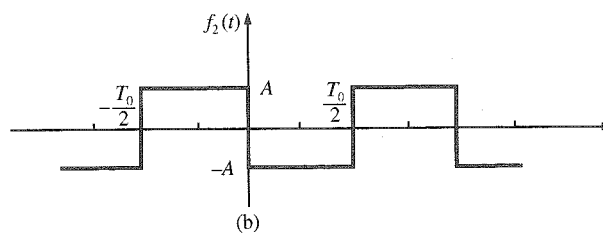
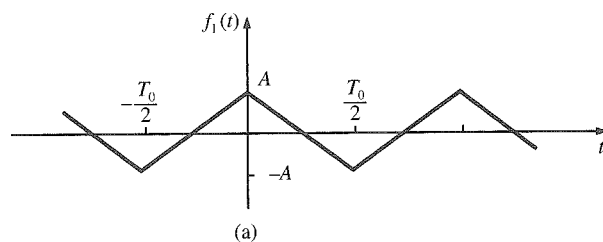
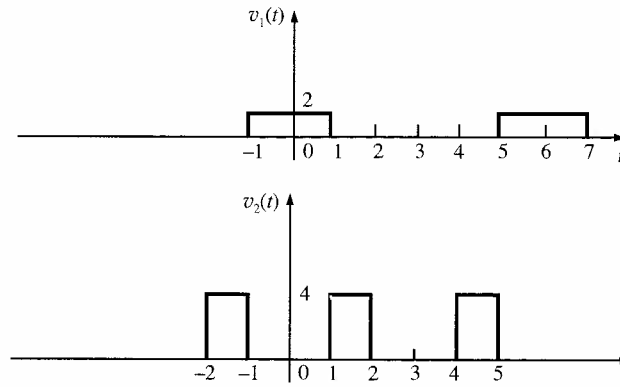


Figura 18.12 Exemplo de geração de forma de onda.

**Exercício**

**E18.9** Duas formas de onda periódicas são mostradas na Figura E18.9. Calcule a série exponencial de Fourier para cada forma de onda e então some os resultados para obter a série de Fourier para a forma de onda da Figura E18.2.

**Figura E18.9**

**Resp.:**

$$v_1(t) = \frac{2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} e^{jn\omega_0 t},$$

$$v_2(t) = \frac{4}{3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{4}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi}{3} - \sin \frac{2n\pi}{3} \right) e^{jn\omega_0 t}.$$

**Espectro de Frequência**

O *espectro de frequência* da função  $f(t)$ , expresso como uma série de Fourier, consiste de um gráfico da amplitude das harmônicas versus frequência, o qual chamamos de *espectro de amplitude*, e um gráfico da fase das harmônicas versus frequência, chamado *espectro da fase*. Uma vez que os componentes da frequência são discretos, os espectros são chamados *espectros de barras* ou *de linhas*. Tais espectros ilustram o conteúdo de frequência do sinal. Gráficos do espectro da amplitude e da fase são baseados nas equações 18.1, 18.3 e 18.7 e representam a amplitude e fase do sinal em frequências específicas.

**Exemplo 18.12**

A série de Fourier para a forma de onda triangular mostrada na Figura 18.12c, com  $A = 5$ , é dada pela equação

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \left( \frac{20}{n\pi} \sin n\omega_0 t - \frac{40}{n^2 \pi^2} \cos n\omega_0 t \right)$$

Desejamos traçar o gráfico dos primeiros quatro termos do espectro de amplitude e fase para tal sinal.

Uma vez que  $D_n/\theta_n = a_n - jb_n$ , os primeiros quatro termos para esse sinal são

$$D_1/\theta_1 = -\frac{40}{\pi^2} - j\frac{20}{\pi} = 7,5/-122^\circ \quad D_5/\theta_5 = -\frac{40}{25\pi^2} - j\frac{20}{5\pi} = 1,3/-97^\circ$$

$$D_3/\theta_3 = -\frac{40}{9\pi^2} - j\frac{20}{3\pi} = 2,2/-102^\circ \quad D_7/\theta_7 = -\frac{40}{49\pi^2} - j\frac{20}{7\pi} = 0,91/-95^\circ$$

Portanto, os gráficos da amplitude e fase versus  $\omega$  são como mostrados na Figura 18.13. ■

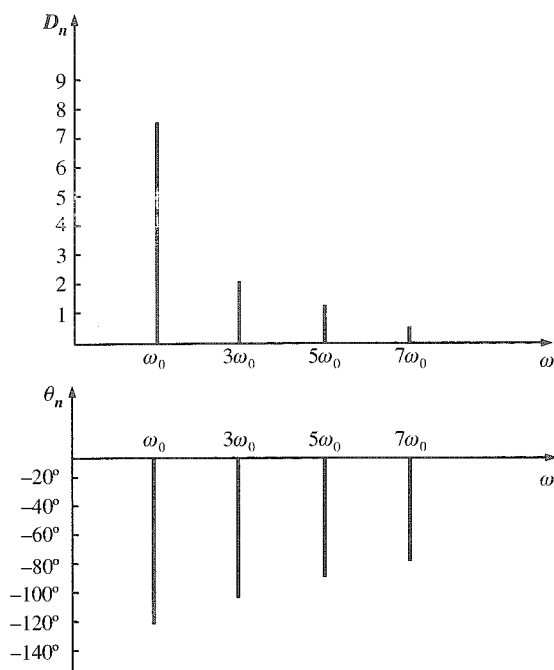


Figura 18.13 Espectros de amplitude e fase.

### Exercício

**E18.10** Determine a série trigonométrica de Fourier para a forma de onda da tensão da Figura E18.10 e trace os primeiros quatro termos do espectro da amplitude e fase para tal sinal.

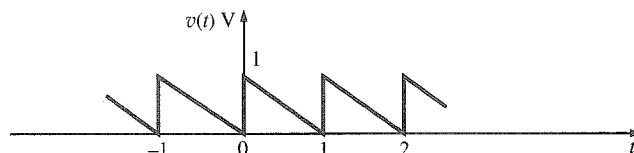


Figura E18.10

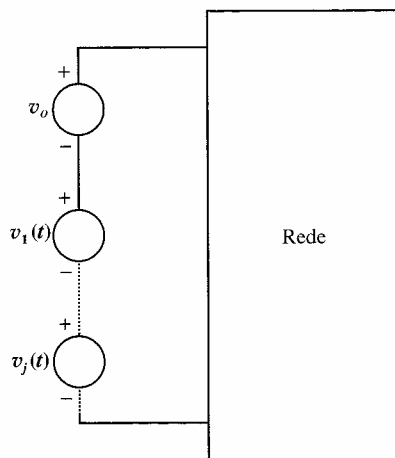
*Resp.:*  $a_0 = \frac{1}{2}$ ,  $D_1 = -j(1/\pi)$ ,  $D_2 = -j(1/2\pi)$ ,  $D_3 = -j(1/3\pi)$ ,  $D_4 = -j(1/4\pi)$ .

### Resposta da Rede em Estado Estacionário

Se um sinal periódico é aplicado a uma rede, a resposta da tensão ou corrente em estado estacionário em algum ponto do circuito pode ser encontrada da seguinte maneira. Primeiro, representamos a função forçante periódica por uma série de Fourier. Se a função forçante de entrada para uma rede for uma tensão, a entrada pode ser expressa na forma

$$v(t) = v_0 + v_1(t) + v_2(t) + \dots$$

e portanto representada no domínio do tempo como mostrado na Figura 18.14. Cada fonte possui sua própria amplitude e frequência. Em seguida, determinamos a resposta devida a cada componente de entrada da série de Fourier; isto é, usamos análise de fasores no domínio da frequência para determinar a resposta da rede devida a cada fonte. A resposta da rede devida a cada fonte no domínio da frequência é então transformada para o domínio do tempo. Finalmente, somamos as soluções no domínio do tempo devido a cada fonte usando o princípio da superposição para obter a série de Fourier para a resposta total da rede em *estado estacionário*.



**Figura 18.14** Rede com excitação periódica de tensão.

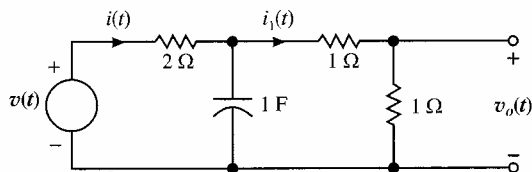
### Exemplo 18.13

Desejamos determinar a tensão em estado estacionário  $v_o(t)$  na Figura 18.15, caso a tensão de entrada  $v(t)$  seja dada pela expressão

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \left( \frac{20}{n\pi} \sin 2nt - \frac{40}{n^2\pi^2} \cos 2nt \right) \text{ V}$$

Note que essa fonte não possui termo constante e, portanto, seu valor dc é zero. A amplitude e fase para os primeiros quatro termos desse sinal são dados no Exemplo 18.12 e, portanto, o sinal  $v(t)$  pode ser escrito como

$$v(t) = 7,5 \cos(2t - 122^\circ) + 2,2 \cos(6t - 102^\circ) + 1,3 \cos(10t - 97^\circ) + 0,91 \cos(14t - 95^\circ) + \dots$$



**Figura 18.15** Circuito RC empregado no Exemplo 18.13.

Da rede chegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{\mathbf{V}}{2 + \frac{2/j\omega}{2 + 1/j\omega}} = \frac{\mathbf{V}(1 + 2j\omega)}{4 + 4j\omega} \\ \mathbf{I}_1 &= \frac{\mathbf{I}(1/j\omega)}{2 + 1/j\omega} = \frac{\mathbf{I}}{1 + 2j\omega} \\ \mathbf{V}_0 &= (1)\mathbf{I}_1 = 1 \cdot \frac{\mathbf{V}(1 + 2j\omega)}{4 + 4j\omega} \cdot \frac{1}{1 + 2j\omega} = \frac{\mathbf{V}}{4 + 4j\omega} \end{aligned}$$

Portanto, uma vez que  $\omega_0 = 2$ ,

$$\mathbf{V}_0(n) = \frac{\mathbf{V}(n)}{4 + j8n}$$

Os componentes individuais da saída devido aos componentes de entrada são então

$$V_0(\omega_0) = \frac{7,5/-122^\circ}{4 + j8} = 0,84/-185,4^\circ \text{ V}$$

$$V_0(3\omega_0) = \frac{2,2/-102^\circ}{4 + j24} = 0,09/-182,5^\circ \text{ V}$$

$$V_0(5\omega_0) = \frac{1,3/-97^\circ}{4 + j40} = 0,03/-181,3^\circ \text{ V}$$

$$V_0(7\omega_0) = \frac{0,91/-95^\circ}{4 + j56} = 0,016/-181^\circ \text{ V}$$

Dessa forma, a tensão de saída em estado estacionário  $v_o(t)$  pode ser escrita como

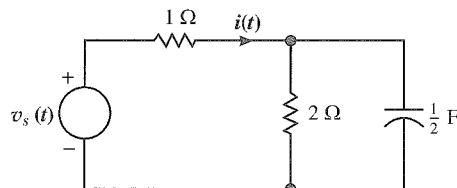
$$v(t) = 0,84 \cos(2t - 185,4^\circ) + 0,09 \cos(6t - 182,5^\circ) + 0,03 \cos(10t - 181,3^\circ) + 0,016 \cos(14t - 181^\circ) + \dots$$



### Exercício

**E18.11** Determine a expressão para a corrente em estado estacionário  $i(t)$  da Figura E18.11 caso a tensão de entrada  $v_s(t)$  seja dada pela expressão

$$v_s(t) = \frac{20}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-40}{\pi(4n^2 - 1)} \cos 2nt \text{ V}$$



**Figura E18.11**

$$\text{Resp.: } i(t) = 2,12 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-40}{\pi(4n^2 - 1)} \frac{1}{A_n} \cos(2nt - \theta_n) \text{ A.}$$

### Potência Média

Já mostramos que quando uma rede linear é excitada com um sinal periódico não-senoidal, tensões e correntes ao longo da rede são da forma

$$v(t) = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{v_n})$$

e

$$i(t) = I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{i_n})$$

Se empregarmos a convenção passiva de sinal e assumirmos que a tensão sobre um elemento e a corrente através dele são dadas pelas equações acima, então, da Equação 11.6,

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) i(t) dt
 \end{aligned}$$

Note que o integrando envolve o produto de duas séries infinitas. No entanto, determinar a potência média é na realidade mais simples do que parece. Primeiro, note que o produto  $V_{dc}I_{dc}$  quando integrado sobre um período e dividido pelo período é simplesmente  $V_{dc}I_{dc}$ . Segundo, o produto entre  $V_{dc}$  e qualquer harmônica da corrente ou entre  $I_{dc}$  e qualquer harmônica da tensão quando integrados sobre um período é zero. Terceiro, o produto de quaisquer duas harmônicas *diferentes* da tensão e da corrente quando integrado sobre um período é zero. Finalmente, somente termos diferentes de zero resultam em produtos da tensão e corrente na *mesma* frequência. Assim, usando-se o desenvolvimento matemático que segue a Equação 11.6, chegamos a

$$P = V_{dc} I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_{v_n} - \theta_{i_n}) \quad (18.47)$$

### Exemplo 18.14

Na rede da Figura 18.16,  $v(t) = 42 + 16 \cos(377t + 30^\circ) + 12 \cos(754t - 20^\circ)$  V. Desejamos calcular a corrente  $i(t)$  e determinar a potência média absorvida pela rede.

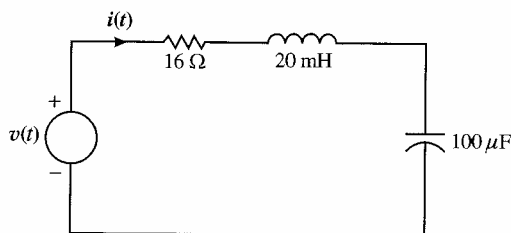


Figura 18.16 Rede usada no Exemplo 18.14.

Em regime permanente, o capacitor comporta-se como um circuito aberto para sinais dc, e portanto  $I_{dc} = 0$ . Para a frequência  $\omega = 377$  rad/s,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{j\omega C} &= \frac{1}{j(377)(100)10^{-6}} = -j26,53 \Omega \\
 j\omega L &= j(377)(20)10^{-3} = j7,54 \Omega
 \end{aligned}$$

Desse modo

$$I_{377} = \frac{16/30^\circ}{16 + j7,54 - j26,53} = 0,64/79,88^\circ \text{ A}$$

Para a frequência  $\omega = 754$  rad/s,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{j\omega C} &= \frac{1}{j(754)(100)10^{-6}} = -j13,26 \Omega \\
 j\omega L &= j(754)(20)10^{-3} = j15,08 \Omega
 \end{aligned}$$

Desse modo

$$I_{754} = \frac{12/-20^\circ}{16 + j15,08 - j13,26} = 0,75/-26,49^\circ \text{ A}$$

Portanto, a corrente  $i(t)$  é

$$i(t) = 0,64 \cos(377t + 79,88^\circ) + 0,75 \cos(754t - 26,49^\circ) \text{ A}$$

e a potência média absorvida pela rede é

$$P = (42)(0) + \frac{(16)(0,64)}{2} \cos(30^\circ - 79,88^\circ) + \frac{(12)(0,75)}{2} \cos(-20^\circ + 26,49^\circ) \\ = 7,77 \text{ W}$$

### Exercício

**E18.12** Nos terminais de um quadripolo, a tensão  $v(t)$  e a corrente  $i(t)$  são dadas pelas seguintes expressões:

$$v(t) = 64 + 36 \cos(377t + 60^\circ) - 24 \cos(754t + 102^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 1,8 \cos(377t + 45^\circ) + 1,2 \cos(754t + 100^\circ) \text{ A}$$

Determine a potência média absorvida pela rede.

**Resp.:**  $P_{\text{média}} = 16,91 \text{ W}$ .

## 18.2 A Transformada de Fourier

As seções anteriores deste capítulo ilustraram que as séries exponenciais de Fourier podem ser usadas para representar sinais periódicos. Vamos considerar agora uma técnica para representar sinais aperiódicos.

Suponhamos que um sinal aperiódico  $f(t)$  é como o mostrado na Figura 18.17a. Construímos agora um novo sinal  $f_p(t)$  que é idêntico a  $f(t)$  no intervalo  $-T/2$  a  $T/2$  porém é *periódico* com um período  $T$ , como mostrado na Figura 18.17b. Uma vez que  $f_p(t)$  é *periódico*, ele pode ser representado no intervalo  $-\infty$  a  $\infty$  por uma série exponencial de Fourier.

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (18.48)$$

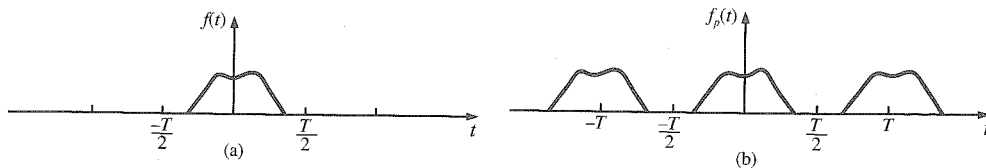
onde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (18.49)$$

e

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (18.50)$$

Aqui notamos que se tomarmos o limite da função  $f_p(t)$  quando  $T \rightarrow \infty$ , o sinal periódico da Figura 18.17b se aproxima do sinal aperiódico da Figura 18.17a; isto é, os sinais repetitivos centrados entre  $-T$  e  $+T$  na Figura 18.17b são movidos ao infinito.



**Figura 18.17** Sinais aperiódicos e periódicos.

O espectro de linha para o sinal periódico existe em frequências harmônicas ( $n\omega_0$ ) e o espaçamento entre as harmônicas é

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (18.51)$$

Como  $T \rightarrow \infty$ , as linhas no espectro da frequência para  $f_p(t)$  se aproximam cada vez mais,  $\Delta\omega$  aproxima-se de  $d\omega$ , e  $n\omega_0$  pode assumir qualquer valor de  $\omega$ . Sob tais condições, o espectro de linha torna-se um espectro contínuo. Uma vez que  $T \rightarrow \infty$ ,  $c_n \rightarrow 0$  na Equação 18.49, vamos examinar o produto  $c_n T$  onde



$$\mathbf{c}_n T = \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

No limite, quando  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\mathbf{c}_n T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

que, em vista da discussão anterior, pode ser escrita como

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\mathbf{c}_n T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Essa integral é a transformada de Fourier de  $f(t)$ , que denotaremos por  $\mathbf{F}(\omega)$ , e desse modo

$$\mathbf{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (18.52)$$

Similarmente,  $f_p(t)$  pode ser expressa como

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathbf{c}_n T) e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathbf{c}_n T) e^{jn\omega_0 t} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

que no limite como  $T \rightarrow \infty$  se torna

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (18.53)$$

As equações 18.52 e 18.53 constituem o que é chamado de *par de transformada de Fourier*. Uma vez que  $\mathbf{F}(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $f(t)$ , e  $f(t)$  é a transformada inversa de  $\mathbf{F}(\omega)$ , elas são normalmente expressas na forma

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (18.54)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{F}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (18.55)$$

### Alguns Pares Importantes de Transformadas

Existem diversos pares importantes de transformadas de Fourier. A seguir, vamos derivar algumas delas e então apresentar as mais comuns em forma de tabela.

#### Exemplo 18.15

Desejamos derivar a transformada de Fourier para o pulso de tensão mostrado na Figura 18.18a.

Usando-se a Equação 18.54, a transformada de Fourier é

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\omega) &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} V e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{V}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\delta/2}^{\delta/2} \\ &= V \frac{e^{-j\omega\delta/2} - e^{+j\omega\delta/2}}{-j\omega} \\ &= V\delta \frac{\sin(\omega\delta/2)}{\omega\delta/2} \end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Fourier para a função

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq -\frac{\delta}{2} \\ V & -\frac{\delta}{2} < t \leq \frac{\delta}{2} \\ 0 & \frac{\delta}{2} < t < \infty \end{cases}$$

é

$$F(\omega) = V\delta \frac{\text{sen}(\omega\delta/2)}{\omega\delta/2}$$

Um gráfico dessa função é mostrado na Figura 18.18c. Vamos explorar esse exemplo um pouco mais. Considere agora o trem de pulso mostrado na Figura 18.18b. Usando-se as técnicas descritas anteriormente, podemos mostrar que os coeficientes dessa forma de onda são

$$c_n = \frac{V\delta \text{sen}(n\omega_0\delta/2)}{T_0 n\omega_0\delta/2}$$

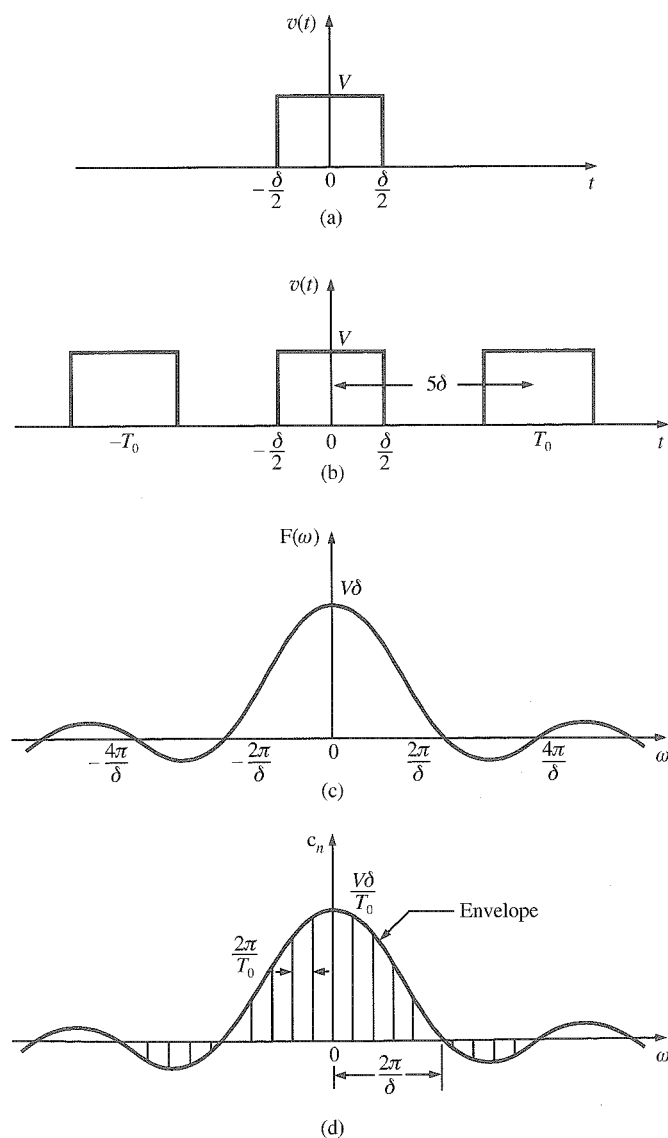


Figura 18.18 Pulsos e seus espectros.

O espectro de linha para  $T_0 = 5\delta$  é mostrado na Figura 18.18d.

O que essas equações e figuras nesse exemplo indicam é que quando  $T \rightarrow \infty$  e a função periódica se torna aperiódica, as linhas no espectro discreto se tornam mais densas com amplitude menor. Consequentemente, o espectro muda de um espectro de linha para um espectro contínuo. Note que o envelope para o espectro discreto possui a mesma forma que o espectro contínuo. Uma vez que a série de Fourier representa a amplitude e fase do sinal a frequências específicas, a transformada de Fourier também especifica o conteúdo de frequência de um sinal. ■

### Exemplo 18.16

A transformada de Fourier da função impulso unitário  $\delta(t - a)$  é

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) e^{-j\omega t} dt$$

Usando-se a propriedade de amostragem do impulso unitário, chegamos a

$$F(\omega) = e^{-j\omega a}$$

e se  $a = 0$ , então

$$F(\omega) = 1$$

Note que  $F(\omega)$  para  $f(t) = \delta(t)$  é constante para todas as frequências. Esta é uma propriedade importante, como veremos mais adiante. ■

### Exemplo 18.17

Desejamos determinar a transformada de Fourier da função  $f(t) = e^{j\omega_0 t}$ .

Nesse caso, notamos que se  $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ , então

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Portanto,  $f(t) = e^{j\omega_0 t}$  e  $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$  representam um par de transformadas de Fourier. ■

### Exemplo 18.18

A transformada de Fourier da função  $f(t) = \cos \omega_0 t$  é

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Usando-se os resultados do Exemplo 18.17, obtemos

$$F(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

### Exemplo 18.19

Vamos determinar a transformada de Fourier da função  $f(t) = e^{-at}u(t)$ .

A transformada de Fourier dessa função é

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt \\ &= \left. \frac{-1}{a + j\omega} e^{-at}e^{-j\omega t} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a + j\omega} \end{aligned}$$

para  $a > 0$  uma vez que  $e^{-at} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Um número de pares de transformada de Fourier úteis é mostrado na Tabela 18.2.

**Tabela 18.2** Pares de transformadas de Fourier.

| $f(t)$                                       | $F(\omega)$                                                     |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $\delta(t-a)$                                | $e^{-j\omega a}$                                                |
| $A$                                          | $2\pi A\delta(\omega)$                                          |
| $e^{j\omega_0 t}$                            | $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$                                 |
| $\cos \omega_0 t$                            | $\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$   |
| $\text{sen } \omega_0 t$                     | $j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0)$ |
| $e^{-at}u(t), a > 0$                         | $\frac{1}{a + j\omega}$                                         |
| $e^{-a t }, a > 0$                           | $\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$                                     |
| $e^{-at} \cos \omega_0 t u(t), a > 0$        | $\frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$              |
| $e^{-at} \text{sen } \omega_0 t u(t), a > 0$ | $\frac{\omega_0}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$                 |

### Exercício

**E18.13** Se  $f(t) = \text{sen } \omega_0 t$ , determine  $F(\omega)$ .

**Resp.:**  $F(\omega) = \pi j[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ .

### Algumas Propriedades da Transformada de Fourier

Vamos agora examinar algumas das propriedades da transformada de Fourier definidas pela equação

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Usando-se a identidade de Euler, podemos escrever essa função como

$$F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) \quad (18.56)$$

onde

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (18.57)$$

$$B(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen } \omega t dt \quad (18.58)$$

Da Equação 18.56 notamos que

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (18.59)$$

onde

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (18.60)$$

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \quad (18.61)$$

Dadas as definições acima, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} A(\omega) &= A(-\omega) \\ B(\omega) &= -B(-\omega) \\ \mathbf{F}(-\omega) &= \mathbf{F}^*(\omega) \end{aligned} \quad (18.62)$$

As equações 18.62 simplesmente afirmam que  $A(\omega)$  é uma função par de  $\omega$ ,  $B(\omega)$  é função ímpar de  $\omega$  e  $\mathbf{F}(\omega)$  determinado em  $-\omega$  é o conjugado complexo de  $\mathbf{F}(\omega)$ . Portanto,  $|\mathbf{F}(\omega)|$  é uma função par de  $\omega$  e  $q(\omega)$  é uma função ímpar de  $\omega$ . Algumas propriedades adicionais da transformada de Fourier são agora apresentadas rapidamente.

**Linearidade.** Se  $\mathcal{F}[f_1(t)] = \mathbf{F}_1(\omega)$  e  $\mathcal{F}[f_2(t)] = \mathbf{F}_2(\omega)$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[af_1(t) + bf_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} af_1(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} bf_2(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= a\mathbf{F}_1(\omega) + b\mathbf{F}_2(\omega) \end{aligned} \quad (18.63)$$

**Mudança de Escala no Tempo.** Se  $\mathcal{F}[f(t)] = \mathbf{F}(\omega)$ , então se  $a > 0$ ,

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt$$

Se  $x = at$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x/a} \frac{dx}{a} \\ &= \frac{1}{a} \mathbf{F}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned} \quad (18.64)$$

e se  $a < 0$ , então seguindo-se o mesmo desenvolvimento anterior,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)] &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(x)e^{-j\omega x/a} \frac{dx}{a} \\ &= -\frac{1}{a} \mathbf{F}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned} \quad (18.65)$$

**Deslocamento no Tempo.** Se  $\mathcal{F}[f(t)] = \mathbf{F}(\omega)$ , então

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$$

Se  $x = t - t_0$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \mathbf{F}(\omega) \end{aligned} \quad (18.66)$$

**Modulação.** Se  $\mathcal{F}[f(t)] = \mathbf{F}(\omega)$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \mathbf{F}(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (18.67)$$

**Diferenciação.** Se  $f(t)$  é uma função contínua em qualquer intervalo finito, é absolutamente integrável, e sua primeira derivada é contínua por partes e absolutamente integrável, então

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-j\omega t} dt$$

Usando-se integração por partes, obtemos

$$\mathcal{F}[f'(t)] = f(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} j\omega f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Uma vez que  $f(t)$  é absolutamente integrável,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |f(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t)| = 0$$

e portanto

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega) \quad (18.68)$$

Aplicando-se essa técnica sob as condições listadas acima repetidamente, obtém-se

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega) \quad (18.69)$$

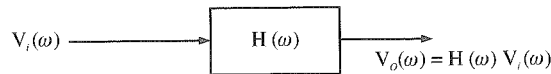
É importante notar que a Equação 18.68 não garante a existência de  $\mathcal{F}[f'(t)]$ . Ela simplesmente afirma que se a transformada existe, ela é dada pela Equação 18.68.

**Convolução no Tempo.** Se  $\mathcal{A}[f_1(t)] = F_1(\omega)$  e  $\mathcal{A}[f_2(t)] = F_2(\omega)$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx\right] &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x) \int_{x=-\infty}^{\infty} f_2(t-x) e^{-j\omega t} dt dx \end{aligned}$$

Se  $u = t - x$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx\right] &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x) \int_{u=-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-j\omega(u+x)} du dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-j\omega x} \int_{u=-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-j\omega u} du dx \\ &= F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned} \quad (18.70)$$



**Figura 18.19** Representação da propriedade de convolução do tempo.

Devemos notar cuidadosamente a propriedade de convolução da transformada de Fourier. Com referência à Figura 18.19, essa propriedade afirma que se  $V_i(\omega) = \mathcal{A}[v_i(t)]$ ,  $H(\omega) = \mathcal{A}[h(t)]$  e  $V_o(\omega) = \mathcal{A}[v_o(t)]$ , então

$$V_o(\omega) = H(\omega) V_i(\omega) \quad (18.71)$$

onde  $V_i(\omega)$  representa o sinal de entrada,  $H(\omega)$  é a função de transferência da rede e  $V_o(\omega)$  representa o sinal de saída. A Equação 18.71 assume claramente que as condições iniciais da rede são zero.

A Tabela 18.3 fornece uma pequena lista de algumas propriedades da transformada de Fourier.

**Tabela 18.3** Propriedades da transformada de Fourier.

| $f(t)$                 | $F(\omega)$                                         |
|------------------------|-----------------------------------------------------|
| $Af(t)$                | $AF(\omega)$                                        |
| $f_1(t) \pm f_2(t)$    | $F_1(\omega) \pm F_2(\omega)$                       |
| $f(at)$                | $\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right), a > 0$ |
| $f(t-t_0)$             | $e^{-j\omega t_0} F(\omega)$                        |
| $e^{j\omega t_0} f(t)$ | $F(\omega - \omega_0)$                              |

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d^n f(t)}{dt^n} & (j\omega)^n F(\omega) \\
 t^n f(t) & (j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \\
 f(t) \cos \omega_0 t & \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \\
 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx & F_1(\omega) + F_2(\omega) \\
 f_1(t) f_2(t) & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) F_2(\omega - x) dx
 \end{array}$$

**Exemplo 18.20**

Vamos determinar a transformada de Fourier da função  $f(t - t_0) = e^{-(t - t_0)} u(t - t_0)$ .

Por definição,

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

que pode ser escrita usando-se a propriedade do deslocamento no tempo como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} u(t) e^{-j\omega t} dt
 \end{aligned}$$

que, a partir dos resultados do Exemplo 18.19, é

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \frac{e^{-j\omega t_0}}{1 + j\omega}$$

**Exemplo 18.21**

Vamos determinar a transformada de Fourier da função

$$f(t) = \frac{d}{dt} [e^{-at} u(t)] = -ae^{-at} u(t) + e^{-at} \delta(t)$$

Então

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [-ae^{-at} u(t) + e^{-at} \delta(t)] e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{-a}{a + j\omega} + 1 \\
 &= \frac{j\omega}{a + j\omega}
 \end{aligned}$$

A transformada poderia também ser determinada usando-se a propriedade de diferenciação; isto é, se

$$\mathcal{F}[e^{-at} u(t)] = \frac{1}{a + j\omega}$$

então

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}(e^{-at} u(t))\right] = j\omega \left(\frac{1}{a + j\omega}\right) = \frac{j\omega}{a + j\omega}$$

## Exercícios

E18.14 Se  $\mathcal{A}[e^{-t}u(t)] = 1/(1+j\omega)$ , use a propriedade de mudança de escala no tempo da transformada de Fourier para determinar  $\mathcal{A}[e^{-at}u(t)]$ ,  $a > 0$ .

$$\text{Resp.: } \frac{1}{a+j\omega}.$$

E18.15 Use a propriedade  $\mathcal{A}[t^n f(t)] = j^n [d^n F(\omega)/d\omega^n]$  para determinar a transformada de Fourier de  $te^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$ .

$$\text{Resp.: } \frac{1}{(a+j\omega)^2}.$$

E18.16 Determine a saída  $v_o(t)$  na Figura E18.16, caso o sinal de entrada  $v_i(t) = e^{-t}u(t)$ , a resposta ao impulso da rede seja  $h(t) = e^{-2t}u(t)$  e todas as condições iniciais forem zero.

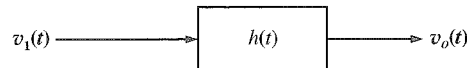


Figura E18.16

$$\text{Resp.: } v_o(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \text{ V.}$$

## Teorema de Parseval

O enunciado matemático do teorema de Parseval é

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (18.72)$$

Essa relação pode ser facilmente derivada como se segue:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(-\omega)t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

A importância do teorema de Parseval pode ser vista se imaginarmos que  $f(t)$  representa a corrente em um resistor de  $1 \Omega$ . Uma vez que  $f^2(t)$  é potência e a integral de potência sobre o tempo é energia, a Equação 18.72 mostra que podemos calcular essa energia normalizada tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

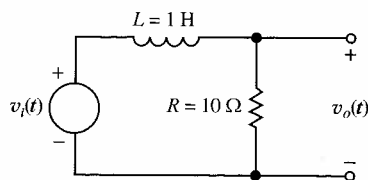
## Aplicações

Vamos agora aplicar algumas das coisas que aprendemos acerca da transformada de Fourier a problemas de circuitos.

## Exemplo 18.22

Usando-se técnicas de transformada, desejamos determinar  $v_o(t)$  na Figura 18.20, caso (a)  $v_i(t) = 5e^{-2t}u(t)$  V e (b)  $v_i(t) = 5 \cos 2t$  V.



**Figura 18.20** Circuito *RL* simples.

(a) Nesse caso, uma vez que  $v_i(t) = 5e^{-2t}u(t)$  V, então

$$\mathbf{V}_i(\omega) = \frac{5}{2 + j\omega} \text{ V}$$

$\mathbf{H}(\omega)$  para a rede é

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= \frac{R}{R + j\omega L} \\ &= \frac{10}{10 + j\omega} \end{aligned}$$

Da Equação 18.71,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_o(\omega) &= \mathbf{H}(\omega)\mathbf{V}_i(\omega) \\ &= \frac{50}{(2 + j\omega)(10 + j\omega)} \\ &= \frac{50}{8} \left( \frac{1}{2 + j\omega} - \frac{1}{10 + j\omega} \right) \text{ V} \end{aligned}$$

Dessa forma, da Tabela 18.3, vemos que

$$v_o(t) = 6,25[e^{-2t}u(t) - e^{-10t}u(t)] \text{ V}$$

(b) Nesse caso, uma vez que  $v_i(t) = 5 \cos 2t$ ,

$$\mathbf{V}_i(\omega) = 5\pi\delta(\omega - 2) + 5\pi\delta(\omega + 2) \text{ V}$$

A tensão de saída no domínio da frequência é então

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \frac{50\pi[\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)]}{(10 + j\omega)}$$

O uso da transformada inversa de Fourier nos dá

$$v_o(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{V}_o(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 50\pi \frac{\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)}{(10 + j\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

Empregando-se a propriedade de amostragem da função impulso unitário, obtemos

$$\begin{aligned} v_o(t) &= 25 \left( \frac{e^{j2t}}{10 + j2} + \frac{e^{-j2t}}{10 - j2} \right) \\ &= 25 \left( \frac{e^{j2t}}{10,2e^{j11,31^\circ}} + \frac{e^{-j2t}}{10,2e^{-j11,31^\circ}} \right) \\ &= 4,90 \cos(2t - 11,31^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

Esse resultado pode ser facilmente conferido usando-se análise de fasores. ■

### Exemplo 18.23

Considere a rede mostrada na Figura 18.21a. Essa rede representa um filtro passa-baixas simples como os mostrados no Capítulo 14. Desejamos ilustrar a influência dessa rede no sinal de entrada examinando as características de frequência do sinal de saída e o relacionamento entre a energia normalizada na entrada e na saída da rede.

A função de transferência da rede é

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{1/RC + j\omega} = \frac{5}{5 + j\omega} = \frac{1}{1 + 0,2j\omega}$$

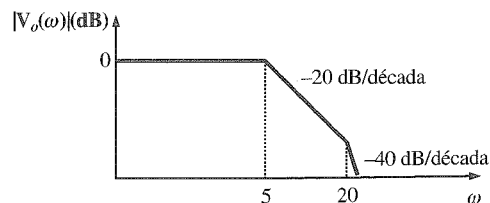
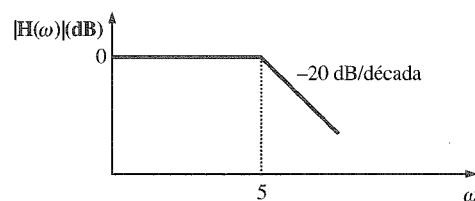
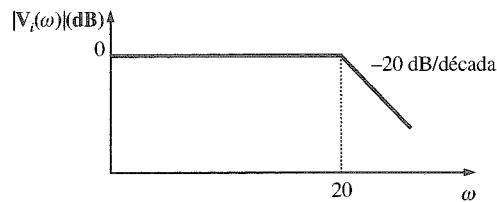
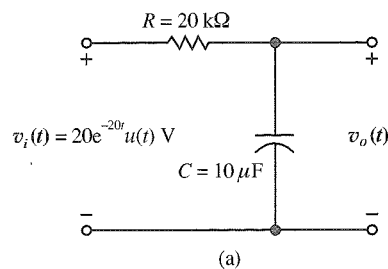
A transformada de Fourier do sinal de entrada é

$$V_i(\omega) = \frac{20}{20 + j\omega} = \frac{1}{1 + 0,05j\omega}$$

Então, usando-se a Equação 18.71, a transformada de Fourier da saída é

$$V_o(\omega) = \frac{1}{(1 + 0,2j\omega)(1 + 0,05j\omega)}$$

Usando-se as técnicas do Capítulo 14, notamos que o gráfico de magnitude da resposta em frequência (representado em escala logarítmica) para essas funções é mostrado na Figura 18.21b-d. Note que o filtro passa-baixas passa as frequências baixas do sinal de entrada, porém atenua as altas frequências.



**Figura 18.21** Filtro passa-baixas, sua característica de frequência e seu espectro de entrada e saída.

A energia normalizada na entrada do filtro é

$$\begin{aligned} W_i &= \int_0^{\infty} (20e^{-20t})^2 dt \\ &= \frac{400}{-40} e^{-40t} \Big|_0^{\infty} \\ &= 10 \text{ J} \end{aligned}$$

A energia normalizada na saída do filtro pode ser calculada usando-se o teorema de Parseval. Uma vez que

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \frac{100}{(5+j\omega)(20+j\omega)}$$

e

$$|\mathbf{V}_o(\omega)|^2 = \frac{10^4}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 400)}$$

$|\mathbf{V}_o(\omega)|^2$  é uma função par, e portanto

$$W_o = 2 \left( \frac{1}{2\pi} \right) \int_0^{\infty} \frac{10^4 d\omega}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 400)}$$

No entanto, podemos usar o fato de que

$$\frac{10^4}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 400)} = \frac{10^4/375}{\omega^2 + 25} - \frac{10^4/375}{\omega^2 + 400}$$

Então

$$\begin{aligned} W_o &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\infty} \frac{10^4/375}{\omega^2 + 25} d\omega - \int_0^{\infty} \frac{10^4/375}{\omega^2 + 400} d\omega \right) \\ &= \frac{10^4}{375} \left( \frac{1}{\pi} \right) \left[ \frac{1}{5} \left( \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{20} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= 2,0 \text{ J} \end{aligned}$$

■

O Exemplo 18.23 ilustra o efeito que  $\mathbf{H}(\omega)$  exerce sobre o espectro da frequência do sinal de entrada. De um modo geral,  $\mathbf{H}(\omega)$  pode ser selecionado para moldar tal espectro de alguma maneira especificada. Para ilustrar tal efeito, considere os espectros *ideais* de frequência mostrados na Figura 18.22. Na Figura 18.22a, é mostrado um espectro ideal de magnitude de entrada  $|\mathbf{V}_i(\omega)|$ ,  $|\mathbf{H}(\omega)|$  e o espectro da saída  $|\mathbf{V}_o(\omega)|$ , que são relacionados pela Equação 18.71, são mostrados na Figura 18.22b-e para filtros *ideais* passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa, respectivamente.

## Exercícios

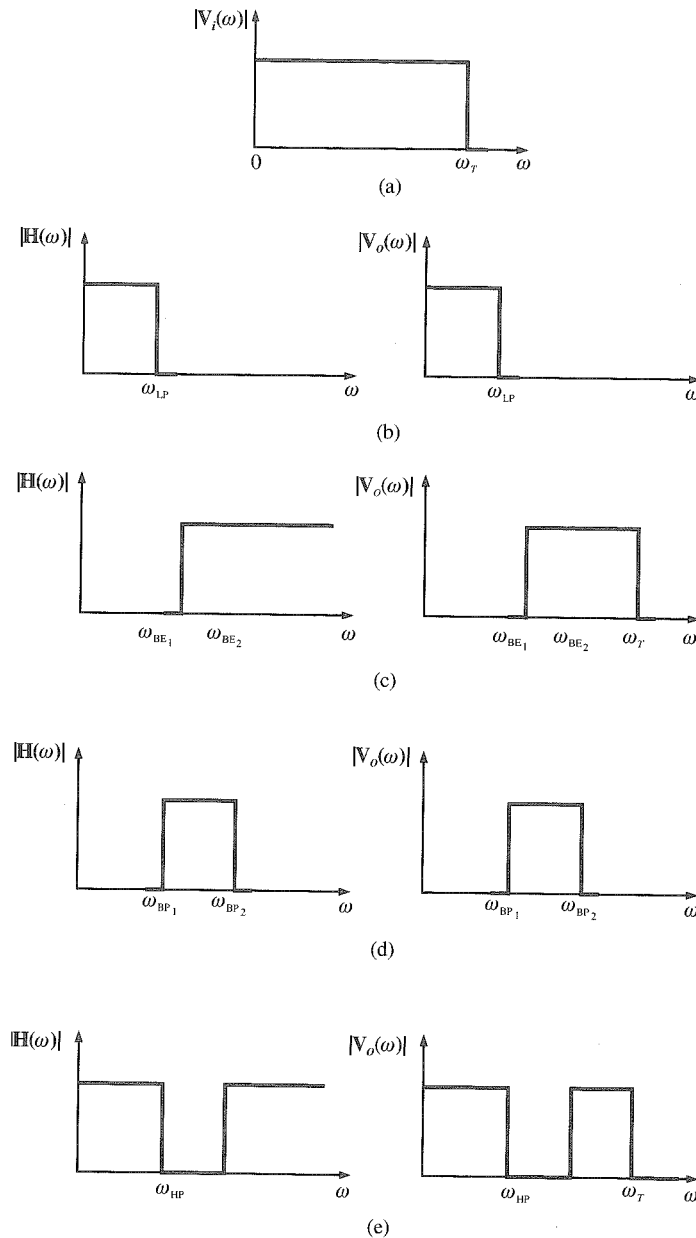
**E18.17** Calcule a energia total normalizada contida no sinal  $v_i(t) = e^{-2t}u(t)$  usando os métodos no domínio do tempo e no domínio da frequência.

**Resp.:**  $W_T = 0,25 \text{ J}$ .

**E18.18** Calcule a energia total normalizada contida no sinal  $v_1(t) = e^{-2t}u(t)$  no intervalo de frequência de 0 a 1 rad/s.

**Resp.:**  $W_T = 0,07 \text{ J}$ .

Notamos que, com o uso do teorema de Parseval, podemos calcular o conteúdo total de energia de um sinal tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Entretanto, trabalhar no domínio da frequência é mais flexível no sentido de que nesse domínio é possível precisar para determinado sinal o conteúdo de energia dentro de uma faixa específica de frequência.



**Figura 18.22** Espectros de freqüência para a entrada e saída de filtros ideais de passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa.

### 18.3 Resumo

Mostramos que a técnica da transformada de Fourier fornece meios de lidar com circuitos elétricos excitados por entradas periódicas. A série de Fourier de um sinal em particular pode ser expressa de diversas formas equivalentes. Se o sinal for periódico e tiver alguma simetria, essa simetria pode ser usada para simplificar o cálculo dos coeficientes de Fourier empregados para descrever a forma de onda. Concluímos que a resposta em estado estacionário de uma rede a uma entrada periódica pode ser obtida expressando-se a entrada como uma série de Fourier, determinando-se a resposta do circuito a cada componente da entrada e, finalmente, somando-se cada componente para determinar a resposta total da rede.

A transformada de Fourier é uma técnica que possibilita analisar circuitos excitados por sinais aperiódicos. Vários pares de transformadas de Fourier foram apresentados juntamente com algumas propriedades importantes da transformada de Fourier. Dois relacionamentos importantes do ponto de vista da análise de circuitos são o teorema de Parseval e a equação  $\mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{X}(\omega)$ , onde  $\mathbf{Y}(\omega)$  e  $\mathbf{X}(\omega)$  representam a transformada de Fourier da saída e entrada, respectivamente, e  $\mathbf{H}(\omega)$  é a função de transferência do circuito. Mostramos que o teorema de Parseval permite calcular a energia em um sinal no domínio da frequência e ainda determinar a quantidade de energia do sinal que está contida dentro de certo intervalo de frequências. A relação entrada-saída no domínio da frequência foi mostrada como sendo um meio eficaz de calcular a resposta do circuito para entradas aperiódicas.

## Pontos-Chave

- Uma função periódica satisfaz a relação  $f(t) = f(t + nT_0)$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ .
- Uma função periódica não-senoidal pode ser representada como a soma de funções senoidais.
- Uma série de Fourier pode ser expressa de forma exponencial ou trigonométrica.
- Uma função periódica que exibe simetria de função par pode ser expressa por uma série de Fourier contendo somente um termo constante e termos cossenoidais.
- Uma função periódica que exibe simetria de função ímpar pode ser expressa por uma série de Fourier contendo somente termos senoidais.
- O deslocamento no tempo de um sinal periódico no domínio do tempo corresponde ao deslocamento de fase no domínio da frequência.
- O espectro de frequência de uma função expressa como uma série de Fourier é chamado de espectro de linha, uma vez que os componentes aparecem em valores discretos de frequência.
- A resposta de uma rede a uma entrada periódica não-senoidal pode ser obtida expressando-se a entrada como uma série de Fourier, usando-se análise de fasores para determinar a resposta de cada fonte na série, transformando-se as respostas individuais para o domínio do tempo e aplicando-se o princípio da superposição.
- Os pares de transformadas de Fourier são expressos como

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{F}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- $\mathbf{V}_o(j\omega) = \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{V}_i(j\omega)$ , onde  $\mathbf{V}_i(j\omega)$  representa o sinal de entrada da rede,  $\mathbf{H}(j\omega)$  representa a função de transferência da rede e  $\mathbf{V}_o(j\omega)$  representa o sinal de saída da rede.
- O teorema de Parseval pode ser usado para calcular o conteúdo total de energia ou o conteúdo de energia sobre um intervalo específico de frequência de um sinal usando-se um enfoque no domínio do tempo ou no domínio da frequência.

## Problemas

18.1 Determine a série exponencial de Fourier para o trem de pulso mostrado na Figura P18.1.

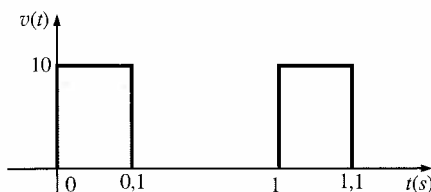


Figura P18.1

- 18.2 Determine a série exponencial de Fourier para o sinal mostrado na Figura P18.2.

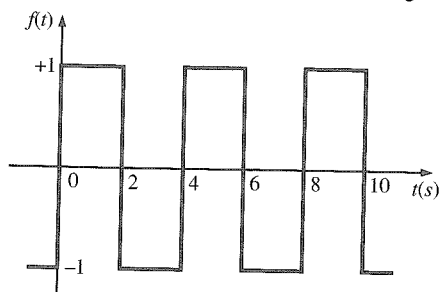


Figura P18.2

- 18.3 Determine a série exponencial de Fourier para o sinal periódico mostrado na Figura P18.3.

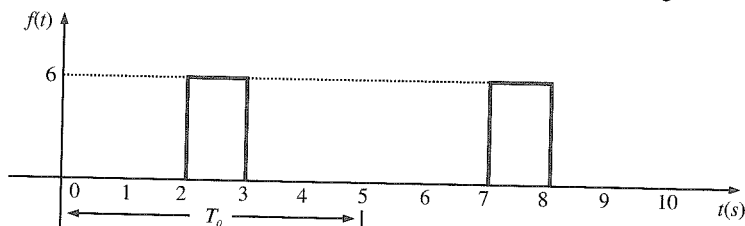


Figura P18.3

- 18.4 Calcule a série exponencial de Fourier para a forma de onda que é a soma das duas formas de ondas da Figura P18.4 calculando a série exponencial de Fourier das duas formas de onda e somando-as.

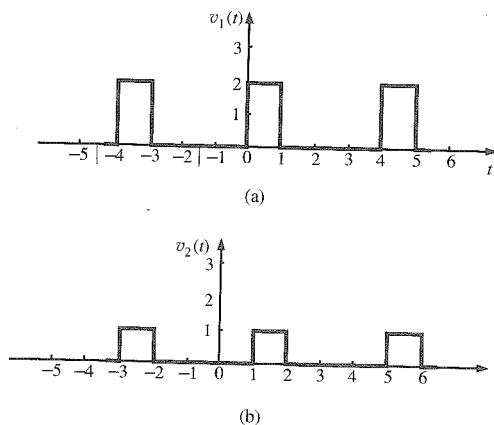


Figura P18.4

- 18.5 Utilize a técnica de transformada de Laplace para determinar os coeficientes da série exponencial de Fourier para a forma de onda da Figura P18.2.
- 18.6 Utilize a técnica de transformada de Laplace para determinar os coeficientes da série exponencial de Fourier para a forma de onda da Figura P18.6.

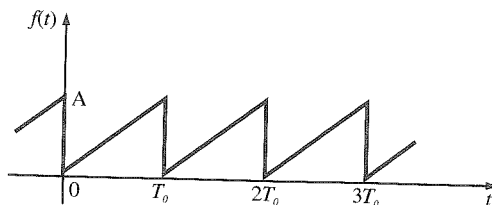


Figura P18.6

- 18.7 Utilize o método de derivadas para determinar os coeficientes da série exponencial de Fourier para a forma de onda da Figura P18.3.
- 18.8 Utilize o método de derivadas para determinar os coeficientes da série exponencial de Fourier para a forma de onda da Figura P18.8.

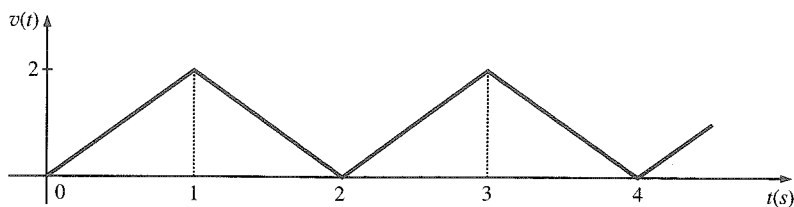


Figura P18.8

- 18.9 Utilize o PSPICE para determinar os coeficientes de Fourier para a forma de onda da Figura P18.16.
- 18.10 Utilize o PSPICE para determinar os coeficientes de Fourier para a forma de onda da Figura P18.25.
- 18.11 Utilize o PSPICE para determinar os coeficientes de Fourier para a forma de onda da Figura P18.24.
- 18.12 Dada a forma de onda da Figura P18.12, determine o tipo de simetria que existe, caso a origem seja selecionada em (a)  $l_1$  e (b)  $l_2$ .

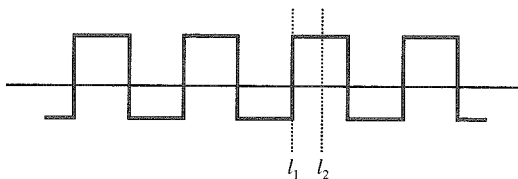


Figura P18.12

- 18.13 Que tipo de simetria é exibida pelas duas formas de onda da Figura P18.13?

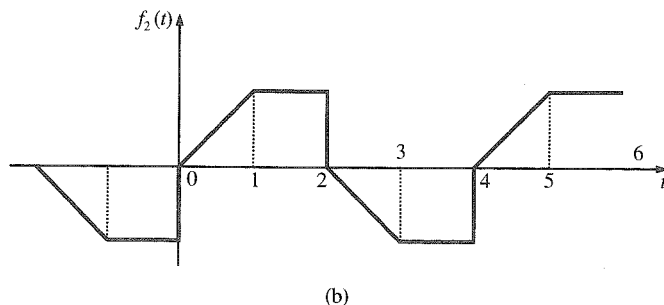
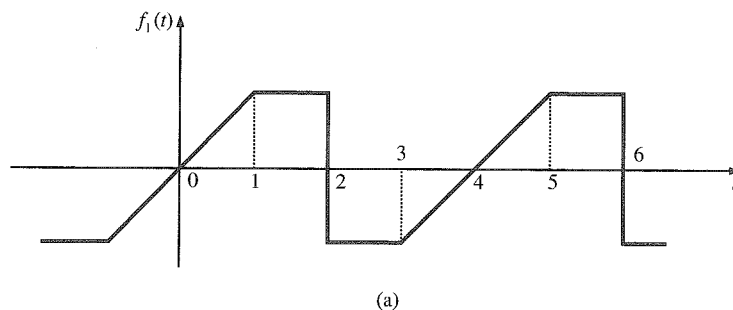


Figura P18.13

- 18.14 Derive a Equação 18.36.
- 18.15 Dada a forma de onda da Figura P18.15, mostre que

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-A}{n\pi} \sin \frac{2\pi n}{T_0} t$$

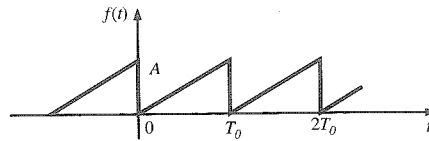


Figura P18.15

18.16 Derive a série trigonométrica de Fourier para a forma de onda mostrada na Figura P18.16.

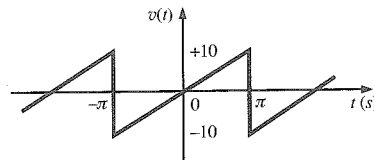


Figura P18.16

18.17 Determine os coeficientes trigonométricos da série de Fourier para a forma de onda da Figura P18.17.

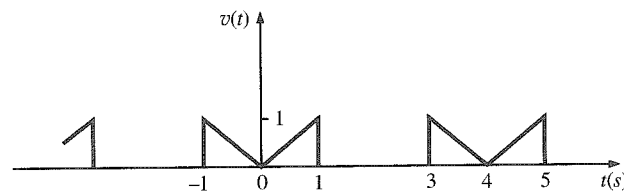


Figura P18.17

18.18 Determine os coeficientes trigonométricos da série de Fourier para a forma de onda da Figura P18.18.

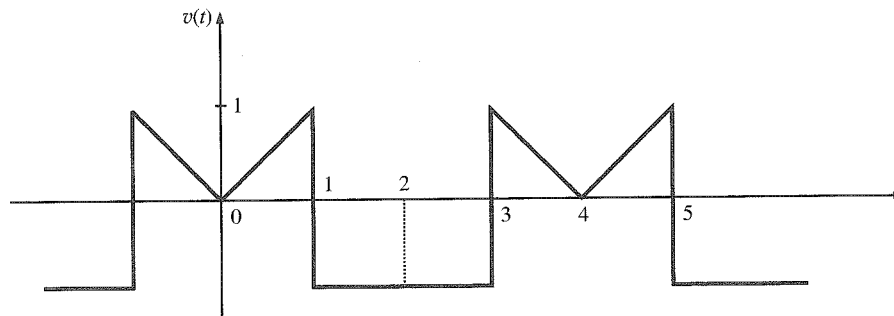


Figura P18.18

18.19 Determine os coeficientes trigonométricos da série de Fourier para a forma de onda da Figura P18.19.

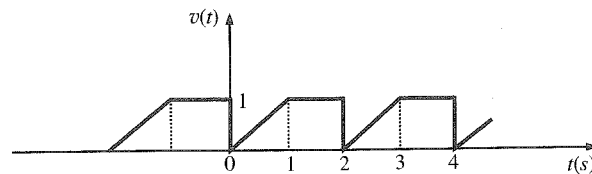


Figura P18.19

18.20 Determine os coeficientes trigonométricos da série de Fourier para a forma de onda da Figura P18.13a.



18.21 Derive a série trigonométrica de Fourier para a função  $v(t) = A \sin t$  como mostrado na Figura P18.21.

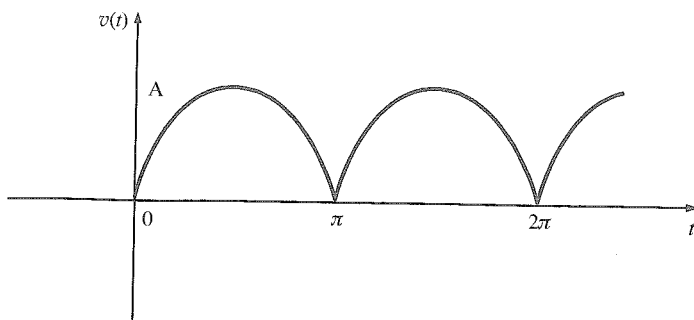


Figura P18.21

18.22 Derive a série trigonométrica de Fourier para a forma de onda mostrada na Figura P18.22.

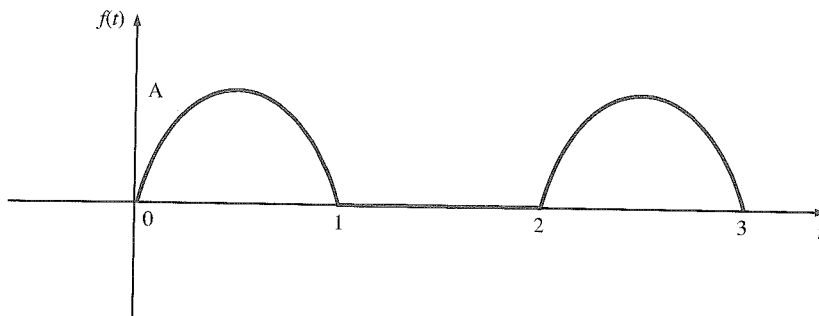


Figura P18.22

18.23 Determine a série trigonométrica de Fourier para a forma de onda mostrada na Figura P18.23.

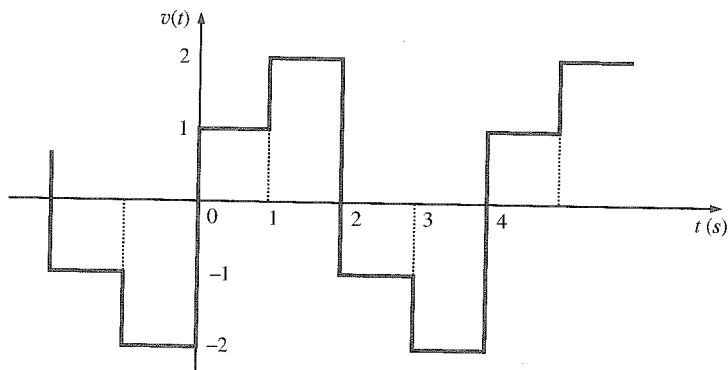


Figura P18.23

18.24 Derive a série trigonométrica de Fourier para a função mostrada na Figura P18.24.

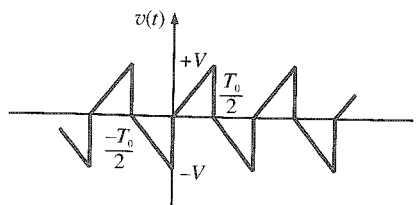
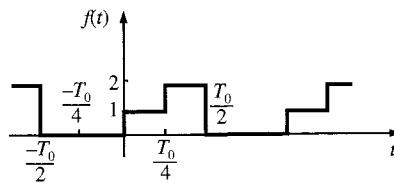


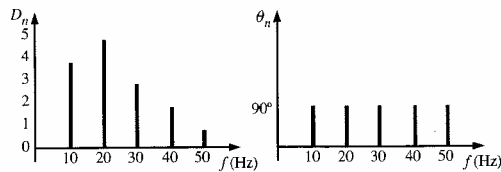
Figura P18.24

**18.25** Determine a série trigonométrica de Fourier para a forma de onda mostrada na Figura P18.25.



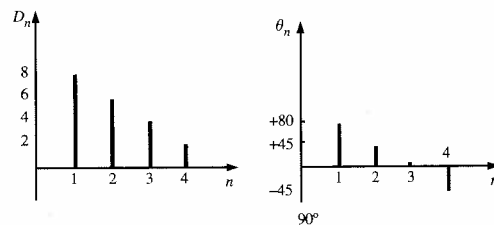
**Figura P18.25**

**18.26** O espectro de linha discreto para uma função periódica  $f(t)$  é mostrado na Figura P18.26. Determine a expressão para  $f(t)$ .



**Figura P18.26**

**18.27** O espectro da amplitude e da fase para uma função periódica  $v(t)$  que possui somente um pequeno número de termos é mostrado na Figura P18.27. Determine a expressão para  $v(t)$ , caso  $T_0 = 0,1$  s.

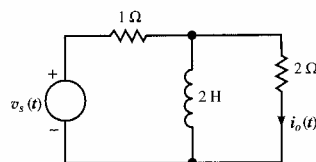


**Figura P18.27**

**18.28** Trace os primeiros quatro termos do espectro da amplitude e da fase para o sinal

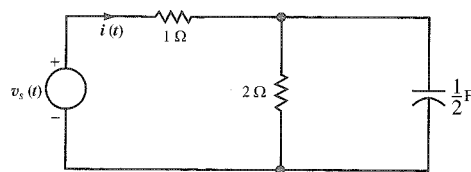
$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_0 t + \frac{6}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$

**18.29** Determine a resposta em estado estacionário da corrente  $i_o(t)$  no circuito mostrado na Figura P18.29, caso a tensão da entrada seja a descrita pela forma de onda mostrada no Problema 18.16.

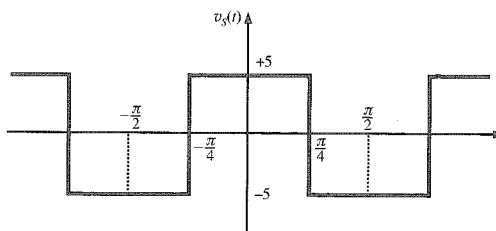


**Figura P18.29**

**18.30** Determine a corrente  $i(t)$  em regime permanente na rede da Figura P18.30a, caso o sinal de entrada seja o mostrado na Figura 18.30b.



(a)



(b)

Figura P18.30

18.31 Caso a tensão de entrada no Problema 18.29 seja

$$v_s(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 0,2\pi n t \text{ V}$$

determine a expressão para a corrente  $i_o(t)$  em regime permanente.

18.32 Determine os primeiros três termos da tensão em regime permanente  $v_o(t)$  na Figura P18.32, caso a tensão de entrada seja um sinal periódico da forma

$$v(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - 1) \sin nt \text{ V}$$

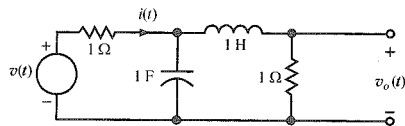
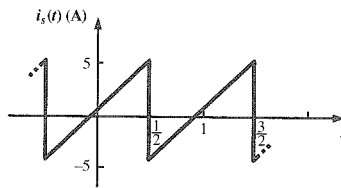
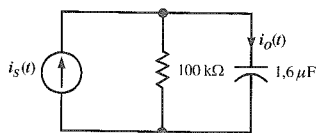


Figura P18.32

18.33 A corrente  $i_s(t)$  mostrada na Figura P18.33a é aplicada ao circuito mostrado na Figura P18.33b. Determine a expressão para a corrente em regime permanente  $i_o(t)$  usando as primeiras quatro harmônicas.



(a)



(b)

Figura P18.33

- 18.34** Determine a tensão em regime permanente  $v_o(t)$  na rede da Figura P18.34<sup>a</sup>, caso a corrente de entrada seja a dada na Figura P18.34b.

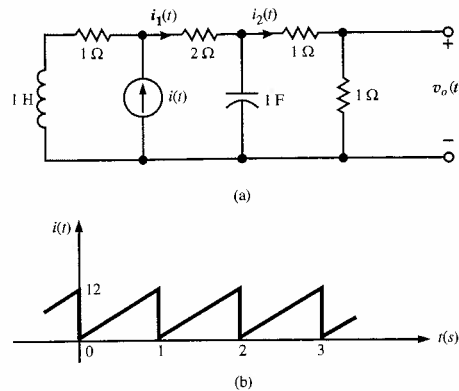


Figura P18.34

- 18.35** Determine a potência média absorvida pela rede da Figura P18.35, caso

$$v(t) = 12 + 6 \cos(377t - 10^\circ) + 4 \cos(754t - 60^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 0,2 + 0,4 \cos(377t - 150^\circ) - 0,2 \cos(754t - 80^\circ) + 0,1 \cos(113t - 60^\circ) \text{ A}$$

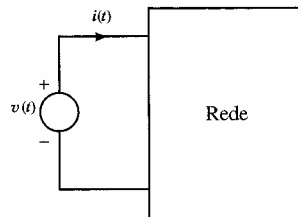


Figura P18.35

- 18.36** Determine a potência média absorvida pela rede da Figura P18.36, caso  $v(t) = 60 + 36 \cos(377t + 45^\circ) + 24 \cos(754t - 60^\circ) \text{ V}$ .

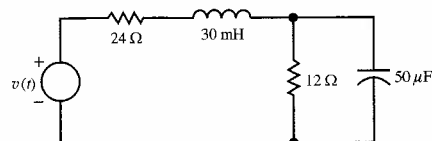


Figura P18.36

- 18.37** Determine a potência média dissipada pelo resistor de  $12\Omega$  na rede da Figura P18.36, caso  $v(t) = 50 + 25 \cos(377t - 45^\circ) + 12,5 \cos(754t + 45^\circ) \text{ V}$ .
- 18.38** Determine a transformada de Fourier da forma de onda mostrada na Figura P18.38.

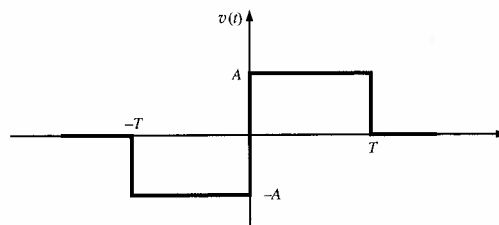


Figura P18.38

- 18.39** Derive a transformada de Fourier para as seguintes funções:

(a)  $f(t) = e^{-2t} \cos 4t u(t)$ .

(b)  $f(t) = e^{-2t} \sin 4t u(t)$ .

18.40 Mostre que

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)F_2(\omega - x) dx$$

- 18.41 Determine a transformada de Fourier da função  $f(t) = e^{-a|t|}$ .
- 18.42 Determine a transformada de Fourier da função  $f(t) = 12e^{-2|t|} \cos 4t$ .
- 18.43 Determine o sinal de saída  $v_o(t)$  da rede com o sinal de entrada  $v_i(t) = 3e^{-t}u(t)$  e a resposta de impulso da rede  $h(t) = e^{-2t}u(t)$ . Assuma que todas as condições iniciais são zero.
- 18.44 O sinal de entrada de uma rede é  $v_i(t) = e^{-3t}u(t)$ . A função de transferência da rede é  $H(j\omega) = 1/(j\omega + 4)$ . Determine a saída da rede  $v_o(t)$ , caso as condições iniciais sejam nulas.
- 18.45 Utilize a técnica de transformada para determinar  $v_o(t)$  na rede da Figura P18.34a, caso (a)  $i(t) = 4(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$  A e (b)  $i(t) = 12 \cos 4t$  A.
- 18.46 O sinal de entrada para a rede da Figura P18.46 é  $v_i(t) = 10e^{-5t}u(t)$  V. Determine o conteúdo total de energia  $1 \Omega$  da saída  $v_o(t)$ .

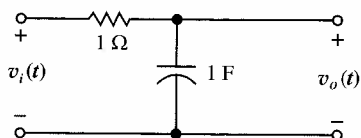


Figura P18.46

18.47 Utilize a transformada de Fourier para determinar  $i(t)$  na rede da Figura P18.47, caso  $v_i(t) = 2e^{-t}u(t)$ .

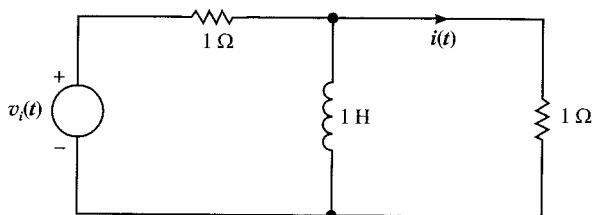


Figura P18.47

18.48 Utilize a técnica de transformada para determinar  $v_o(t)$  na rede da Figura P18.48, caso (a)  $v_i(t) = 4e^{-t}u(t)$  e (b)  $v_i(t) = 4(e^{-2t} + 2e^{-4t})u(t)$  V.

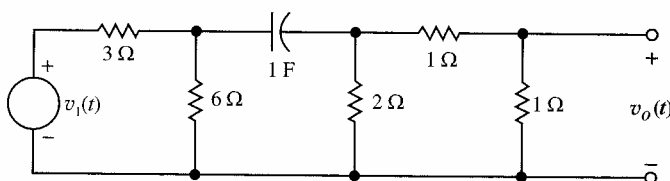


Figura P18.48

- 18.49 Calcule o conteúdo de energia normalizada do sinal  $v_o(t)$  na Figura P18.46 no intervalo de frequência de  $\omega = 2$  até  $\omega = 4$  rad/s.
- 18.50 Calcule o conteúdo de energia normalizada do sinal  $v_o(t)$  na Figura P18.46 no intervalo de frequência de 0 a 1 rad/s.
- 18.51 Determine a tensão  $v_o(t)$  no circuito mostrado na Figura P18.51, usando a transformada de Fourier, caso  $i_i(t) = 2e^{-4t}u(t)$  A.

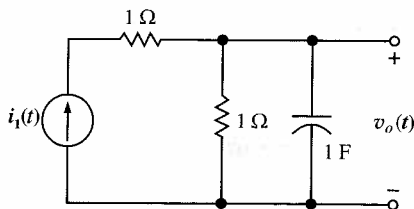


Figura P18.51

18.52 Compare a energia normalizada na entrada e saída da rede do Problema 18.51 para a entrada dada.

# Técnicas para Resolução de Equações Simultâneas Linearmente Independentes

Na solução de muitos problemas de circuitos encontramos várias equações simultâneas da forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde  $x$ 's e  $b$ 's são tipicamente tensões e correntes ou correntes e tensões, respectivamente.

Como sugerido pelo título deste apêndice, assumimos que as equações são linearmente *independentes*. Como um rápido lembrete do significado de independência linear, considere as seguintes equações LKC escritas para cada nó de uma rede com três nós:

$$\frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 - 4 = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$-\frac{1}{2}V_1 + \frac{5}{6}V_2 + 5 = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$-V_1 - \frac{1}{3}V_2 - 1 = 0 \quad (\text{A.4})$$

onde  $V_1$  e  $V_2$  são duas tensões de nó que são medidas com relação ao terceiro nó (nó de referência). Independência linear implica que não podemos encontrar constantes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  tais que

$$a_1(\frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 - 4) + a_2(-\frac{1}{2}V_1 + \frac{5}{6}V_2 + 5) + a_3(-V_1 - \frac{1}{3}V_2 - 1) = 0 \quad (\text{A.5})$$

No entanto, nesse caso, se selecionarmos  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} +\frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 - 4 - \frac{1}{2}V_1 + \frac{5}{6}V_2 + 5 - V_1 - \frac{1}{3}V_2 - 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Em outras palavras, isto significa, por exemplo, que as equações A.2 e A.3 podem ser usadas para se obter a Equação A.4, e portanto a Equação A.4 é linearmente *dependente* das equações A.2 e A.3. Além disso, qualquer uma das duas equações pode ser usada para se obter a terceira equação. Portanto, somente duas dessas três equações são linearmente *independentes*.

Descreveremos agora duas técnicas para resolver equações linearmente independentes e simultâneas – eliminação de Gauss e matrizes.

## A.1 Eliminação de Gauss

O exemplo a seguir servirá para demonstrar os passos a serem tomados ao aplicar essa técnica.

### Exemplo A.1

Vamos encontrar a solução do seguinte conjunto de equações:

$$7X_1 - 4X_2 - X_3 = 4 \quad (\text{A.6})$$

$$-4X_1 + 7X_2 - 2X_3 = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$-X_1 - 2X_2 + 3X_3 = -1 \quad (\text{A.8})$$

O algoritmo (ou seja, procedimento passo a passo) para aplicar o método de eliminação de Gauss é feito de maneira sistemática. Primeiramente, resolvemos a Equação A.6 para a variável  $X_1$  em termos de outras variáveis em  $X_2$  e  $X_3$ .

$$X_1 = \frac{4}{7} + \frac{4}{7}X_2 + \frac{1}{7}X_3 \quad (\text{A.9})$$

Substituímos então esse resultado nas equações A.7 e A.8 para obter

$$\frac{33}{7}X_2 - \frac{18}{7}X_3 = \frac{16}{7} \quad (\text{A.10})$$

$$-\frac{18}{7}X_2 + \frac{20}{7}X_3 = -\frac{3}{7} \quad (\text{A.11})$$

Continuando a redução, resolvemos agora a Equação A.10 para  $X_2$  em termos de  $X_3$ :

$$X_2 = \frac{16}{33} + \frac{18}{33}X_3 \quad (\text{A.12})$$

Substituindo-se essa expressão para  $X_2$  na Equação A.11, obtém-se

$$\frac{336}{231}X_3 = \frac{189}{231}$$

ou

$$X_3 = 0,563 \quad (\text{A.13})$$

Recapitulando agora por meio das equações, podemos determinar  $X_2$  da Equação A.12 como

$$X_2 = 0,792$$

e  $X_1$  da Equação A.9 como

$$X_1 = 1,104$$

Nesse simples exemplo não estivemos preocupados com questões como coeficientes zero ou o impacto de erros de arredondamento. Ilustramos, entretanto, o procedimento básico. ■

Devido à maneira metódica pela qual a eliminação deve ser realizada, o algoritmo pode ser facilmente adaptado para a análise computacional. Programas eficientes de computador estão disponíveis em pacotes de software (por exemplo, ver sub-rotinas de sistemas lineares na IMSL Subroutine Library). Além disso, existe um grande número de programas individuais escritos para implementar a técnica de eliminação gaussiana (por exemplo, Stephen W. Director, *Circuit theory: a computational approach*, Nova York, John Wiley & Sons, Inc., 1975, pp. 73-76).

## A.2 Matrizes

Uma *matriz* é definida como um arranjo de números dispostos em linhas e colunas escrito na forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esse arranjo é chamado de uma matriz  $m$  por  $n$  ( $m \times n$ ) porque possui  $m$  linhas e  $n$  colunas. Uma matriz é um modo conveniente de representar arranjos de números; no entanto, deve-se lembrar que a matriz por si só não possui valor numérico algum. No arranjo acima, os números ou funções  $a_{ij}$  são chamados de *elementos* da matriz. Qualquer matriz que possui o mesmo número de linhas e de colunas é uma *matriz quadrada*. O somatório dos elementos da diagonal de uma matriz quadrada é chamado de *traço* da matriz.

### Exemplo A.2

As seguintes são matrizes:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, [1 \ 2 \ 3]$$

A *matriz identidade* é uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

### Exemplo A.3

As seguintes são matrizes identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes  $A$  e  $B$  são consideradas *iguais* caso seus elementos correspondentes sejam iguais. Em outras palavras,  $A = B$  se e somente se  $a_{ij} = b_{ij}$  para todo  $i$  e  $j$ .

### Exemplo A.4

Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

então  $A = B$  porque  $a_{ij} = b_{ij}$  para todo  $i$  e  $j$ .

A adição e subtração de duas matrizes de mesma ordem (ou seja,  $m \times n$ ) é realizada como se segue:

$$C = A \pm B \quad (\text{A.14})$$

ou

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ para todo } i \text{ e } j$$

Isto é, os elementos de  $C$  são a soma ou diferença dos elementos correspondentes de  $A$  e  $B$ .

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

**Exemplo A.5**

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

então

$$A+B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad A-B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A-B+C = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Dada uma matriz  $A$  e um escalar  $\lambda$ , a *multiplicação* de  $A$  pelo escalar  $\lambda$ , escrito  $\lambda A$ , é definida como sendo

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

**Exemplo A.6**Se  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -2$  e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

então

$$\lambda_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 A = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 \\ -2 & -6 & -10 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Considere agora a multiplicação de duas matrizes. Dadas as matrizes  $A$   $m \times n$  e  $B$   $n \times r$ , o produto  $AB$  é definido como sendo uma matriz  $C$   $m \times r$  cujos elementos são dados pela expressão

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r \quad (\text{A.16})$$

Note que o produto  $AB$  é definido somente quando o número de colunas de  $A$  é igual ao número de linhas de  $B$ .

**Exemplo A.7**Suponhamos que as matrizes  $A$  e  $B$  são definidas como se segue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Note que na fórmula acima,  $m = 3$ ,  $n = 2$ ,  $r = 2$ . Usando tal fórmula, podemos calcular

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum_{k=1}^2 a_{1k} b_{k1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} \\ c_{12} &= \sum_{k=1}^2 a_{1k} b_{k2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tais elementos formam o arranjo

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

Uma inspeção mais detalhada do produto acima ilustra que a multiplicação é uma operação “linha-por-coluna”. Em outras palavras, cada elemento de uma linha da primeira matriz é multiplicado pelo elemento correspondente em uma coluna da segunda matriz e então os produtos são somados. Essa operação é representada a seguir:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1p} \\ \vdots & \boxed{C_{ij}} & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{a_{i1}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \boxed{b_{nj}} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Os exemplos a seguir ilustram os algoritmos envolvidos.

#### Exemplo A.8

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

então

$$AB = \begin{bmatrix} (1)(2) + (3)(3) & (1)(1) + (3)(5) \\ (2)(2) + (4)(3) & (2)(1) + (4)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 22 \end{bmatrix}$$

Se

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

então

$$CD = \begin{bmatrix} (1)(1) + (2)(2) \\ (3)(1) + (4)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

A matriz de ordem  $n \times m$  obtida pela troca de linhas por colunas de uma matriz  $A$   $m \times n$  é chamada de *transposta* de  $A$  e é indicada por  $A^T$ .

#### Exemplo A.9

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

então

$$A^T = [1 \quad 2 \quad 3]$$

e se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

então

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Se  $A$  é uma matriz quadrada da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

o determinante de  $A$  é definido como

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

isto é, o determinante é igual ao produto  $a_{11}a_{22}$ , elementos da diagonal principal, menos o produto  $a_{21}a_{12}$ , elementos da diagonal que liga o “canto inferior esquerdo” da matriz ao “canto superior direito”.

### Exemplo A.10

Se

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

então

$$|A| = (4)(3) - (-1)(-1) = 11$$

O cálculo de determinantes de matrizes maiores é realizado expandindo-se o determinante em *co-fatores*. O co-fator  $A_{ij}$  do elemento  $a_{ij}$  de um determinante é igual ao produto entre  $(-1)^{i+j}$  e o que restar do determinante depois de a linha  $i$  e a coluna  $j$  serem descartadas.

### Exemplo A.11

Dado o determinante  $3 \times 3$  abaixo, determine os co-fatores  $A_{11}$ ,  $A_{23}$  e  $A_{31}$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Uma vez que podemos usar qualquer linha ou coluna para determinar o determinante, vamos usar a segunda coluna, tal que

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= a_{12}(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{32}(-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ou a terceira coluna, tal que

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \\ &= a_{31}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{33}(-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

ou alguma outra linha ou coluna. ■

### Exemplo A.12

Calcule o determinante da seguinte matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -4 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Expandindo-se o determinante usando a primeira linha, obtemos

$$\begin{aligned}|A| &= 7 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 7(17) + 4(-14) - (15) \\ &= 48\end{aligned}$$

Como definido para determinantes, o *co-fator*  $A_{ij}$  do elemento  $a_{ij}$  de qualquer matriz quadrada  $A$  é igual ao produto  $(-1)^{i+j}$  e o determinante da submatriz obtida a partir de  $A$  excluindo a linha  $i$  e a coluna  $j$ . ■

### Exemplo A.13

Dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

os co-fatores  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  e  $A_{22}$  são

$$\begin{aligned}A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \\ A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ A_{22} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}\end{aligned}$$

A matriz *adjacente* de  $A$  ( $\text{adj } A$ ) é a transposta da matriz obtida de  $A$  substituindo-se cada elemento  $a_{ij}$  por seu co-fator  $A_{ij}$ . Em outras palavras, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

então

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Se  $A$  é uma matriz quadrada e se existe uma matriz quadrada  $A^{-1}$  tal que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad (\text{A.18})$$

então  $A^{-1}$  é chamada de *inversa* de  $A$ . Pode ser mostrado que a inversa da matriz  $A$  é igual à adjacente dividida pelo determinante (aqui indicado por  $|A|$ ); isto é,

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} \quad (\text{A.19})$$

### Exemplo A.14

Dado

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

então

$$|A| = (2)(4) - (1)(3) = 5$$

e

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Também, se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 - 5 + 21 = 18 \end{aligned}$$

e

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Temos agora ferramentas suficientes para resolver as equações A.1 usando matrizes. O exemplo a seguir ilustra tal método.

**Exemplo A.15**

As equações nodais para uma rede são

$$2V_1 + 3V_2 + V_3 = 9$$

$$V_1 + 2V_2 + 3V_3 = 6$$

$$3V_1 + V_2 + 2V_3 = 8$$

Note que esse conjunto de equações simultâneas pode ser escrito como uma única equação matriz na forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

ou

$$AV = I$$

Multiplicando-se ambos os lados pela equação acima através de  $A^{-1}$  tem-se

$$A^{-1}AV = A^{-1}I$$

ou

$$V = A^{-1}I$$

$A^{-1}$  foi calculada no Exemplo A.14. Empregando a inversa aqui, obtemos

$$V = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

e dessa forma

$$V_1 = \frac{35}{18}, V_2 = \frac{29}{18} \text{ e } V_3 = \frac{5}{18}$$

# Procedimento para Instalação do Programa PSPICE

O procedimento para instalação do PSPICE consiste de duas etapas. A primeira consta de quatro passos para preparar o PC para executar o programa PSPICE. A segunda, de sete passos, para se configurar a impressora e vídeos *default* para seu microcomputador.

## B.1 Preparando seu PC (ou Compatível) para Executar o Programa PSPICE

1. Crie um diretório PSPICE:  

```
C:\> MKDIR PSPICE
```
2. Copie cada disco do PSPICE para o diretório recém-criado:  

```
C:\> COPY A:*. * C:\PSPICE
```
3. Certifique-se que as duas linhas seguintes estejam no arquivo C:\CONFIG.SYS:  

```
FILES=20  
BUFFERS=20
```

(Observação: Os valores podem ser maiores que 20, mas não menores.)
4. Edite o arquivo C:\AUTOEXEC.BAT para incluir o PSPICE no caminho de busca. Por exemplo,  

```
PATH C: \;C:\DOS;C:\PSPICE
```

## B.2 Configurando Impressora e Vídeo para o Programa PSPICE

1. Execute o PSPICE:  

```
C:\> CD \PSPICE
```

C:\PSPICE > PS

2. Selecione 'Files' na linha de menu.
3. Selecione 'Display/Prn Setup . . .' no submenu. Isto faz com que seja mostrada uma janela em que o usuário deve selecionar o tipo de vídeo, a porta em que a impressora está conectada e o tipo de impressora.
4. Pressione F4 para obter uma lista de opções. Selecione a opção que corresponda ao tipo de monitor, movimentando as teclas de direção até que a opção desejada esteja em realce. Então, pressione 'Enter'.
5. Pressione F4 para obter uma lista de opções de portas. Selecione a opção apropriada para o seu sistema (normalmente "prn" ou "lptl") movimentando as teclas de direção até que a opção desejada esteja em realce. Pressione 'Enter'.
6. Pressione F4 para obter uma lista de impressoras. As teclas de direção devem ser usadas para colocar em realce a opção desejada. Existem mais opções do que as que cabem na tela de uma só vez. Se você não encontrar a que corresponde ao seu tipo de impressora, consulte o manual para saber qual é a opção mais próxima de seu tipo de impressora. (Observação: A maioria das impressoras matriciais emulam algum tipo de impressora Epson. Selecione a opção "ps" para uma impressora "Postscript".) Pressione 'Enter' para selecionar a opção em realce.
7. Pressione a tecla 'Esc' para retornar à linha de menu do PSPICE.



# Números Complexos

O leitor provavelmente deve ter visto números complexos e seu uso em trabalhos anteriores, portanto, somente uma rápida revisão dos elementos empregados neste livro é apresentada aqui.

## C.1 Representação de Números Complexos

Números complexos são tipicamente representados de três formas: *exponencial*, *polar* e *retangular*. Na forma exponencial, um número complexo **A** é escrito como

$$\mathbf{A} = ze^{j\theta} \quad (\text{C.1})$$

A grandeza não-negativa  $z$  é a *amplitude* ou *magnitude*, a grandeza real  $\theta$  é chamada de *ângulo*, e  $j$  é o *operador imaginário*  $j = \sqrt{-1}$ , onde  $j^2 = -1$ ,  $j^3 = -\sqrt{-1} = -j$ , e assim por diante. Como indicado na parte central do texto,  $\theta$  é expresso em radianos ou graus.

A *forma polar* de um número complexo **A**, que é simbolicamente equivalente à forma exponencial, é escrita como

$$\mathbf{A} = z \angle \theta \quad (\text{C.2})$$

Observe que nesse caso a expressão  $e^{j\theta}$  é substituída pelo símbolo de ângulo  $\angle \theta$ . A representação de um número complexo **A** pela magnitude  $z$  em um dado ângulo  $\theta$  sugere uma representação usando-se coordenadas polares em um plano complexo.

A representação retangular de um número complexo é escrita como

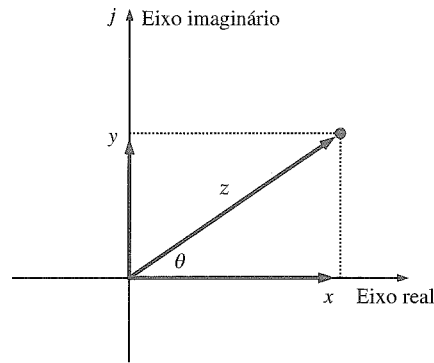
$$\mathbf{A} = x + jy \quad (\text{C.3})$$

onde  $x$  é a parte real de **A** e  $y$  é a parte imaginária de **A**, o que é normalmente expresso na forma

$$\begin{aligned} x &= \text{Re}(\mathbf{A}) \\ y &= \text{Im}(\mathbf{A}) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

O número complexo  $\mathbf{A} = x + jy$  pode ser graficamente representado em um plano complexo como mostrado na Figura C.1. Note que a parte imaginária de **A**,  $y$ , é real. Note que  $x + jy$  representa unicamente um ponto no plano complexo que também pode ser especificado pela magnitude  $z$ , representando a distância

da origem ao ponto, e um ângulo  $\theta$ , que representa o ângulo entre o eixo real positivo e a reta que conecta o ponto à origem.



**Figura C.1** Representação de um número complexo em um plano complexo.

A conexão entre as várias representações de  $A$  pode ser vista por meio da identidade de Euler, que é

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (C.5)$$

Usando-se essa identidade, o número complexo  $A$  pode ser escrito como

$$A = ze^{j\theta} = z \cos \theta + jz \sin \theta \quad (C.6)$$

que, como mostrado na Figura C.1, é equivalente a

$$A = x + jy$$

Equacionando-se as partes real e imaginária dessas duas equações, tem-se

$$\begin{aligned} x &= z \cos \theta \\ y &= z \sin \theta \end{aligned} \quad (C.7)$$

A partir dessas equações, obtemos

$$x^2 + y^2 = z^2 \cos^2 \theta + z^2 \sin^2 \theta = z^2$$

Portanto,

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad (C.8)$$

Além disso,

$$\frac{z \sin \theta}{z \cos \theta} = \tan \theta = \frac{y}{x}$$

e dessa forma

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (C.9)$$

As relações entre essas três representações de um número complexo são como se segue.

| Exponencial                      | Polar                            | Retangular          |
|----------------------------------|----------------------------------|---------------------|
| $ze^{j\theta}$                   | $z \angle \theta$                | $x + jy$            |
| $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ | $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ | $x = z \cos \theta$ |
| $z = \sqrt{x^2 + y^2}$           | $z = \sqrt{x^2 + y^2}$           | $y = z \sin \theta$ |

**Exemplo C.1**

Se um número complexo  $A$  na forma polar é  $A = 10 \angle 30^\circ$ , expresse  $A$  nas formas exponencial e retangular.

$$A = 10 \angle 30^\circ = 10e^{j30^\circ} = 10[\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ] = 8,66 + j5,0$$

**Exemplo C.2**

Se  $A = 4 + j3$ , expresse  $A$  nas formas exponencial e polar. Além disso, expresse  $-A$  nas formas exponencial e polar com uma magnitude positiva.

$$\begin{aligned} A = 4 + j3 &= \sqrt{4^2 + 3^2} \tan^{-1} \frac{3}{4} \\ &= 5 \angle 36,9^\circ \end{aligned}$$

Também,

$$-A = -5 \angle 36,9^\circ = 5 \angle 36,9^\circ + 180^\circ = 5 \angle 216,9^\circ = 5e^{j216,9^\circ}$$

ou

$$-A = -5 \angle 36,9^\circ = 5 \angle 36,9^\circ - 180^\circ = 5 \angle -143,1^\circ = 5e^{-j143,1^\circ}$$

## C.2 Operações Matemáticas

Mostraremos agora as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão aplicadas a números complexos do mesmo modo que elas se aplicam a números reais. Antes de progredir com tal ilustração, no entanto, vamos examinar duas definições importantes.

Dois números complexos  $A$  e  $B$  definidos como

$$A = z_1 e^{j\theta_1} = z_1 \angle \theta_1 = x_1 + jy_1$$

$$B = z_2 e^{j\theta_2} = z_2 \angle \theta_2 = x_2 + jy_2$$

são iguais se e somente se  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$  ou  $z_1 = z_2$  e  $\theta_1 = \theta_2 \pm n360^\circ$ , onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

**Exemplo C.3**

Se  $A = 2 + j3$ ,  $B = 2 - j3$ ,  $C = 4 \angle 30^\circ$  e  $D = 4 \angle 750^\circ$ , então  $A \neq B$ , porém  $C = D$ , uma vez que  $30^\circ = 30^\circ + 2(360^\circ)$ .

O conjugado,  $A^*$ , de um número complexo  $A = x + jy$  é definido como

$$A^* = x - jy \quad (C.10)$$

isto é,  $j$  é substituído por  $-j$  na forma retangular (ou forma polar) para se obter o conjugado. Observe que a magnitude de  $A^*$  é a mesma que a de  $A$ , uma vez que

$$z = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

No entanto, o ângulo agora é

$$\tan^{-1} \frac{-y}{x} = -\theta$$

Portanto, o conjugado é escrito nas formas exponencial e polar como

$$A^* = ze^{-j\theta} = z \angle -\theta \quad (C.11)$$

Temos também a relação

$$(A^*)^* = A \quad (C.12)$$

### Exemplo C.4

Se  $A = 10 \angle 30^\circ$  e  $B = 4 + j3$ , então  $A^* = 10 \angle -30^\circ$  e  $B^* = 4 - j3$ .  $(A^*)^* = 10 \angle 30^\circ = A$  e  $(B^*)^* = 4 + j3 = B$ . ■

### Adição

A soma de dois números complexos  $A = x_1 + jy_1$  e  $B = x_2 + jy_2$  é

$$\begin{aligned} A+B &= x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 \\ &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \end{aligned} \quad (C.13)$$

isto é, simplesmente somamos individualmente as partes reais e as partes imaginárias para obter os componentes do número complexo resultante. Essa adição pode ser ilustrada graficamente traçando-se cada número complexo como vetor e então executando-se a adição dos vetores resultantes. Esse enfoque gráfico é mostrado na Figura C.2. Observe que a adição de vetores é obtida pela conhecida regra do paralelogramo.

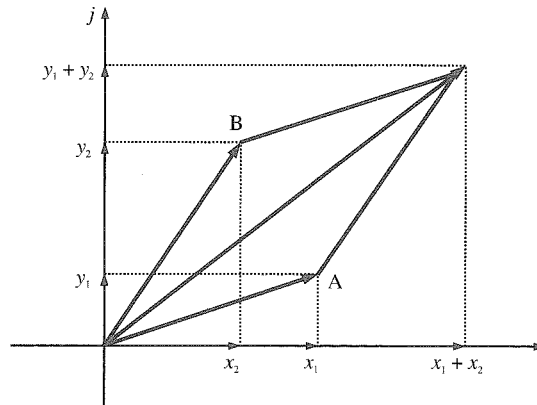


Figura C.2 Adição de vetores para números complexos.

### Exemplo C.5

Dados os números complexos  $A = 4 + j1$ ,  $B = 3 - j2$  e  $C = -2 - j4$ , desejamos calcular  $A + B$  e  $A + C$  (Figura C.3).

$$\begin{aligned} A+B &= (4+j1) + (3-j2) \\ &= 7-j1 \\ A+C &= (4+j1) + (-2-j4) \\ &= 2-j3 \end{aligned}$$

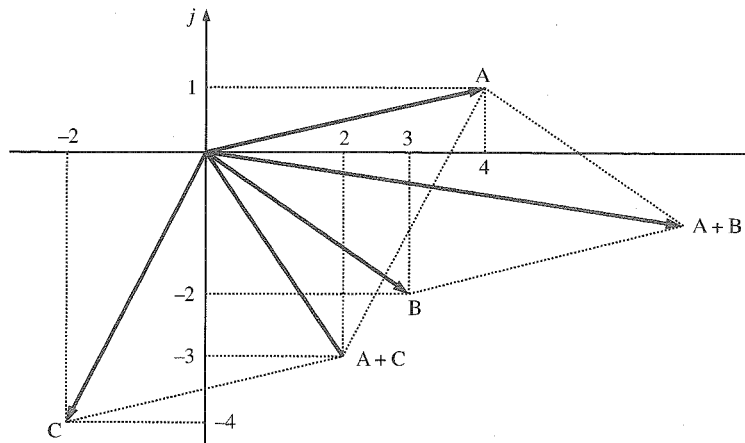


Figura C.3 Exemplos de adição de números complexos.

**Exemplo C.6**

Desejamos calcular a soma  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  caso  $\mathbf{A} = 5 \angle 36,9^\circ$  e  $\mathbf{B} = 5 \angle 53,1^\circ$ .

Devemos converter da forma polar para a retangular.

$$\mathbf{A} = 5 \angle 36,9^\circ = 4 + j3$$

$$\mathbf{B} = 5 \angle 53,1^\circ = 3 + j4$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= 4 + j3 + 3 + j4 = 7 + j7 \\ &= 9,9 \angle 45^\circ\end{aligned}$$

**Subtração**

A diferença de dois números complexos  $\mathbf{A} = x_1 + jy_1$  e  $\mathbf{B} = x_2 + jy_2$  é

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \mathbf{B} &= (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)\end{aligned}\tag{C.14}$$

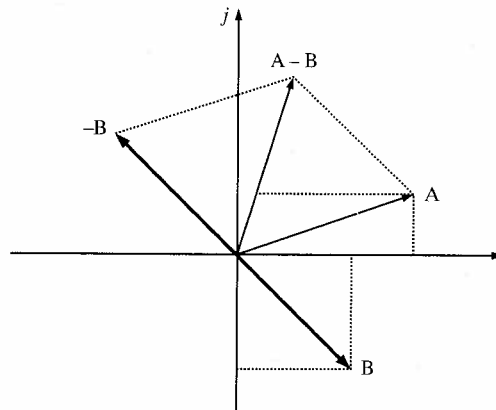
isto é, simplesmente subtraímos individualmente as partes reais e as partes imaginárias para obter o número complexo resultante. Uma vez que um sinal negativo corresponde a uma mudança de ângulo de  $180^\circ$ , a técnica gráfica para executar a subtração ( $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ) pode ser realizada desenhando-se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  como vetores, rotacionando-se o vetor  $\mathbf{B}$  de  $180^\circ$  e então somando-o ao vetor  $\mathbf{A}$ .

**Exemplo C.7**

Dados  $\mathbf{A} = 3 + j1$  e  $\mathbf{B} = 2 - j2$ , calcule a diferença  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \mathbf{B} &= (3 + j1) - (2 - j2) \\ &= 1 + j3\end{aligned}$$

A solução gráfica é mostrada na Figura C.4.



**Figura C.4** Exemplos de subtração de números complexos.

**Exemplo C.8**

Vamos calcular a diferença  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  caso  $\mathbf{A} = 5 \angle 36,9^\circ$  e  $\mathbf{B} = 5 \angle 53,1^\circ$ .

Convertendo ambos os números da forma polar para a forma retangular, obtemos

$$\mathbf{A} = 5 \angle 36,9^\circ = 4 + j3$$

$$\mathbf{B} = 5 \angle 53,1^\circ = 3 + j4$$

Então

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (4 + j3) - (3 + j4) = 1 - j1 = \sqrt{2} \angle -45^\circ$$

**Exemplo C.9**

Dado o número complexo  $A = 5 \angle 36,9^\circ$ , calcule  $A^*$ ,  $A + A^*$  e  $A - A^*$ .

Se  $A = 5 \angle 36,9^\circ = 4 + j3$ , então  $A^* = 5 \angle -36,9^\circ = 4 - j3$ . Dessa forma,  $A + A^* = 8$  e  $A - A^* = j6$ . ■

Observe que a adição e subtração de números complexos é uma operação simples se os números são expressos na forma retangular. Note também que a soma de um número complexo e seu conjugado é um número real, e a diferença entre um número complexo e seu conjugado é um número imaginário.

**Multiplicação**

O produto de dois números complexos  $A = z_1 e^{j\theta_1} = z_1 \angle \theta_1 = x_1 + jy_1$  e  $B = z_2 e^{j\theta_2} = z_2 \angle \theta_2 = x_2 + jy_2$  é

$$AB = (z_1 e^{j\theta_1})(z_2 e^{j\theta_2}) = z_1 z_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = z_1 z_2 \angle \theta_1 + \theta_2 \quad (C.15)$$

ou

$$\begin{aligned} AB &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \\ &= x_1 x_2 + jx_1 y_2 + jx_2 y_1 + j^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \quad (C.16)$$

Se dois números complexos estão na forma exponencial ou polar, a multiplicação é feita diretamente multiplicando-se suas magnitudes e somando-se seus ângulos. A multiplicação é simples, apesar de ser um pouco mais complicada, se os números forem expressos na forma retangular.

O produto de um número complexo e seu conjugado é um número real; isto é

$$AA^* = (ze^{j\theta})(ze^{-j\theta}) = z^2 e^{j0} = z^2 \angle 0^\circ = z^2 \quad (C.17)$$

Note que tal número real é o quadrado da magnitude de um número complexo.

**Exemplo C.10**

Se  $A = 10 \angle 30^\circ$  e  $B = 5 \angle 15^\circ$ , os produtos  $AB$  e  $AA^*$  são

$$AB = (10 \angle 30^\circ)(5 \angle 15^\circ) = 50 \angle 45^\circ$$

e

$$AA^* = (10 \angle 30^\circ)(10 \angle -30^\circ) = 100 \angle 0^\circ = 100 \quad \blacksquare$$

**Exemplo C.11**

Dado  $A = 5 \angle 36,9^\circ$  e  $B = 5 \angle 53,1^\circ$ , desejamos calcular o produto nas formas polar e retangular.

$$\begin{aligned} AB &= (5 \angle 36,9^\circ)(5 \angle 53,1^\circ) = 25 \angle 90^\circ \\ &= (4 + j3)(3 + j4) \\ &= 12 + j16 + j9 + j^2 12 \\ &= 25j \\ &= 25 \angle 90^\circ \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Divisão**

O quociente de dois números complexos  $A = z_1 e^{j\theta_1} = z_1 \angle \theta_1 = x_1 + jy_1$  e  $B = z_2 e^{j\theta_2} = z_2 \angle \theta_2 = x_2 + jy_2$  é

$$\frac{A}{B} = \frac{z_1 e^{j\theta_1}}{z_2 e^{j\theta_2}} = \frac{z_1}{z_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{z_1}{z_2} \angle \theta_1 - \theta_2 \quad (C.18)$$

isto é, se os números estão na forma polar ou exponencial, a divisão pode ser feita imediatamente dividindo-se suas magnitudes e subtraindo-se seus ângulos como mostrado acima. Se os números estão na forma retangular ou a resposta é desejada na forma retangular, então o seguinte procedimento pode ser usado.

$$\frac{A}{B} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}$$

O denominador é racionalizado multiplicando-se tanto o numerador como o denominador por  $B^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{AB^*}{BB^*} &= \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned} \quad (C.19)$$

Dessa forma, o denominador é real e o quociente é dado na forma retangular.

### Exemplo C.12

Se  $A = 10 \angle 30^\circ$  e  $B = 5 \angle 53,1^\circ$ , determine o quociente  $A/B$  em ambas as formas, polar e retangular.

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{AB^*}{BB^*} = \frac{8,66 + j5}{3 + j4} \frac{3 - j4}{3 - j4} & \frac{A}{B} &= \frac{10 \angle 30^\circ}{5 \angle 53,1^\circ} \\ &= \frac{(8,66 + j5)(3 - j4)}{3^2 + 4^2} & \text{ou} &= \frac{2 \angle -23,1^\circ}{1} \\ &= \frac{45,98 - j19,64}{25} & &= 1,84 - j0,79 \\ &= 1,84 - j0,79 \end{aligned}$$

Como exemplo final, considere o seguinte, que necessita do uso de muitas das técnicas apresentadas anteriormente.

### Exemplo C.13

Dado  $A = 10 \angle 30^\circ$ ,  $B = 2 + j2$ ,  $C = 4 + j3$  e  $D = 4 \angle 10^\circ$ , calcule a expressão para  $AB/(C + D)$  na forma retangular.

$$\begin{aligned} \frac{AB}{C + D} &= \frac{(10 \angle 30^\circ)(2 + j2)}{(4 + j3) + (4 \angle 10^\circ)} \\ &= \frac{(10 \angle 30^\circ)(2\sqrt{2} \angle 45^\circ)}{4 + j3 + 3,94 + j0,69} \\ &= \frac{20\sqrt{2} \angle 75^\circ}{7,94 + j3,69} \\ &= \frac{20\sqrt{2} \angle 75^\circ}{8,75 \angle 24,93^\circ} \\ &= 3,23 \angle 50,07^\circ \\ &= 2,07 + j2,48 \end{aligned}$$

# Referências

- ASELTINE, J. A. *Transform methods in linear system analysis*. Nova York, McGraw-Hill Book Company, 1958.
- BALABANIAN, N. *Fundamentals of circuit theory*. Boston, Allyn & Bacon, Inc., 1961.
- BLACKWELL, W. A. & GRIGSBY, L. L. *Introductory network theory*. Boston, PWS Engineering, 1985.
- BOBROW, L. S. *Elementary linear circuit analysis*. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1981.
- CARLSON, A. B. & GISSER, D. G. *Electrical engineering*. Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1981.
- CHAN, Shu-Park; CHAN, Shu-Yan; Chan, Shu-Gar. *Analysis of linear networks and systems*. Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1972.
- CHEN, Wai-Kai. *Linear networks and systems*. Monterey, California, Brooks Cole Engineering Division of Wadsworth, Inc., 1983.
- CHENG, D. K. *Analysis of linear systems*. Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1959.
- FITZGERALD, A. E.; HIGGINBOTHAM, E. E.; GRABEL, A. *Basic electrical engineering*. Nova York, McGraw-Hill Book Company, 1981.
- FRIEDLAND, B.; WING, O.; ASH, R. *Principles of linear networks*. Nova York, McGraw-Hill Book Company, 1961.
- HAYT, W. H., Jr. & KEMMERLY, Jack, E. *Engineering circuit analysis*. 4<sup>a</sup> ed., Nova York, McGraw-Hill Book Company, 1986.
- IRWIN, J. David. *Basic engineering circuit analysis*. 3<sup>a</sup> ed., Nova York, Macmillan Publishing Co., 1990.
- JOHNSON, D. E.; HILBURN, J. L.; JOHNSON, J. R. *Basic electric circuit analysis*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1978.



- KIRWIN, G. J. & GRODZINSKY, S. E. *Basic circuit analysis*. Boston, Houghton Mifflin Company, 1980.
- KUO, F. F. *Network analysis and synthesis*. Nova York, John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- LEY, B. J.; Lutz, S. G. ; REHBERG, C. F. *Linear circuit analysis*. Nova York, McGraw-Hill Book Company, 1959.
- NAGLE, L. W. *SPICE 2: a program to simulate semiconductor circuits*. Berkeley, California, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, ERL-M520, 1975.
- NILSSON, J. W. *Electric circuits*. 2<sup>a</sup> ed., Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1986
- STREMLER, F. G. *Introduction to communication systems*. Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1977.
- SU, K. L. *Fundamentals of circuit, electronics and signal analysis*. Boston, Houghton Mifflin Company, 1978.
- TRICK, T. N. *Introduction to circuit analysis*. Nova York, John Wiley & Sons, Inc., 1977.
- TUINENGA, Paul W. *SPICE, a guide to circuit simulation and analysis using PSPICE*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1988.
- VAN VALKENBURG, M. E. & KINARIWALA, B. K. *Linear circuits*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1982.
- VAN VALKENBURG, M. E. *Analog filter design*. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, 1982.
- VLADIMIRESCU, A. & LIU, Sally. *The simulation of MOS integrated circuits using SPICE 2*, Berkeley, Calif., Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, UCB/ERL M80/7, 1980.
- VLADIMIRESCU, A.; NEWTON, A. R.; PEDERSON, D. O. *SPICE version 2F.1 user's guide*. Berkeley, Califórnia, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, 1980.
- WEINBERG, L. *Network analysis and synthesis*. Nova York, McGraw-Hill Book Company, 1962.

# Respostas de Alguns Problemas

## Capítulo 1

1.1 1080 C    1.3 0,5 C    1.7  $6(1 - e^{-6})$  J    1.11 Dissipação de 32 W    1.15 8 V  
1.18 24 V

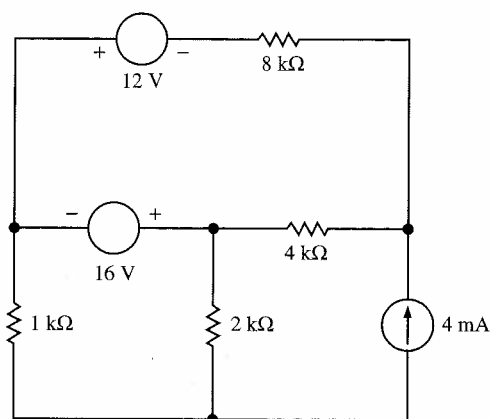
## Capítulo 2

2.1  $I_o = 7$  A,  $I_1 = 9$  A,  $I_2 = 6$  A    2.4 32 W    2.6 4 A    2.10 -4 A  
2.14  $I_1 = -6$  A,  $V_o = -16/3$  V    2.18  $-3/2$  A    2.21  $32/3$  V    2.25 -20 V  
2.28 -2 A    2.32 36 V    2.36 324 W    2.40 9 A    2.44 9 A    2.48 9 A  
2.52 48 V    2.57 4 A    2.59 3 A    2.63  $-16/3$  A    2.67 6  $\Omega$     2.69 72 V

## Capítulo 3

3.1 1 V    3.4  $-12/7$  A    3.8  $208/19$  V    3.12 -4 V    3.15 4 A  
3.20  $V_2 = -4/3$  V,  $V_3 = 68/3$  V    3.24  $24/5$  V    3.27  $5/3$  A    3.31 2 V  
3.35  $8/3$  V    3.39  $124/19$  A    3.43 7 A    3.47 24 V    3.51  $-4/5$  A  
3.56  $11/2$  V    3.59  $8/5$  V    3.62 0 V

3.66



3.71 (a) Cinco ramos, cinco elos (b) cinco ramos, quatro elos

3.72 (a)  $i_1 - i_2 = 0$ 

$$i_4 + i_3 - i_2 = 0$$

$$i_4 + i_5 - i_7 = 0$$

$$i_6 - i_7 = 0$$

(b)  $i_1 + i_2 = 0$ 

$$i_2 - i_3 - i_7 = 0$$

$$i_2 + i_4 + i_6 = 0$$

$$i_7 - i_5 + i_6 = 0$$

3.75 (a)  $v_3 - v_1 + v_5 + v_7 = 0$ 

$$v_4 - v_1 + v_5 = 0$$

$$-v_5 + v_2 - v_6 = 0$$

$$-v_7 + v_8 + v_9 = 0$$

(b)  $-v_1 + v_3 + v_2 = 0$ 

$$v_6 - v_3 + v_5 = 0$$

$$v_4 - v_2 - v_6 = 0$$

$$3.79 \quad v_{\text{out}} = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)v_2 - \left(\frac{R_4}{R_3}\right)\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_1$$

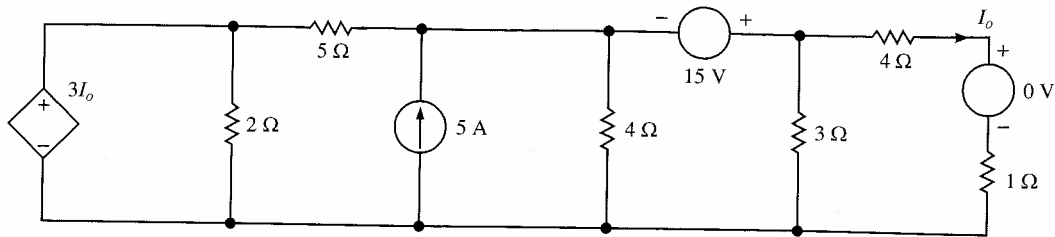
$$3.82 \quad \frac{v_o}{v_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(1 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3}\right)$$

## Capítulo 4

4.1 4 A    4.3 6 A    4.7 2 mA    4.11 0 A    4.15 0,25 V    4.19 8 V

4.23 1,4286 V    4.26 6,5714 V    4.31  $V_2 = 5$  V,  $\text{ganho} = 1$     4.35 0 V    4.39 10 V

4.42

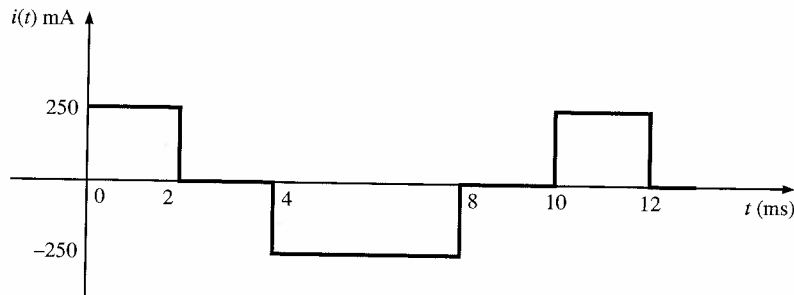
**Capítulo 5**

5.1 4 A    5.4 12/7 A    5.8 9/5 A    5.12 18 V    5.16 0 A    5.19 -11/12 A

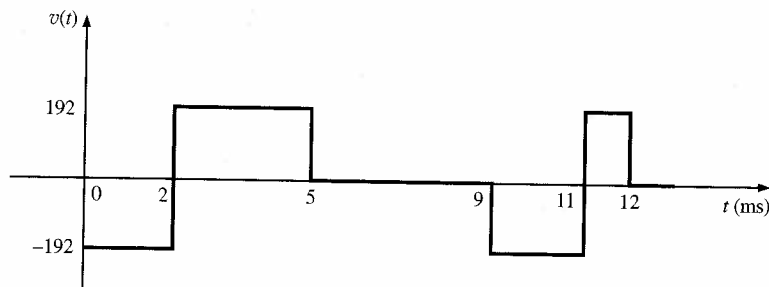
5.23 -1 A    5.27 76/11 V    5.30 9/5 A    5.33 -2 A    5.38 9/2 V

5.42 12/13 V    5.45 6 V    5.48 9/2 A    5.51 1/3 A    5.55  $R_{Th} = 20/9 \Omega$ 5.59  $R_L = 4 \Omega$ ,  $P_L = 9 \text{ W}$     5.64 5  $\Omega$ **Capítulo 6**6.1 40 V    6.4  $\pm 2,92 \cos 377t \text{ A}$ 

6.8

6.12  $\pm 130,63 \cos 377t \text{ V}$     6.15  $V(5) = -0,91 \text{ V}$ ,  $W(5) = 91,97 \text{ J}$ 

6.19

6.24  $C_{\max} = 8 \mu\text{F}$ ,  $C_{\min} = 1/2 \mu\text{F}$     6.28  $2 \mu\text{F}$     6.31  $1,32 \mu\text{F}$     6.35  $3,18 \mu\text{F}$ 

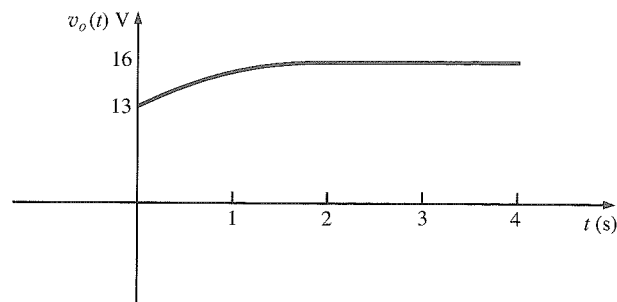
6.40 3 mH    6.43 0 H

**Capítulo 7**7.1  $4e^{-1,2t} \text{ V}$     7.4  $-3e^{-t/0,4} \text{ V}$     7.8  $8 + e^{-t/0,8} \text{ V}$     7.12  $3 + (8/3 - 3)e^{-t/0,3} \text{ mA}$ 7.15  $3/4 + (9/19 - 3/4)e^{-t/0,6} \text{ mA}$     7.19  $-18/15 e^{-t/0,125} \text{ V}$     7.24  $2e^{-t/1,2} \text{ mA}$ 7.28  $14/5 + (-2 - 14/5)e^{-3t/0,4} \text{ mA}$     7.32  $54,13 e^{-72/13t} \text{ V}$     7.35  $-12/5 e^{-24/5t} \text{ A}$ 7.39  $-6 + (3 + 6)e^{-6t} \text{ V}$     7.44  $6 + (5 - 6)e^{-t/3} \text{ A}$     7.49  $-24/5 + (4 + 24/5)e^{-20t} \text{ V}$

7.54  $\frac{1}{3} (10e^{-t} - 11e^{-5t})$  V

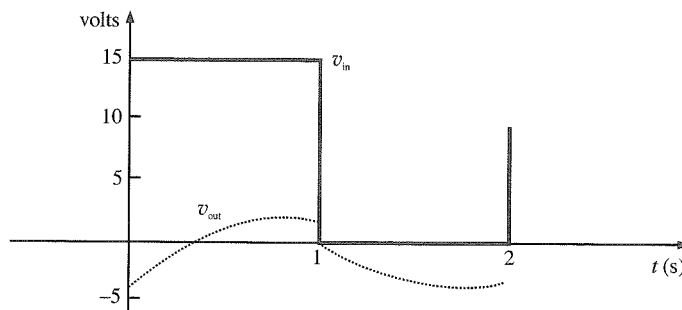
7.57  $8(1 - e^{-1/0,8})[u(t) - u(t - 1)] + 8(1 - e^{-1/0,8}) e^{-(t-1)/0,8} u(t - 1)$  V

7.60



7.65  $5 e^{-t/0,1} [u(t) - u(t - 0,05)] - 1,97 e^{-(t-0,05)/0,1} u(t - 0,05)$  V

7.68



## Capítulo 8

8.1 (a)  $s^2 + 2s + 5 = 0$

(b)  $s = -1 \pm j2$

(c)  $e^{-t}(k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t)$

8.4 (a)  $s^2 + 6s + 9 = 0$

(b)  $s_1 = -3, s_2 = -3$

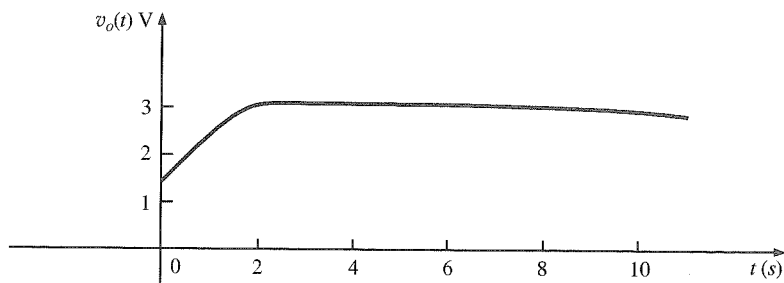
(c)  $k_1 e^{-3t} + k_2 t e^{-3t}$

8.7 Subamortecido 8.10  $e^{-2t} \cos (t/2)$  A 8.13  $5e^{-2t} - 4e^{-3t}$  V

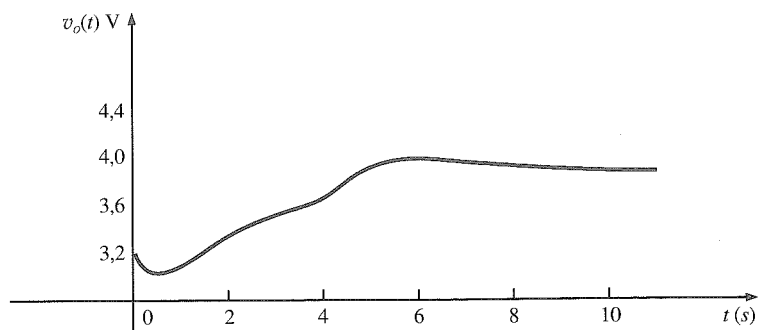
8.17  $4 - 4e^{-t} - 3te^{-t}$  V 8.21  $10e^{-4t} \cos 2t - 40e^{-4t} \sin 2t$  V

8.25  $-4/7e^{-t} + 32/7e^{-8t}$  A

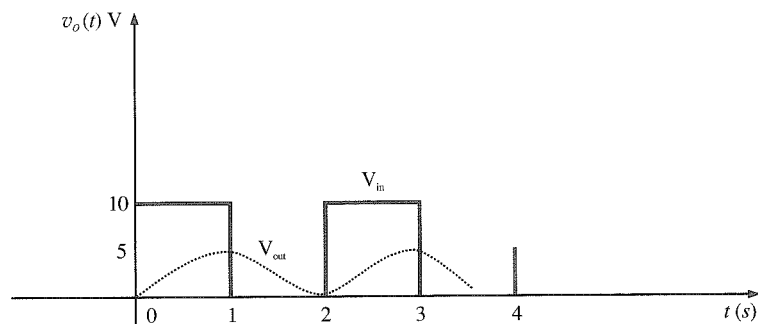
8.28



8.31



8.35

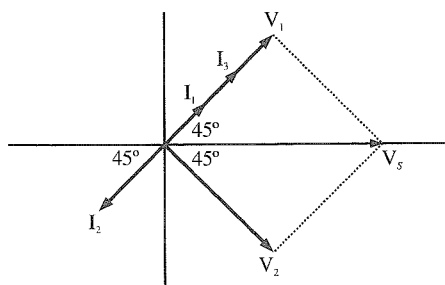


## Capítulo 9

9.1 Ambas as tensões estão em fase.

9.4  $v_1(t)$  adiantada  $i_1(t)$  de  $-55^\circ$  $v_1(t)$  em relação a  $i_2(t)$  de  $-230^\circ$ 9.7 (a)  $i_1(t) = 5 \cos(377t + 180^\circ)$  A ou  $I_1 = 5 \angle 180^\circ$  A(b)  $i_2(t) = 6 \sin(377t + 45^\circ)$  A ou  $I_2 = 6 \angle -45^\circ$  A9.8 (a)  $I_1 = 8 \angle 68^\circ$  A ou  $i_1(t) = 8 \cos(377t + 68^\circ)$  A(b)  $I_2 = 4 \angle 64^\circ$  A ou  $i_2(t) = 4 \cos(377t + 64^\circ)$  A9.9 (a)  $I_1 = 6 \angle -78^\circ$  A ou  $i_1(t) = 6 \cos(377t - 78^\circ)$  A(b)  $I_2 = 4,5 \angle -228^\circ$  A ou  $i_2(t) = 4,5 \cos(377t + 228^\circ)$  A9.12  $5,09 + j4,96 \, \Omega$  9.16  $-j0,41 \, s$  9.21  $4 - j3 \, \Omega$  9.24  $5,31 \, mH$ 

9.27

9.31  $I_1 = 8,05 \angle -3,95^\circ$  A,  $I_2 = 4,99 \angle 93,17^\circ$  A,  $I_3 = 9,98 \angle -33,69^\circ$  A

$$\mathbf{I}_4 = 4,47 \angle -60,26^\circ \text{ A}, \mathbf{I}_5 = 6,32 \angle -15,26^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{9.34} \ 9,41 \angle 11,31^\circ \text{ V} \quad \mathbf{9.39} \ 2,68 \angle 63,43^\circ \text{ A} \quad \mathbf{9.42} \ 13,66 \angle -36,11^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{9.45} \ 2,24 \angle 161,57^\circ \text{ A} \quad \mathbf{9.49} \ -8 + j3 \text{ V} \quad \mathbf{9.53} \ 5,66 \angle -45^\circ \text{ V} \quad \mathbf{9.55} \ 8 + j4 \text{ A}$$

$$\mathbf{9.59} \ 1,98 \angle 82,95^\circ \Omega$$

$$\mathbf{9.63} \ -\frac{R_F}{R_i} \left( \frac{1 + j\omega C_i R_i}{1 + j\omega C_F R_F} \right)$$

## Capítulo 10

$$\mathbf{10.1} \ 8 \angle -90^\circ \text{ V} \quad \mathbf{10.4} \ 10,73 \angle 206,57^\circ \text{ V} \quad \mathbf{10.8} \ 10,6 \angle -135^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{10.12} \ 2,83 \angle 45^\circ \text{ A} \quad \mathbf{10.14} \ 3,09 \angle 23,83^\circ \text{ V} \quad \mathbf{10.18} \ 35,8 \angle -71,58^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{10.22} \ 26 - j2 \text{ A} \quad \mathbf{10.26} \ 9,05 \angle 51,25^\circ \text{ V} \quad \mathbf{10.30} \ 6 \angle 0^\circ \text{ A} \quad \mathbf{10.34} \ 3,69 \angle 83,88^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{10.38} \ -1,47 \angle -72,89^\circ \text{ V} \quad \mathbf{10.41} \ 5,5 \angle -104,04^\circ \text{ V} \quad \mathbf{10.46} \ 3,09 \angle 23,83^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{10.50} \ 1,3 \angle 12,53^\circ \text{ V} \quad \mathbf{10.54} \ 35,8 \angle -71,58^\circ \text{ V} \quad \mathbf{10.59} \ 2,95 \angle -38,03^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{10.63} \ Z_{Th} = 1/3 + j2/3 \Omega \quad \mathbf{10.67} \ 3,175 \angle -56,05^\circ \text{ A} \quad \mathbf{10.70} \ 0,2308 \angle -133,5^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{10.74} \ 2,526 \angle -18,52^\circ \text{ V}$$

## Capítulo 11

$$\mathbf{11.1} \ 1,58 \text{ W} \quad \mathbf{11.4} \ P_s = 29,19 \text{ W}, P_{4\Omega} = 9,77 \text{ W} \quad \mathbf{11.8} \ 119,99 \text{ W}$$

$$\mathbf{11.11} \ 32,49 \text{ W} \quad \mathbf{11.15} \ Z_L = 5 \Omega, P_L = 5,28 \text{ W}$$

$$\mathbf{11.19} \ Z_L = 0,6 - j0,8 \Omega, P_L = 47,82 \text{ W} \quad \mathbf{11.22} \ Z_L = 3 - j2 \Omega, P_L = 8/3 \text{ W}$$

$$\mathbf{11.26} \ Z_L = 0,4 - j0,2 \Omega, P_L = 18,05 \text{ W} \quad \mathbf{11.30} \ 1,53 \text{ A} \quad \mathbf{11.34} \ 0,94 \text{ A}$$

$$\mathbf{11.37} \ 2,67 \text{ V}$$

$$\mathbf{11.41} \ (\mathbf{a}) \ 50 \angle 20^\circ \text{ V}$$

$$(\mathbf{b}) \ 16 \angle -30^\circ \text{ V}$$

$$(\mathbf{c}) \ 14,14 \angle -80^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{11.45} \ 440 \text{ V} \quad \mathbf{11.49} \ Z_{linha} = 0,062 + j0,0826 \Omega, V_{in} = 236,95 \angle 1,19^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{11.53} \ 303,73 \angle 12,43^\circ \text{ V} \quad \mathbf{11.55} \ 309,53 \angle 11,42^\circ \text{ V} \quad \mathbf{11.60} \ 305 \mu\text{F} \quad \mathbf{11.64} \ 60,97 \Omega$$

## Capítulo 12

$$\mathbf{12.1} \ \mathbf{I}_a = 5,56 \angle 6,34^\circ \text{ A rms}, \mathbf{I}_b = 5,56 \angle -113,66^\circ \text{ A rms}, \mathbf{I}_c = 5,56 \angle -233,66^\circ \text{ A rms},$$

$$V_{AN} = 111,2 \angle 59,47^\circ \text{ V rms}, V_{BN} = 111,2 \angle -60,53^\circ \text{ V rms}, V_{CN} = 111,2 \angle -180,53^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{12.4} \ 120 \sqrt{3} \angle 40^\circ \text{ V rms} \quad \mathbf{12.7} \ V_{AN} = 145,98 \angle 60,38^\circ \text{ V rms}, |V_{an}| = 160 \text{ V rms}$$

$$\mathbf{12.11} \ 1,49 + j3,00 \Omega \quad \mathbf{12.15} \ 19,95 + j21,93 \Omega \quad \mathbf{12.19} \ 207,9 \angle 40^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{12.23} \ \mathbf{I}_{aA} = 11,10 \angle -48,99^\circ \text{ A rms}, \mathbf{I}_{bB} = 11,10 \angle -168,99^\circ \text{ A rms}, \mathbf{I}_{cC} = 11,10 \angle 71,01^\circ \text{ A rms},$$

$$|V_{AN}| = 111 \text{ V rms}$$

$$\mathbf{12.27} \ 32,18 \angle 25^\circ \Omega$$

$$12.30 \ I_{AN} = 9,37 \angle -4,4^\circ \text{ A rms}, \ I_{BN} = 9,37 \angle -124,4^\circ \text{ A rms}, \ I_{CN} = 9,37 \angle -244,4^\circ \text{ A rms}$$

$$12.34 \ I_{ba} = 8,64 \angle 57,94^\circ \text{ A rms}, \ I_{cb} = 8,64 \angle -62,06^\circ \text{ A rms}, \ I_{ac} = 8,64 \angle -182,06^\circ \text{ A rms}$$

$$12.38 \ S_{3\phi} = 522,8 \angle 67,9^\circ \text{ VA}, \ S_{\text{carga}} = P_{\text{carga}} + jQ_{\text{carga}} = 65,6 + j161,4 \text{ VA}$$

$$12.42 \ 16,65 + j11,07 \ \Omega \quad 12.46 \ 0,91 \text{ em atraso} \quad 12.50 \ 18,5 \text{ kVA com fp em atraso } 0,65$$

$$12.56 \ 9409,96 \text{ W} \quad 12.58 \ 20,687 \text{ W} \quad 12.62 \ 94,1 \angle 30^\circ \ \Omega \quad 12.64 \ 422,45 \ \mu\text{F}$$

### Capítulo 13

$$13.1 \ 5,33 \angle -123,69^\circ \text{ V}$$

$$13.4 \ -V_1 + R_1 I_1 + \frac{1}{j\omega C_1} (I_1 - I_2) + R_2 (I_1 - I_2) + V_2 = 0$$

$$\frac{1}{j\omega C_1} (I_2 - I_1) + j\omega L_1 I_2 + j\omega M I_3 + R_3 I_2 + \frac{1}{j\omega C_2} (I_2 - I_3) = 0$$

$$-V_2 + R_2 (I_3 - I_1) + \frac{1}{j\omega C_2} (I_3 - I_2) + R_4 I_3 + j\omega L_3 I_3 + j\omega M I_2 = 0$$

$$13.8 \ 20,87 \angle 4,29^\circ \text{ V} \quad 13.11 \ 1,21 \angle 190,18^\circ \text{ V} \quad 13.15 \ 385,63 \ \mu\text{J} \quad 13.18 \ 6,5 + j8 \text{ W}$$

$$13.22 \ 0,005572 \angle 89,89^\circ \text{ V} \quad 13.25 \ 0,03014 \angle -30,26^\circ \text{ V} \quad 13.29 \ 44,72 \angle -153,43^\circ \text{ V}$$

$$13.33 \ 15,94 \angle 175,2^\circ \text{ V} \quad 13.36 \ 2,61 \angle -33,4^\circ \text{ A} \quad 13.40 \ 15,86 \angle -43^\circ \text{ V}$$

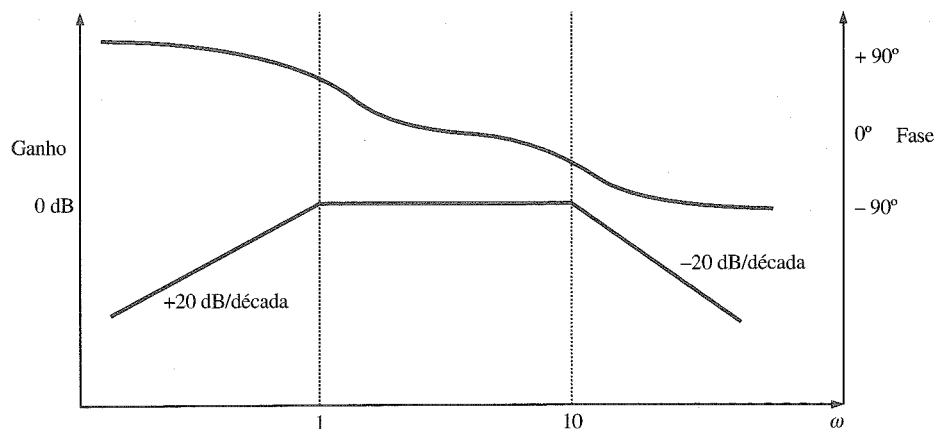
$$13.43 \ -18,32 \angle 17,74^\circ \text{ V} \quad 13.47 \ 20 \quad 13.52 \ 5737,72 \text{ W} \quad 13.56 \ 2,615 \angle -33,40^\circ \text{ A}$$

$$13.60 \ 550 \text{ kVA}$$

### Capítulo 14

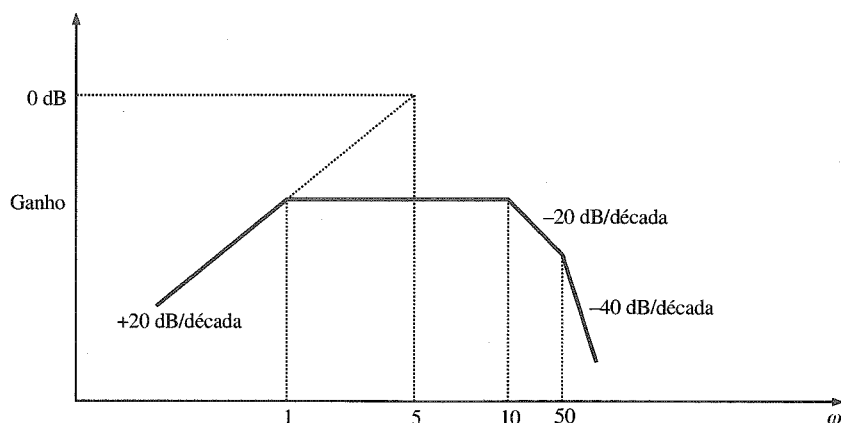
$$14.1 \ \frac{8s(s+1)}{2s^2+6s+1} \quad 14.4 \ \frac{RCs+3}{3LCs^2+2RCs+3}$$

14.8

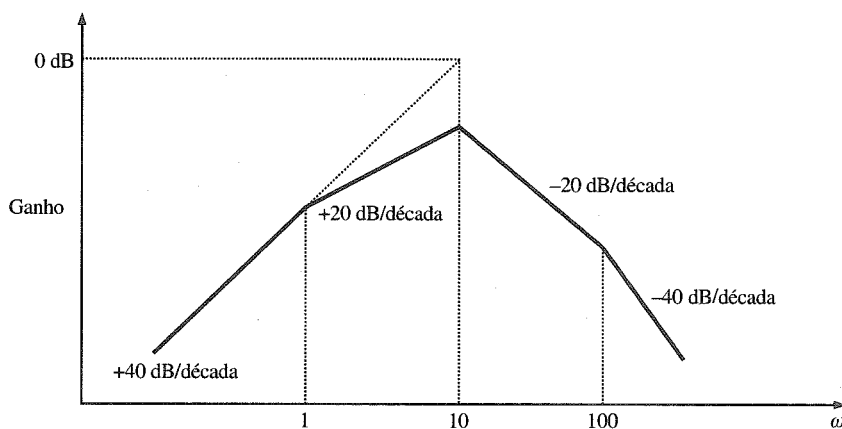




## 14.13



## 14.15



$$14.20 \quad \frac{100(j\omega + 1)\left(\frac{j\omega}{120} + 1\right)}{\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{80} + 1\right)^2}$$

$$14.23 \quad \frac{40\left(\frac{j\omega}{50} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{1000} + 1\right)}{(j\omega)\left(\frac{j\omega}{400} + 1\right)^2}$$

$$14.26 \quad \frac{(20)^2\left(\frac{j\omega}{1.5} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)}{-\omega^2\left(\frac{j\omega}{80} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{200} + 1\right)}$$

$$14.29 \quad L = 1,59 \text{ mH}, C = 1,59 \text{ nF}$$

$$14.32 \quad \omega_o = 10^4 \text{ rad/s}, Q = 10, \omega_{\max} = 9974,97 \text{ rad/s}, |V_o|_{\max} = 60,075 \text{ V}$$

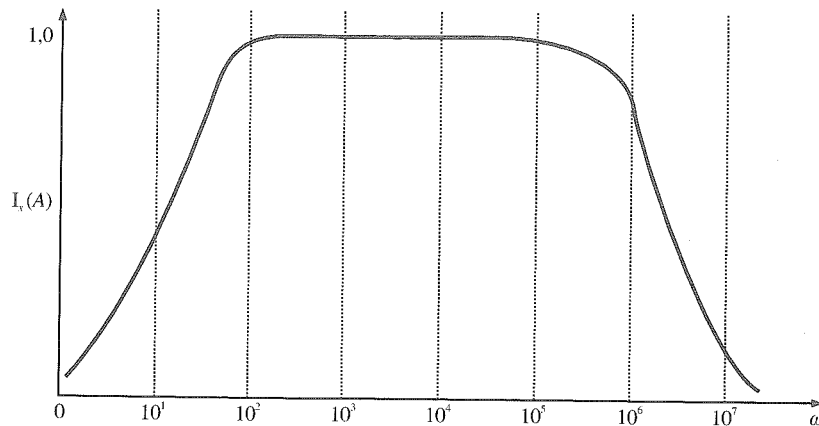
$$14.36 \quad \omega_o = 500 \text{ rad/s}, Q = 12,5 \quad 14.40 \quad L = 19,53 \text{ mH}, Q = 10,42, BW = 153,6 \text{ rad/s}$$

$$14.43 \quad \omega_o = 2.000 \text{ rad/s}, Q = 25, BW = 80 \text{ rad/s}, P_{\text{res}} = 18 \text{ W}$$

$$14.47 \quad \omega_o = 790,57 \text{ rad/s}, Q = 126,49$$

$$14.51 \quad \omega_o = 1.000 \text{ rad/s}, BW = 50, Q = 20, V_o = 40 \angle 0^\circ \text{ V}$$

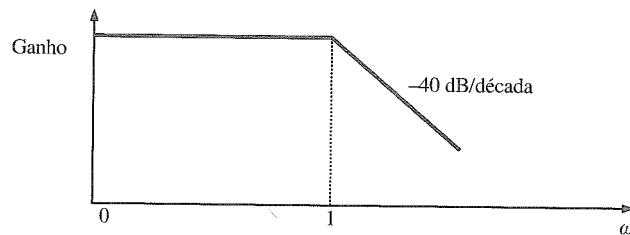
14.54



14.58  $R = 2.000 \, \Omega$ ,  $L = 500 \, \text{H}$ ,  $C = 1/8.000 \, \text{F}$

14.62  $\frac{j\omega - (1/RC)}{j\omega + (1/RC)}$ , filtro passa-faixa

14.66  $\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{(j\omega + 1)^2}$



Este é um filtro passa-baixas

14.69  $H_o = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}$ ,  $\xi = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{R_4 C_2}{R_2 C_1}} + \sqrt{\frac{R_2 C_1}{R_4 C_2}} \right)$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_4 R_2 C_1 C_2}}$$

## Capítulo 15

15.1 (a)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_L} & -\frac{1}{Z_L} \\ -\frac{1}{Z_L} & \frac{1}{Z_L} \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} Z_L & Z_L \\ Z_L & Z_L \end{bmatrix}$

15.4  $-4 \, \text{A}$

15.8  $\begin{bmatrix} j\omega(C_1 + C_2) & -j\omega C_1 \\ \frac{A}{R} - j\omega C_1 & \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} + j\omega(C_1 + C_3) \end{bmatrix}$

15.12  $1,384 \, \text{M}\Omega$     15.16  $884 \, \Omega$

$$15.20 \begin{bmatrix} -\frac{1}{\gamma} & \frac{-Z_2}{\gamma} \\ \frac{1}{\gamma Z_1} & \frac{-Z_2}{\gamma Z_1} \end{bmatrix}$$

$$15.24 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 18,17 - j6,75 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad Z_i = 4,84 \angle -20,42^\circ \Omega$$

$$15.28 \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

$$15.32 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$15.36 \begin{bmatrix} 3 & j8 \\ 3-j & 3+j8 \end{bmatrix}$$

$$15.40 \begin{bmatrix} \frac{5}{3} + 2j\omega & -(\frac{4}{3} + j\omega) \\ -(\frac{4}{3} + j\omega) & \frac{5}{3} + 2j\omega \end{bmatrix}$$

$$15.44 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{49}{2} - j\frac{27}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad I_o = 0,30 \angle 75,62^\circ \text{ A}$$

$$15.48 \quad 4,63 \angle 157,5^\circ \text{ V}$$

## Capítulo 16

$$16.2 \quad F(s) = \frac{e^{-a}}{4x} \left( \frac{1}{s+1} \right)$$

$$16.5 \quad F(s) = e^{-4s} \left[ \frac{e^{-4a}}{(s+a)^2} + \frac{4e^{-4a}}{s+a} \right]$$

$$16.8 \quad F(s) = \frac{(s^2 + s + 1)e^{-s}}{s^2(s+1)} \quad 16.11 \quad F(s) = \frac{A}{s} (1 - e^{-Ts})$$

$$16.15 \quad F(s) = \frac{2}{s^2(1 - e^{-2s})} (1 - e^{-s} - se^{-2s})$$

$$16.19 \quad F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left( \frac{2}{s^2} e^{-s} - \frac{2}{s^2} e^{-2s} - \frac{2}{s} e^{-2s} \right)$$

$$16.23 \quad F(s) = \frac{1}{1 - e^{-4s}} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \frac{1}{s^2} e^{-3s} + \frac{1}{s} e^{-4s} \right)$$

$$16.26 \quad F(s) = \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \left( \frac{10}{s^2 + 1} + \frac{10e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \right)$$

$$16.30 \quad (a) \quad f(t) = \left( \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{3}{4} e^{-6t} \right) u(t)$$

$$(b) \quad f(t) = \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{-4t} \right) u(t)$$

$$16.34 \quad (a) \quad f(t) = (2te^{-t} + e^{-t}) u(t)$$

$$(b) \quad f(t) = (6 - 5te^{-t} - 6e^{-t}) u(t)$$

$$16.39 \quad (a) \quad f(t) = \left[ -\frac{1}{4} e^{-2t} + 2 \left( \frac{5}{8} \right) e^{-2t} \cos 2t \right] u(t)$$

$$(b) f(t) = [\delta(t) - 4(2)(\frac{1}{4}) e^{-2t} \cos(2t - 90^\circ)] u(t)$$

$$16.42 f(t) = [-3 + 3t + \frac{12}{5}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t} \cos(2t - 26,56^\circ)] u(t)$$

$$16.47 f(t) = (t - 1 + e^{-t}) u(t) - [(t - 1) - 1 + e^{-(t-1)}] u(t - 1)$$

$$16.51 (a) f(0) = 2, f(\infty) = 4$$

$$(b) f(0) = 2, f(\infty) = 0$$

$$(c) f(0) = 2, f(\infty) = 0$$

$$16.54 (a) x(t) = (\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}) u(t)$$

$$(b) x(t) = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-4t}) u(t)$$

$$16.57 y(t) = (2te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t}) u(t)$$

### Capítulo 17

$$17.1 Z(s) = \frac{6s+8}{6s^2+16s+11} \quad 17.4 \text{ 8 V} \quad 17.8 [2\sqrt{2}e^{-t} \cos(t - 45^\circ)] u(t) \text{ V}$$

$$17.12 \frac{6}{7}(1 - e^{-7/4t}) u(t) \text{ V} \quad 17.16 \frac{24}{7}(e^{-2/7t}) u(t) \text{ V} \quad 17.21 (2 - 6e^{-4t}) u(t) \text{ V}$$

$$17.24 (-\frac{4}{3} + 2e^{-t} - \frac{20}{3}e^{-3t}) u(t) \text{ V}$$

$$17.30 (4 + 12e^{-3/2t}) \text{ V}, t > 0$$

$$17.34 Z(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{s^2+1}{s} \end{bmatrix}$$

$$i_2(t) = \left[ -\frac{4}{3} + 2(0,85)e^{-3/4t} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t - 37,76^\circ\right) \right] u(t) \text{ A}$$

$$17.38 1,15(e^{-0,42t} - e^{-1,58t}) u(t) \text{ V} \quad 17.40 1,34(e^{-2,62t} - e^{-0,38t}) u(t) \text{ A}$$

$$17.43 v_o(0) = 0 \text{ V}, v_o(\infty) = 4 \text{ V}$$

$$17.48 \frac{V_o}{R_1 + R_2} = \frac{s + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}}{\left[ \frac{s + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}}{R_1 C_1} \right]}$$

$$17.52 \frac{V_o}{V_s} = \frac{-\frac{s}{R_1 C_1}}{s^2 + s\left(\frac{C_1}{C_1 C_2 R_3} + \frac{C_2}{C_1 C_2 R_3}\right) + \frac{R_1 + R_2}{C_1 C_2 R_1 R_2 R_3}}$$

$$17.56 5,23 \cos(2t + 97,76^\circ) \text{ V}, t > 0 \quad 17.60 \text{ O circuito é sobre-amortecido.}$$

### Capítulo 18

$$18.1 f(x) = \frac{10}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(0,1 n \pi) e^{-j0,2\pi} e^{j n \omega_0 t}$$

$$18.5 \quad c_n = 0 \text{ para } n \text{ par ou } \phi$$

$$= \frac{1}{j2\pi n} \text{ para } n \text{ ímpar}$$

$$18.8 \quad c_n = -\frac{4}{(n\pi)^2} \quad n \text{ ímpar}$$

$$= 0 \text{ } n \text{ par e } c_0 = 1$$

$$18.12 \quad (\text{a}) \text{ Função ímpar com simetria de meia-onda} \quad (\text{b}) \text{ função par}$$

$$18.16 \quad v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{20}{n\pi} \sin nt$$

$$18.19 \quad a_n = \frac{1}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1)$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$18.22 \quad f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \pi t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 - \cos(1+n)\pi}{\pi(1-n^2)} \cos n\pi t$$

$$18.26 \quad f(t) = 3 - 4 \sin 20\pi t - 5 \sin 40\pi t - 3 \sin 60\pi t - 2 \sin 80\pi t - \sin 100\pi t$$

$$18.29 \quad A_n = \left| \frac{2 + j6n}{j2n} \right|$$

$$i_o(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{20}{n\pi} \left( \frac{1}{A_n} \right) \cos(nt - 90^\circ - \theta_n) \text{ A}$$

$$18.32 \quad V_o(0) = 0,25 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad V_o(1) = 0,28 \angle 26,6^\circ \text{ V}, \quad V_o(2) = 0, \quad \text{e} \quad V_o(3) = 0,023 \angle -49^\circ \text{ V}$$

$$18.36 \quad 124,06 \text{ W}$$

$$18.39 \quad (\text{a}) \quad \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 2)^2 + 16}$$

$$(\text{b}) \quad \frac{4}{(j\omega + 2)^2 + 16}$$

$$18.43 \quad 3(e^{-t} - e^{-2t}) u(t) \text{ V} \quad 18.47 \quad (2e^{-t} - e^{-1/2t}) u(t) \text{ A} \quad 18.50 \quad 0,99 \text{ J}$$

# Índice Analítico

- Ac, 4
- Ac, análise do regime permanente, 339, 388, 745, 783
- Acoplamento magnético, 513
- Acoplamento por fluxo, 513
- Aditividade, 175
- Adjacente de uma matriz, 82, 85, 816
- Admitância, 357, 394
  - capacitor, 358
  - conexão em série, 358
  - conexão paralela, 358
  - indutor, 358
  - parâmetros, 642, 664
  - resistor, 358
- Amortecimento crítico, 312
- Ampère, 1, 3
- Amplificador *buffer*, 126
- Amplificador diferencial, 122
- Amplificador não-inversor, 124
- Amplificador operacional, 117-126, 161-163, 183, 197, 208, 273-276, 373, 393, 611-627, 741
- Amplificador, *ver* Amplificador operacional
- Amplitude
  - de uma senóide, 339-340
  - espectro, 782
  - resposta, 567
- amp-op; *ver* Amplificador operacional
- Análise de laço, 25-26, 97, 395, 731
- Análise nodal, 78, 390, 720
- Análise por fase, 480
- Análise transiente, 249-291, 309-322, 731-744
- Ângulo de fase adiantado, 350, 445
- Ângulo de fase em atraso, 350, 445
- Ângulo de fator de potência
  - em atraso, 350, 445
  - em avanço, 350, 445
- Ângulo
  - fase, 340
  - fator de potência, 444
- Argumento, 340
- Árvore, 110
- Auto-indutância, 515
- Autotransformador, 542
- Bateria, 4, 5, 8
- Bobina de potencial, 453
- Bobinas, magneticamente acopladas, 513
- Caminho fechado, 22
- Caminho, fechado, 22
- Campo elétrico, 226
- Campo magnético, 230, 513
- Candela, 1
- Capacitância, 225
- Capacitor, 225
  - circuito equivalente no domínio  $s$ , 720
  - corrente, 226
  - energia armazenada, 227
  - impedância, 354

- relacionamento de fasores, 352
- tensão inicial, 234
- tensão, 226
- Capacitores
  - em paralelo, 234
  - em série, 233
- Característica de magnitude, 567
- Carga conectada em Y, 478
- Carga elétrica, 3
- Carga
  - conectada em delta, 478
  - conectada em Y, 478
  - em equilíbrio, 478
  - trifásica, 478
- Carga, 3, 226
- Chave, 251
- Choque (elétrico), 454
- Choque elétrico, 454
- Ciclos por segundo, 340
- Circuito aberto, 20
  - parâmetros de impedância, 648-651
  - tensão, 190, 402
- Circuito com alto  $Q$ , 587
- Circuito de parâmetros concentrados, 22
- Circuito em cascata, 47
- Circuito equivalente T-p para bobinas acopladas magneticamente, 524
- Circuito não-plano, 109
- Circuito resistivo, 22
- Circuito sem fonte, 254
- Circuito, 3
  - aberto, 20
  - ativo, 8
  - curto-, 20
  - disjuntor, 456
  - equivalente de Norton, 190, 202, 402
  - equivalente de Thévenin, 190, 202, 253, 402, 534, 726
  - linear, 176
  - modelos, 718
  - não-plano, 109
  - passivo, 8
  - planar, 109
  - ressonante, 582
- Circuitos  $RL$  e  $RC$  de primeira ordem, 249
- Circuitos de segunda ordem, 309-333
- Circuitos equivalentes
  - equivalente  $\pi$ , 671
  - equivalente T, 671
  - Norton, 190
  - parâmetro Y, 660
  - parâmetros híbridos, 651
  - Thévenin, 190
  - transformação  $\Delta$ -Y, 53
  - transformador, 524
- Circuitos trifásicos em equilíbrio, 475
  - Conexão Y- $\Delta$ , 482
  - Conexão Y-Y, 478
  - Fonte conectada em  $\Delta$ , 484-485
- Co-árvore, 110
- Coefficiente de acoplamento, 521
- Coefficiente de amortecimento, 311
- Co-fator, 85, 95
- Componente ativo, 8
- Condições iniciais, 254, 720
- Condutância, 19, 358
- Condutor, 22
- Conexão delta, 479, 484, 545
- Conexão em cascata, 670
- Conexões paralelas, 37, 234, 237, 664
- Conexões Y, 478
- Conjunto de corte fundamental, 113
- Conjunto de corte, 111
- Conservação de energia, 8
- Constante de tempo, 250, 253
- Convenção de ponto, 515
- Convenção de sinal, 6
- Convenção passiva de sinal, 6
- Conversões de parâmetros, 662, 664
- Corrente alternada, 4, 339
- Corrente contínua (dc), 4
- Corrente, 3
  - alternada, 4
  - contínua, 4
  - curto-circuito, 20, 190
  - divisão de, 38, 42, 371
  - laço, 97
  - lei de Kirchhoff para, 22
  - malha, 98
- Coulomb, 3
- Curto-circuito, 20
  - corrente, 190, 406
  - parâmetros de admitância, 642
- Dc, 4
- Década, 570
- Decibéis, 569
- Degrau
  - função, 269
  - resposta ao, 271, 722-729
- Determinante, 82, 85, 95, 814
- Diagrama de Bode, 567
- Diagrama de pólos e zeros, 738, 740, 742
- Dielétrico, 225
- Diferença de potencial, 4
- Diferenciação, 691, 792
- Diferenciador, 273, 373
- Disjuntores, 456

- Dispositivo físico, 3
- Divisão de
- corrente, 38
  - tensão, 30
- Domínio  $s$ , 718
- Efeito Miller, 394
- Elemento passivo, 8
- Elementos sem perda, 431
- Eletrocardiógrafo, 459
- Eliminação gaussiana, 81, 810
- Elo, 110
- Energia, 4
- cálculo pelo teorema de Parseval, 798
  - em bobinas acopladas magneticamente, 520
  - em um capacitor, 226, 255
  - em um indutor, 230, 258
- Enrolamento primário do transformador, 514
- Enrolamento secundário do transformador, 530
- Enrolamento
- primário, 514
  - secundário, 530
- Entrada amp-op não-invertida, 124
- Entrada
- admitância de, 642
  - impedância de, 648
  - resistência de, 118, 123
- Equação característica, 311, 738
- Equação de Euler, 345
- Equação diferencial, 249, 310
- solução por transformada de Laplace, 708, 718
- Equações diferenciais de primeira ordem, 249, 267
- Equações diferenciais de segunda ordem, 309-333
- Equivalente de Norton, 190
- Equivalente de Thévenin
- circuito, 190, 202, 253, 402, 534, 726
  - impedância, 402
  - resistência, 188
- Espectro contínuo de frequência, 787
- Espectro de amplitude, 782
- Espectro de fase, 782
- Espectro
- amplitude, 782
  - fase, 782
  - frequência, 782
- Expansão em frações parciais, 699
- Exponencial
- forma de um número complexo, 820
  - função excitante, 277
  - série de Fourier, 761
- Farad, 226
- Fase
- ângulo de, 340
  - característica de, 568
  - corrente, 480, 482
  - deslocamento, 778
  - espectro, 782
  - seqüência de, 477
  - tensão de, 477, 482
- Fasor
- conceito, 347, 759-760
  - diagramas, 350, 367
- Fator de qualidade ( $Q$ ), 584, 588
- Fatores quadráticos, 570, 573
- Fibrilação muscular, 455
- Filtro elétrico; *ver* Filtros
- Filtro passa-altas, 604, 607, 614, 618, 625, 798
- Filtro passa-baixas, 604, 606, 614, 617, 625, 798
- Filtro passa-faixa, 586, 604, 608, 611, 798
- Filtro rejeita-faixa, 604, 608, 798
- Filtros
- ativos, 611
  - ideal, 605, 608
  - passa-altas, 604, 607, 614, 618, 625, 798
  - passa-baixas, 604, 606, 614, 617, 625, 798
  - passa-faixa, 586, 604, 608, 611, 798
  - passivo, 604
  - projeto, 614-627
  - rejeita-faixa, 604, 608, 798
- Fio de terra, 456
- Fio neutro, 399
- Fonte conectada em Y, 478
- Fonte controlada por
- corrente, 10
  - tensão, 10
- Fonte de corrente
- dependente, 10
  - independente, 9
- Fonte dependente, 94, 107
- corrente controlada, 10
  - tensão controlada, 10
- Fonte independente de
- corrente, 8
  - tensão, 8
- Fonte polifásica, 746
- Fonte teste, 406
- Fonte trifásica, 478
- Fonte
- constante, 8
  - controlada, 10
  - em equilíbrio, 475
  - ideal, 13
  - independente, 8
  - monofásica a três fios, 339
  - prática, 185



- senoidal, 340
- tensão, 8
- transformação de, 185, 400
- Fontes dc, 8, 10
- Fontes ideais, 185
- Fontes práticas de
  - corrente, 185
  - tensão, 185
- Força eletromotriz, 4
- Forma de onda dente-de-serra, 694
- Forma polar de um número complexo, 820
- Forma retangular de um número complexo, 810
- Fourier
  - análise, 758
  - coeficientes, 761, 771
  - integral, 788
- Frequência angular, 339
- Frequência baixa de meia-potência, 589
- Frequência de centro, 586
- Frequência de corte, 570, 606
- Frequência de meia-potência, 586
- Frequência de ressonância não-amortecida, 311, 738
- Frequência de ressonância, 582
  - circuito paralelo, 594
  - circuitos em série, 584
  - relacionamento para frequências de meia-potência, 594
- Frequência natural, 312
- Frequência radiana, 339
- Frequência superior de meia-potência, 586
- Frequência
  - angular, 339
  - complexa, 684
  - domínio da, 348
  - espectro, 782
  - fundamental, 759
  - meia-potência, 586
  - mudança de escala, 599
  - natural, 312
  - radiana, 339
  - resposta, 567
  - ressonante não-amortecida, 311
  - ressonante, 582
- Função complexada excitação, 346
- Função de excitação
  - complexa, 343
  - exponencial, 267, 277
  - linear por partes, 279
  - pulso, 276
  - senoidal, 278, 343
- Função degrau unitário, 269, 686
- Função delta, 685
- Função impulso unitário, 685, 764
- Função periódica
  - transformada de Laplace, 697
  - valor eficaz, 441
- Função porta, 694
- Função racional, 698
- Função senoidal, 339-340
  - amplitude, 339-340
  - ângulo de fase, 340
  - frequência, 340
  - período, 340
  - transformada de Fourier, 790
  - transformada de Laplace, 688
  - valor máximo, 339
  - valor médio, 441
  - valor rms, 441
- Função singular, 269, 685
- Fusível, 456
- Ganho, 118
- Giga, 1
- Grafo, 109
  - conectado, 110
  - teoria, 109-110
- Harmônicas, 759
- Henry, 230
- Hertz, 340
- Homogeneidade, 175
- Identidade de Euler, 768
- Imaginário
  - componente, 345
  - número, 820
  - operador, 820
  - parte, 345
- Impedância refletida, 526
- Impedância, 354
  - circuito aberto, 648
  - curto-circuito, 648
  - entrada, 648
  - equivalente de Thévenin, 402
  - equivalente, 355
  - mudança de escala, 599
  - parâmetros, 648-651
  - saída, 648
  - transferência, 648
- Impulso
  - função, 685, 764
  - resposta, 738
- Indutância mútua, 513
- Indutância
  - auto-, 230
  - equivalente, 236-239
  - mútua, 513

- Indutor, 229
  - Características, 229
  - circuito equivalente no domínio  $s$ , 720
  - corrente inicial, 230
  - corrente, 230
  - energia armazenada, 231
  - ideal, 230
  - impedância, 354
  - relação de fasores, 351
  - tensão, 230
- Indutores
  - em paralelo, 237
  - em série, 236
- Integrador, 273, 373
- Integral de convolução, 703
- Interconexões de quadripolos, 664-671
- Interruptor de falta de terra, 457
- Inversa
  - matriz, 81, 816
  - transformada de Fourier, 788
  - transformada de Laplace, 698
- Invertendo a entrada de um amp-op, 121
- Joule (J), 4
- Kelvin (grau), 1
- Laço, 22
- Laços fundamentais, 115
- Largura de faixa, 586, 606
  - circuito RLC paralelo, 593
  - circuito RLC em série, 588
- Lei de Ampère, 530
- Lei de Faraday, 513
- Lei de Ohm, 18
- Leis de Kirchhoff, 22
  - para corrente (LKC), 22, 355, 370, 718
  - para tensão (LKT), 25, 355, 370, 718
- Linearidade, 175, 388, 792
- Linha
  - corrente de, 480, 483
  - espectro de, 782
  - tensão de, 477, 479
- Malha
  - análise, 395, 720
  - corrente, 98
- Matriz identidade, 811
- Matriz simétrica, 86, 100
- Matriz
  - adjacente, 82, 815
  - co-fator, 814
  - colunas, 810
  - determinante, 82, 814
  - diagonal, 811
  - elementos, 811
  - identidade, 811
  - inversa, 81, 816
  - linhas, 810
  - quadrada, 811
  - simétrica, 86, 100
  - traço, 811
  - transposta, 813
- Matrizes, 81, 810
  - adição, 811
  - multiplicação, 812
  - subtração, 811
- Medição de fator de potência, 503
- Medição de potência, 452, 500
- Mega, 1
- Métodos dos dois wattímetros, 501
- Micro, 1
- mili, 1
- Modelo ideal de um amp-op, 118
- Modelo matemático, 1, 3
- Modelos de circuito, 718
- Mudança de escala de magnitude, 599
- Mudança de escala
  - frequência, 599
  - magnitude, 599
- nano, 1
- Nó de referência, 78
- Nó, 22
- Notação de subíndices duplos, 26
- Números complexos, 346, 820-826
  - adição, 823
  - ângulo, 822
  - conjugado complexo, 822
  - divisão, 825
  - forma exponencial, 346, 820
  - forma polar, 346, 820
  - forma retangular, 820, 822
  - igual, 822
  - magnitude, 822
  - multiplicação, 825
  - parte imaginária, 347, 820
  - parte real, 347, 820
  - subtração, 824
- Ohm, 18
- Oscilações amortecidas, 314
- Parâmetros
  - admitância de curto-circuito (Y), 642-648
  - híbridos (h), 651-656
  - impedância de circuito aberto (Z), 648-651
  - transmissão (ABCD), 656-660

- Parâmetros ABCD, 656-660
- Parâmetros de Quadripolos
- admitância, 642-647
  - híbrida, 651-656
  - impedância, 648-651
  - transmissão, 656-660
- Parâmetros de transmissão, 656-660
- Parâmetros híbridos, 651-656
- Parâmetros Y, 642-648
- Parâmetros Z, 648-651
- Período, 339
- Permeância, 515
- Pico, 1
- Plano  $s$ , 738
- Plano complexo, 738
- Pólo, 566, 572, 738
- Pólos complexos, 700
- Pólos de primeira ordem
- em diagramas de Bode, 570
  - em expansões de frações parciais, 699
- Porta, 642
- Potência aparente, 444
- Potência complexa, 446
- Potência de quadratura, 447
- Potência instantânea, 19, 429
- Potência média, 444, 785
- Potência real, 447
- Potência reativa, 447
- Potência; *ver também* Transferência máxima de
- potência
  - aparente, 447
  - complexa, 446
  - dissipada, 4-8
  - fator de correção de, 446, 450, 505
  - fator de, 444
  - fornecida, 4-8
  - instantânea, 19, 429
  - média, 431, 442, 785
  - medição de fator de, 503
  - medição, 452, 500
  - quadratura, 447
  - real, 447
  - reativa, 447
  - triângulo de, 448
  - trifásica, 491
- Princípio da superposição, *ver* Superposição
- Problemas, *ver* Respostas de Alguns Problemas
- Produto de ganho pela largura de faixa, 624
- Propriedade de amostragem, 686, 790
- PSpICE
- Análise Ac, 408-411, 495-500, 527-529, 540-542
  - análise de circuitos trifásicos, 495-500
  - circuitos magneticamente acoplados, 527-529
  - circuitos transformadores ideais, 540-542
  - comando de dados, 276, 540
  - comandos de controle da solução, 408
  - Análise dc, 147-163
    - comando de comentário, 148
    - comando de fim, 154
    - comando de título, 148
    - comandos de controle da solução, 152-153
    - comandos de dados, 148-152
    - comandos de especificação da saída, 153
  - Análise de resposta da frequência, 601-604, 609
  - Análise de sensibilidade, 206-208
    - comando de controle da solução, 206, 279
  - Análise de séries de Fourier, 775-776
  - Análise e projeto de filtros, 616-627
  - Análise transiente, 276-291, 325-332
    - comandos de controle da solução, 279
    - comandos de especificação de saída, 280
    - comandos de ramo, 276
    - fonte de pulso, 276
    - fonte exponencial, 277
    - fonte linear por partes, 279
    - fonte senoidal, 278
    - fontes variáveis no tempo, 276-279
    - tempo de atraso, 276-279
    - tempo de descida, 276-277
    - tempo de subida, 276-277
    - tempo morto na descida, 276-277
    - tempo morto na subida, 276-277
    - valores *default*, 277-279
  - Subcircuito, 617
- Pulso retangular, 276
- Pulso
- resposta, 269
  - retangular, 276
  - trem de, 269
- Quadripolos interconectados, 664-671
- Quilo, 1
- Quociente de amortecimento, 571, 738
- Ramo, 22
- árvore, 110
- Reatância capacitiva, 354
- Reatância indutiva, 354
- Reatância
- capacitativa, 354
  - indutiva, 354
- Rede bipolar, 642
- Rede plana, 97, 109

- Rede  
  ativa, 8  
  função de, 565  
  passiva, 80  
  quadripolos, 642  
  ressonante, 582  
  teoremas, 175-202  
  topologia, 109-117  
Redes de filtros ativos, 611  
Redes equivalentes T-p, 671-674  
Referência de polaridade, 4  
Regra da mão direita, 515  
Relação de espiras, 531  
Relação trigonométricas, 341  
Resistência do corpo, 458  
Resistência interna, 185  
Resistência, 18  
  combinação em série, 45  
  combinação paralela, 45  
  entrada, 118, 123  
  infinita, 20  
  interna, 185  
  saída, 197  
  Thévenin, 188  
  zero, 20  
Resistor, 18  
  impedância de, 354  
  linear, 19  
  relacionamento de fasor para, 349  
Resposta complexa, 718  
Resposta criticamente amortecida, 312, 313, 738, 741  
Resposta em estado estacionário; *ver também*  
  Resposta, senoidal em estado estacionário  
Resposta forçada, 249, 310  
Resposta não-amortecida, 312, 313, 738  
resposta natural, 249, 739  
Resposta sem fonte, 254  
Resposta sobreamortecida, 312, 313, 738  
Resposta transiente, 249-291, 309-332, 731-744  
Resposta  
  amplitude da, 567  
  completa, 249, 310  
  exponencial, 277  
  fase, 569-582  
  forçada, 260-291, 720-747  
  forma de onda complexa, 734  
  frequência, 567  
  impulso, 738  
  linear por partes, 279  
  natural, 249, 739  
  pulso, 269, 276  
  senoidal em estado estacionário, 370-373, 388-441, 745-747  
  senóide amortecida, 278  
Respostas de Alguns Problemas, 829  
Ressonância paralela, 591  
Ressonância  
  em série, 583, 585  
  paralela, 583, 591  
Segundo, 1  
Segurança, 6, 454-462, 548  
Senóide amortecida, 313  
Senóide  
  amortecida, 313  
  complexa, 339  
Sensibilidade, 206-208  
Seqüência *abc*, 477-478  
Seqüência de fase negativa, 478  
Seqüência de fase positiva, 477  
Série de Fourier  
  cosseno, 771  
  exponencial, 761  
  trigonométrica, 768  
Série trigonométrica de Fourier, 768  
Série  
  conexões quadripolo, 668-670  
  ressonância, 583, 585  
Siemens, 19  
Simetria da função ímpar, 770  
Simetria da função par, 769  
Simetria de meia-onda, 771  
Simetria  
  função ímpar, 770  
  função par, 769  
  meia-onda, 771  
Sinal de erro, 118  
Sistema Internacional de Unidades (SI), 1  
Sistema monofásico a três fios, 399  
Sistema trifásico em equilíbrio, 478  
Sistema Y-Y, 480  
Supernó, 91, 390, 725  
Superposição, 179, 189, 267, 398, 642, 722  
Susceptância capacitiva, 358  
Susceptância, 358  
Tensão nodal, 78  
Tensão, 4  
  divisão, 31, 370  
  fase, 480  
  fonte, 8-10  
  linha, 480  
Teorema de deslocamento, 690  
Teorema de Norton, 188, 402  
Teorema de Parseval, 795

- Teorema de Thévenin, 188, 199, 402, 436, 533, 726
- Teorema do valor final, 706
- Teorema do valor inicial, 706
- Tera, 1
- Terra, 78
- Topologia, 109-117
- Transferência máxima de potência
  - circuitos ac, 436
  - circuitos dc, 202
- Transferência
  - admitância, 644
  - função de, 565, 737
  - impedância, 648
- Transformação Y- $\Delta$ , 53, 364, 487
- Transformação Y-delta, 53, 364, 487
- Transformação
  - delta-Y, 53, 364, 487
  - fonte, 185, 400
  - Y-delta, 53, 364, 487
- Transformação, delta-Y, 53, 364, 487
- Transformada de Fourier, 787
  - definição, 788
  - derivação, 787-788
  - inversa, 788
  - pares, 791
  - propriedades, 791
- Transformada de Laplace
  - aplicação na análise de circuitos, 718-748
  - aplicações com equações diferenciais, 708
  - definição, 684
  - inversa, 698
  - pares, 688
  - propriedades, 688
  - teorema do valor final, 706
  - teorema do valor inicial, 706
- Transformada de
  - Fourier, 787
  - Laplace, 684
- Transformador de núcleo magnético, 530
- Transformador ideal, 513, 531
- Transformador linear, 523
- Transformador
  - auto, 542
  - circuito equivalente, 524
  - ideal, 513, 531
  - impedância refletida, 525
  - linear, 523
  - núcleo magnético, 530
  - primário, 514
  - razão de espiras, 531
  - secundário, 525
  - trifásico, 545
- Transformadores trifásicos, 545
- Transistor, 8, 394
- Unidades SI, 1
- Unidades, 1
  - SI, 1
- Valor eficaz, 441
- Valor médio quadrático (rms), 441-444
- Valor médio, 441
- Var, 447
- Volt, 4
- Watt, 6
- Wattímetro, 452
- Zeros complexos, 700
- Zeros de primeira ordem em diagramas de Bode, 570
- Zeros, 566, 572

QUARTA EDIÇÃO

# ANÁLISE DE CIRCUITOS EM ENGENHARIA

- Boylestad** — Introdução à análise de circuitos (10ª edição)
- Burian** — Circuitos elétricos
- Malvino** — Eletrônica (2 vols.)
- Mariotto** — Análise de circuitos elétricos
- Nilsson** — Circuitos elétricos (8ª edição)
- O'Malley** — Análise de circuitos (2ª edição)

Makron Books  
é um selo da

PEARSON

[www.pearson.com](http://www.pearson.com)

SOCIEDADE EDUCACIONAL DE SANTA CATARINA



CTB12104 621.319 2 172an  
Análise de circuitos em engenharia